

Auxiliar #4

P11
a) $S_n = \frac{1}{1+nz} \rightarrow 0 \quad \forall z / |z| \geq 2$

Tenemos que: $\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|1+nz|} < \varepsilon$

$\therefore$ Como $\varepsilon > 0 \rightarrow |1+nz| > \frac{1}{\varepsilon}$

Sabemos que $|a+b| \leq |a| + |b| \Rightarrow |1+nz| \leq 1 + |nz|$
pero $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow |1+nz| \leq 1 + n|z|$$

$$\Rightarrow 1 + n|z| \geq |1+nz| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow 1 + n|z| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{|z|}$$

$\therefore$ vemos que converge para $|z| \geq 2$

Ahora vemos que en este intervalo ($|z| \geq 2$) el valor más pequeño es cuando $|z| = 2$

$$\Rightarrow n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = N$$

por lo que vemos que S_n converge uniformemente para $n > N(\varepsilon)$

b) Si tenemos $\delta > 0 \Rightarrow$ el valor más grande para $\frac{1}{\epsilon} - 1$ en $|z| \geq \delta$ es cuando $|z| = \delta$

$\Rightarrow N(\epsilon, \delta) = \frac{1}{\delta} (\frac{1}{\epsilon} - 1) \Rightarrow S_n$ converge uniformemente para cualquier vecindad que excluya el valor $z=0$

Dado que δ puede ser arbitrariamente cercano a 0, se puede extender la región considerablemente

P21

$$a) S = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1$$

Tenemos que: 1) $\frac{1}{1^p} = \frac{1}{1^{p-1}}$

$$2) \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$3) \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \leq \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Donde vemos que } S &= \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \dots \\ &\leq \frac{1}{1^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \dots \\ &= (2^0)^{p-1} + (2^{-1})^{p-1} + (2^{-2})^{p-1} + \dots \end{aligned}$$

Por lo que podemos acotar la sumatoria S por la serie geométrica de $2^{n(p-1)} = g_n$

$$\text{Donde } \sum_{n=0}^{\infty} g_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$$

Dado que p es un valor, $p > 1$ vemos que la serie geométrica converge y por tanto la suma original no puede diverger por estar acotada superiormente por una serie convergente

$$\Rightarrow S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ con } p > 1 \text{ converge}$$

Por otro lado podemos ver que si $p \leq 1$ podemos trabajar análogamente

$$\Rightarrow S_{p \leq 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow \infty$$

Dado que para $p \leq 1$ la desigualdad que usamos se invierte

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} > \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad |z| \leq 1$$

$$\text{tenemos que } \left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \stackrel{|z| \leq 1}{\leq} \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Si tomamos $u_n = \frac{z^n}{n(n+1)}$ y $v_n = \frac{1}{n^2}$ para usar el criterio de comparación

y usando la parte a) para $p=2 \rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ converge

$\Rightarrow \sum |v_n|$ converge $\Rightarrow \sum |u_n|$ converge es decir

$\sum u_n$ converge absolutamente

P31

$$f(z) = \log(1+z)$$

a) $T_{z=0} \rightarrow$

$$f^{(0)}(z) = \log(1+z)$$

$$f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1}$$

$$f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(z) = -1(1+z)^{-2}$$

$$f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(z) = +2(1+z)^{-3} = 2!(1+z)^{-3}$$

$$f^{(3)}(0) = 2!$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n n! (1+z)^{-(n+1)} \rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

$$\text{Como: } f(z) = f^{(0)} + f^{(1)}z + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}z^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}z^3 + \dots$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

b) Sea $u_n = \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ el n -ésimo término

$\Rightarrow$ Utilizando el criterio de del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n z}{n+1} \right| = |z|, \text{ como el criterio nos pide que la razón sea menor que } 1$$

$\Rightarrow |z| < 1$ es la zona de convergencia

c) De a) tenemos que

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

→ con $z \rightarrow -z$

Ambas series son convergentes para $|z| < 1$

$$\Rightarrow \log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{z+1}{1-z}\right) = \log(z+1) - \log(1-z)$$

$$= \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots\right) - \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots\right)$$

$$= 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right)$$

$$= 2 \cdot \sum \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \text{ la cual converge para } |z| < 1$$

