

Auxiliar: Enfriamiento de un semiespacio infinito

Profesor de Cátedra: Jaime Campos M.

Auxiliar: Esteban Díaz D.

Ayudantes: David Maldonado O., Andrea Paz Navarro A.

Ecuaciones que deben saber:

- Ec. Flujo de Calor: $\dot{q} = -K\nabla T$
 K : coeficiente de conductividad térmica [W/m°K]
 \dot{q} : flujo de calor en W/m² para S.I o cal/cm²s para C.G.S.
1W (vatio o watt, es la unidad de potencia del S.I.)=1 J/s= 1 N m/s = 1 kg m²/s³
- Ec. De Difusión sin fuentes de calor: $k\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$
 k : coeficiente de difusividad termal $k [m^2/s] = \frac{K}{\rho C_p}$
 ρ : densidad [kg/m³]
 C_p : calor específico [J/kg°K]

Un número importante de problemas geológicos puede modelarse como calentamiento instantáneo o enfriamiento instantáneo de un semiespacio semi-infinito. Lord Kelvin a mediados del siglo XIX usó el modelo y su solución para estimar la edad de la Tierra, asumiendo que el flujo de calor superficial proviene del enfriamiento inicial de una Tierra más caliente y concluyó que la edad de la Tierra es de alrededor de unos 65 millones de años. Ahora bien, hoy en día sabemos que su estimación tuvo un error por dos razones: la presencia de isótopos radiactivos en el manto y la convección termal en estado sólido en el manto.

Flujo Periódico Unidimensional

La distribución de temperatura T a profundidades someras puede ser modelada como la conducción de calor en una dimensión. A continuación, la ecuación de Difusión sin fuente de calor unidimensional, con y dirección vertical positiva hacia abajo:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Un ejemplo de problema geológico que puede modelarse con la ecuación de difusión es la temperatura de una roca en función del tiempo, cuando un flujo de magma asciende a través de ella (el calor fluye desde el magma caliente hacia la roca, que está más fría; cuando el flujo magmático comienza la roca de la pared sufre un aumento repentino de su temperatura). También la solución de la ecuación se puede utilizar para determinar la estructura térmica de la litósfera oceánica, pues en la cima de una dorsal oceánica (ocean ridge) la roca mantélica caliente está sometida a una temperatura superficial fría; así a medida que el suelo marino se extiende desde la cima o cresta de la dorsal, las rocas cercanas a la superficie van perdiendo calor en el frío mar. Este enfriamiento de las rocas cercanas a la superficie forma la rígida litósfera oceánica. [Vean la parte de Ridges y el modelo de enfriamiento de la Litósfera Oceánica, en el apunte de cátedra Flujo Calor Parte II, págs. 53-66]

P1. ¿Cómo modelamos la ecuación para un semiespacio infinito que se encuentra a una temperatura mayor que la temperatura de la superficie? ¿Cuáles son las condiciones de borde en $t=0$, $t>0$, $y>0$, $y=0$, $y \rightarrow \infty$? ¿Cuál es la solución para la temperatura como una función dependiente del tiempo y la distancia?

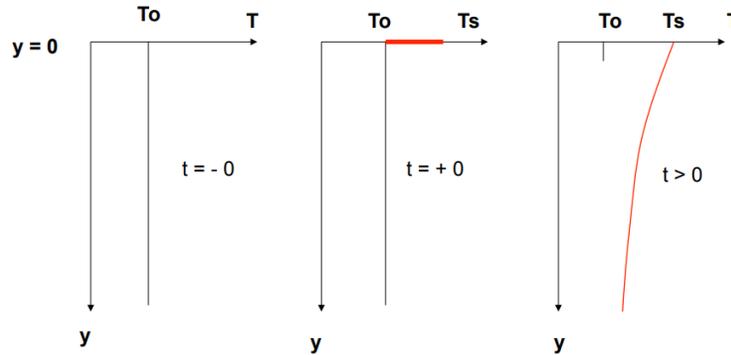


Figura Diapositiva n° 43 Cátedra Flujo de Calor Parte II. Modelo de enfriamiento de un semiespacio infinito

