

(Auxiliar 6)

PL1

Pruebe las siguientes expansiones

a) $e^z = e + e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^n$

Usando la expansión de $e^z = \sum_0 \frac{1}{n!} z^n$
pero para $z \rightarrow z-1$

$$\Rightarrow e^{(z-1)} = \sum_0 \frac{1}{n!} (z-1)^n$$

$$\Rightarrow e^z = e^{z-1} \cdot e \Leftrightarrow e^z = e \sum_0 \frac{1}{n!} (z-1)^n$$

Pero nos piden que la suma parte de $n=1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^z &= e \left[\frac{1}{0!} (z-1)^0 + \sum \frac{1}{n!} (z-1)^n \right] \\ &= e + e \sum \frac{1}{n!} (z-1)^n \end{aligned}$$

b) $\frac{1}{z} = \sum (-1)^n (z-1)^n$ para $|z-1| < 1$

Dado que $|z-1| < 1$, podemos usar la fórmula de la serie geométrica como:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{1-(-(z-1))} = \sum_0 (-1)^n (z-1)^n$$

c) $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$, para $|z+1| < 1$

Una forma de resolver esto es ver que $\frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z} \right) = \frac{1}{z^2}$

Como tenemos que $|z+1| < 1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{z} = \frac{1}{1-(z+1)} = \sum_0 (z+1)^n = 1 + \sum_1 (z+1)^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z} \right) &= \frac{1}{z^2} = \frac{d}{dz} \left(1 + \sum_1 (z+1)^n \right) \\ &= 0 + \sum_1 n(z+1)^{n-1} = \sum_0 (n+1)(z+1)^n \\ &= \boxed{1 + \sum_1 (n+1)(z+1)^n = \frac{1}{z^2}} \end{aligned}$$

P21 Sea f analítica en D

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

pdg.

$$\frac{1}{2\pi} \iint_D |f(z)|^2 dx dy = \sum_0^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(2n+2)}$$

Para trabajar la integral nos pasamos a las coordenadas polares

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_D |f(z)|^2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \\ &= \int_0^1 r \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) dr \end{aligned}$$

Si tomamos a $f(z) = \sum_0 a_n z^n$

$$\rightarrow f(re^{i\theta}) = \sum_0 a_n (re^{i\theta})^n = \sum_0 a_n r^n e^{in\theta}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |f(re^{i\theta})|^2 &= (a_0 + a_1 r e^{i\theta} + a_2 r^2 e^{2i\theta} + \dots)(a_0^* + a_1^* r e^{-i\theta} + a_2^* r^2 e^{-2i\theta} + \dots) \\ &= |a_0|^2 + a_0 a_1^* r e^{-i\theta} + a_0 a_2^* r^2 e^{-2i\theta} + a_1 a_0^* r e^{i\theta} + |a_1|^2 r^2 + a_1 a_2^* r^3 e^{-i\theta} + \dots\end{aligned}$$

Vemos que todos los términos de la suma, salvo los que son de la forma $|a_n|^2$, tienen un factor $e^{im\theta}$ con m un entero y sabemos que

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = 0, \text{ para } m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ al integrar $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ solo sobreviven los términos con

$|a_n|^2$ que están acompañados por r^{2n} y como no tienen dep. de θ sale un factor (2π)

$$\Rightarrow I_0 = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_0 |a_n|^2 r^{2n} \right) d\theta = 2\pi \sum_0 |a_n|^2 r^{2n}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \cdot r dr &= \int_0^1 \sum_0 |a_n|^2 r^{2n} \cdot r dr = \sum_0 |a_n|^2 \frac{r^{2n+2}}{2n+2} \Big|_0^1 \\ &= \sum_0 \frac{|a_n|^2}{2n+2}\end{aligned}$$

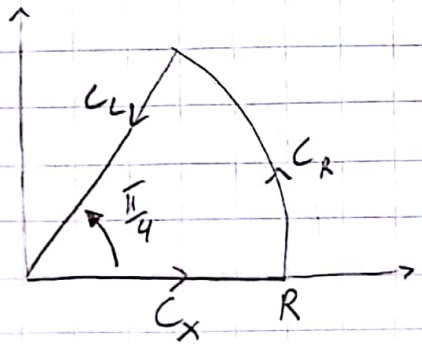
$$\therefore \frac{1}{2\pi} \iint_D |f(z)| dx dy = \sum_0 \frac{|a_n|^2}{2n+2}$$