P41

a) $f(z) = \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, sabemos que $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(z) = \frac{1}{2i} \left[\sum \frac{(iz)^n}{n!} - \sum \frac{(-iz)^n}{n!} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_n [1 - (-1)^n] \frac{(i)^n z^n}{n!}$$

pero si n es un número par $1 - (-1)^n = 0$, por lo que podemos reemplazar n por $2n+1$ y $1 - (-1)^{2n+1} = 2$

$$\rightarrow \operatorname{sen}(z) = \frac{1}{2i} \sum_n 2 \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

pero $(i)^{2n+1} = (i)^{2n} \cdot i = (-1)^n i$

$$\rightarrow \sin(z) = \frac{1}{2i} \sum_n \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) para el caso de $\cos(z)$ vamos que en vez de tomar $n \rightarrow 2n+1$ vamos $n \rightarrow 2n$ y tenemos

$$\cos(z) = \sum_n (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

c) $\frac{\sin(tz)}{z}$, podemos exp. a series $\sin(z)$ como en a)

$$\rightarrow \frac{1}{z} \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

d) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos^2(tz)}{z^3} dz$

si aprovechamos el resultado de la parte b)

$$\begin{aligned} \rightarrow \cos^2(tz) &= \left(\sum_n (-1)^n \frac{z^{2n} t^{2n}}{(2n)!} \right)^2 = \left(1 - \frac{z^2 t^2}{2} + \frac{z^4 t^4}{4!} + \dots \right)^2 \\ &= 1 - \frac{z^2 t^2}{2} + \frac{z^4 t^4}{4!} - \frac{z^6 t^6}{6!} - \frac{z^2 t^2}{2} + \frac{z^4 t^4}{4} - \frac{z^6 t^6}{2 \cdot 4!} + \frac{z^4 t^4}{4!} - \frac{z^6 t^6}{2 \cdot 4!} \\ &= 1 - z^2 t^2 + z^4 t^4 \left(\frac{2}{4!} + \frac{1}{4} \right) - z^6 t^6 \left(\frac{2}{6!} + \frac{1}{4!} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{\cos^2(tz)}{z^3} dz = \underbrace{\oint \frac{dz}{z^3}}_{=0} - t^2 \underbrace{\oint \frac{dz}{z}}_{=2\pi i} + t^4 \left(\frac{2}{4!} + \frac{1}{4} \right) \underbrace{\oint \frac{z^4 dz}{z^3}}_{=0} - t^6 \left(\frac{2}{6!} + \frac{1}{4!} \right) \underbrace{\oint \frac{z^6 dz}{z^3}}_{=0}$$

$$\rightarrow \boxed{\oint_{|z|=1} \frac{\cos^2(tz)}{z^3} dz = -2\pi i t^2}$$

PS/

a) $\frac{1}{1-z} = f(z)$

veremos que la fn se comporta "Bien" hasta $z=1$, por lo que podemos exp. en torno a $z=0$ dentro de $|z| < 1$

Ahora como: $f^{(0)}(z) = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$

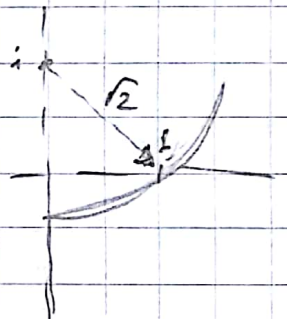
$$f^{(1)}(z) = (-1)(1-z)^{-2} \cdot -1 = (1-z)^{-2}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

$\therefore$ como $f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

$$\Rightarrow f(z) = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$



b) Dado que nos piden en $|z-i| < \sqrt{2}$

veremos que podemos escribir la función $\frac{1}{1-z}$ como:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-i}{1-i}}, \quad \text{tomando } \frac{z-i}{1-i} = w$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-w(z)} = \frac{1}{1-i} \cdot \sum_n w^n \\ &= \frac{1}{1-i} \cdot \sum_n \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n = \sum_n \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \end{aligned}$$