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

x	Hundredths digit of x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.00000	0.98872	0.97744	0.96616	0.95489	0.94363	0.93238	0.92114	0.90992	0.89872
0.1	0.88754	0.87638	0.86524	0.85413	0.84305	0.83200	0.82099	0.81001	0.79906	0.78816
0.2	0.77730	0.76648	0.75570	0.74498	0.73430	0.72367	0.71310	0.70258	0.69212	0.68172
0.3	0.67137	0.66109	0.65087	0.64072	0.63064	0.62062	0.61067	0.60079	0.59099	0.58126
0.4	0.57161	0.56203	0.55253	0.54311	0.53377	0.52452	0.51534	0.50625	0.49725	0.48833
0.5	0.47950	0.47076	0.46210	0.45354	0.44506	0.43668	0.42838	0.42018	0.41208	0.40406
0.6	0.39614	0.38832	0.38059	0.37295	0.36541	0.35797	0.35062	0.34337	0.33622	0.32916
0.7	0.32220	0.31533	0.30857	0.30190	0.29532	0.28884	0.28246	0.27618	0.26999	0.26390
0.8	0.25790	0.25200	0.24619	0.24048	0.23486	0.22933	0.22390	0.21856	0.21331	0.20816
0.9	0.20309	0.19812	0.19323	0.18844	0.18373	0.17911	0.17458	0.17013	0.16577	0.16149
1.0	0.15730	0.15319	0.14916	0.14522	0.14135	0.13756	0.13386	0.13023	0.12667	0.12320
1.1	0.11979	0.11647	0.11321	0.11003	0.10692	0.10388	0.10090	0.09800	0.09516	0.09239
1.2	0.08969	0.08704	0.08447	0.08195	0.07949	0.07710	0.07476	0.07249	0.07027	0.06810
1.3	0.06599	0.06394	0.06193	0.05998	0.05809	0.05624	0.05444	0.05269	0.05098	0.04933
1.4	0.04771	0.04615	0.04462	0.04314	0.04170	0.04030	0.03895	0.03763	0.03635	0.03510
1.5	0.03389	0.03272	0.03159	0.03048	0.02941	0.02838	0.02737	0.02640	0.02545	0.02454
1.6	0.02365	0.02279	0.02196	0.02116	0.02038	0.01962	0.01890	0.01819	0.01751	0.01685
1.7	0.01621	0.01559	0.01500	0.01442	0.01387	0.01333	0.01281	0.01231	0.01183	0.01136
1.8	0.01091	0.01048	0.01006	0.00965	0.00926	0.00889	0.00853	0.00818	0.00784	0.00752
1.9	0.00721	0.00691	0.00662	0.00634	0.00608	0.00582	0.00557	0.00534	0.00511	0.00489
2.0	0.00468	0.00448	0.00428	0.00409	0.00391	0.00374	0.00358	0.00342	0.00327	0.00312
2.1	0.00298	0.00285	0.00272	0.00259	0.00247	0.00236	0.00225	0.00215	0.00205	0.00195
2.2	0.00186	0.00178	0.00169	0.00161	0.00154	0.00146	0.00139	0.00133	0.00126	0.00120
2.3	0.00114	0.00109	0.00103	0.00098	0.00094	0.00089	0.00085	0.00080	0.00076	0.00072
2.4	0.00069	0.00065	0.00062	0.00059	0.00056	0.00053	0.00050	0.00048	0.00045	0.00043
2.5	0.00041	0.00039	0.00037	0.00035	0.00033	0.00031	0.00029	0.00028	0.00026	0.00025
2.6	0.00024	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00018	0.00017	0.00016	0.00015	0.00014
2.7	0.00013	0.00013	0.00012	0.00011	0.00011	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008
2.8	0.00008	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005	0.00004
2.9	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002
3.0	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001
3.1	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
3.2	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabla función error complementaria