FI3002 - 1 Métodos Matemáticos de la Física **28 de septiembre de 2017**

Auxiliar 4

Profesor: *Andres Meza* Auxiliar: *Sergio Leiva*

$\boxed{\text{P1.}}$

a) Probar que la secesión $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}$ es uniformemente convergente a cero para todo z tal que $|z| \geq 2$.

b) ¿Se puede extender la región de convergencia uniforme de la parte a)?

$\boxed{\text{P2.}}$

a) Probar que

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{1^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge para cualquier valor de p $>$ 1.

b) Usando el resultado de a), probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ converge (absolutamente) para $|z| \leq 1$.

$\boxed{\text{P3.}}$ Sea $f(z) = \log(1+z)$, donde consideramos la rama que toma el valor cero cuando z=0.

a) Desarrollar f(z) en una serie de Taylor alrededor de z = 0.

b) Determinar la región de convergencia para la serie en a).

c) Desarrollar $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en una serie de Taylor alrededor de z = 0.

$\boxed{\text{P4.}}$ Calcular la expansión en serie de Taylor en torno a z = 0 para:

a) $f(z) = \sin z$

b) $f(z) = \cos z$

c) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

d) Hallar el valor numérico de $\oint_{|z|=1} \frac{\cos^2(tz)}{z^3} dz$, donde $t > 0$.

$\boxed{\text{P5.}}$ Muestre que:

a) $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1)$

b) $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \qquad (|z-i| < \sqrt{2})$