P31

$$I = \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx, \quad t > 0$$

Para calcular esta integral nos planteamos resolver primero

$\oint_C e^{itz^2} dz \rightarrow$ y con C un contorno cerrado que pase por $[0, R]$ y luego tomar $\lim_{R \rightarrow \infty}$



$$\Rightarrow \oint_C e^{itz^2} dz = \int_{C_L + C_x + C_R} e^{itz^2} dz = 0$$

e^{itz^2} es analítica en C

$\Rightarrow C_R: z = R e^{i\theta}$

Para esta parte vemos si acotando encontramos algo

$$I_1 = \left| \int_{C_R} e^{itz^2} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{it(R e^{i\theta})^2} i R e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$= \left| \int_0^{\pi/4} e^{i t R^2 (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))} i R e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi/4} R e^{-t R^2 \sin(2\theta)} d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi/4} R e^{-t R^2 \frac{4\theta}{\pi}} d\theta$$

$$= \frac{1}{4tR} (1 - e^{-tR^2}) = I_1$$

① $z = R e^{i\theta}$
 $dz = i R e^{i\theta} d\theta$

② $|e^{i\theta}| = 1$
con $\theta \in \mathbb{R}$

③ $|\sin(2\theta)| \geq \frac{4\theta}{\pi}$
 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$\left. \begin{aligned} &(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 \\ &= \cos^2(\theta) + 2i \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad - \sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + i \sin(2\theta) \end{aligned} \right\}$

Sabemos que
 $\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}$
 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Vemos que si analizamos el caso $R \rightarrow \infty$, que es lo que necesitamos para la integral que buscamos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Como } \oint_C e^{itz^2} dz = 0 = \int_{z=x} e^{itz^2} dz + \int_{z=Re^{i\theta}} e^{itz^2} dz + \int_{z=Re^{i\frac{\pi}{4}}} e^{itz^2} dz$$

$$\Rightarrow \int_{z=x} e^{itz^2} dz = - \int_{z=Re^{i\frac{\pi}{4}}} e^{itz^2} dz$$

$$\text{Donde } \int_{z=x} e^{itz^2} dz = \int_0^R e^{itx^2} dx \quad ; \quad \int_{z=Re^{i\frac{\pi}{4}}} e^{itz^2} dz = \int_R^0 e^{itr^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^R e^{itx^2} dx &= - \int_R^0 e^{-tr^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \int_0^R e^{-tr^2} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot I_2(R) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ con $R \rightarrow \infty$ vemos que $I_2(\infty)$ es la integral gaussiana pero desde $x_0=0$ pero como es una fn. par

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tr^2} dr = 2 \int_0^{\infty} e^{-tr^2} dr \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-tr^2} dr = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} e^{itx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$P4) \left. \begin{array}{l} z_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{array} \right\}$$

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z(z+1)}$$

Primero separamos por frac. parciales

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z(z+1)} = \pi \cot(\pi z) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right)$$

$$z_0 = 0$$

Sabemos que $\cot(z)$ es una fn. impar en z por lo que la serie del primer termino

$$\frac{\cot(\pi z)}{z} \sim \sum_n a_n z^{2n}, \quad \cot(\pi z) \text{ se exp. en potencias impares y al div. por } z \text{ pasan a ser pares}$$

$\therefore$ el residuo del primer termino es nulo

$$\Rightarrow \text{usando } \cot(\pi z) \sim \left(\frac{1}{\pi z} + O(z) \right)$$

$$\rightarrow \frac{-\pi}{(z+1)} \left(\frac{1}{\pi z} + O(z) \right) \rightarrow \text{Res.} = -1$$

$$z_0 = -1$$

Como la $\cot(z)$ es una fn. periodica, con periodo π vemos que:

$$\cot(\pi z) = \cot(\pi z + \pi) = \cot(\pi(z+1))$$

$\Rightarrow$ Al expandir en torno a $z = -1$

El segundo termino $\rightarrow \frac{\pi \cot(\pi(z+1))}{z+1} \sim \sum_n b_n z^{2n}$

por el mismo argumento que para el 1- termino cuando $z_0=0$

$\Rightarrow$ su residuo es nulo

Pero al expandir en el 1- termino entorno a $z_0=-1$, vemos q

$$\frac{\pi}{z} \left(\frac{1}{\pi(z+1)} + O(z+1) \right) \Rightarrow \text{Res} = -1$$