P1|

Auxiliar #2

$$I = \int_C \bar{z}\, dz \quad , \quad C: \; z = 2e^{i\theta}, \; \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Si tomamos la rep. de $z = 2e^{i\theta} \rightarrow \bar{z} = 2\,\overline{(e^{i\theta})}$

$\hookrightarrow dz = 2\cdot(e^{i\theta})'\, d\theta \rightsquigarrow \dfrac{d(e^{i\theta})}{d\theta} = (e^{i\theta})'$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\overline{e^{i\theta}}\cdot 2(e^{i\theta})'\, d\theta$$

Como $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) \Rightarrow \overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta)$

usando que $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}(\theta) \Rightarrow \overline{e^{i\theta}} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)$

$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad = \boxed{e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}}$

y previamente vimos que $\dfrac{d}{d\theta}(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}$

$\hookrightarrow$ en clase y en Aux.

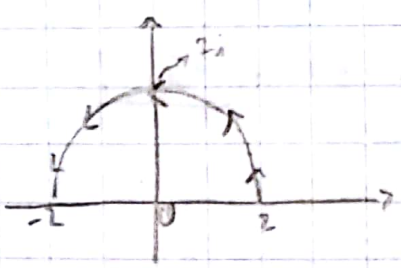
(usando $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ podemos encontrar este resultado)

$$\rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4i\, e^{-i\theta} e^{i\theta}\, d\theta = 4i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \boxed{4\pi i = I}$$

P2|

$$\int_C \frac{z+2}{z}\, dz$$

(a) $z = 2e^{i\theta} \; (0 \leq \theta \leq \pi)$



$$\Rightarrow \int_C \frac{z+2}{z}\, dz = \int_C \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz$$

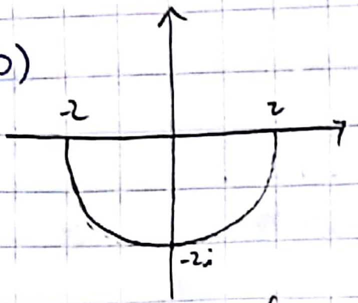
$$z = 2e^{i\theta} \rightarrow dz = 2ie^{i\theta}\, d\theta$$

$$\Rightarrow \; = \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta}\, d\theta \; = 2i\int_0^{\pi} (e^{i\theta}+1)\, d\theta$$

$$= 2i\left(\frac{e^{i\theta}}{i}+\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 2i\left(i+\pi+i\right)$$

$$\Rightarrow \int_{C_a} \frac{z+2}{z}\, dz = \underline{-4+2\pi i}$$

(b)



$\rightsquigarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi]$

$\Rightarrow$ Usando el desarrollo anterior

$$\int_{C_b} \frac{z+2}{z}\, dz = 2i\left(\frac{e^{i\theta}}{i}+\theta\right)\Bigg|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 4+2\pi i$$

(c) Para este caso tenemos que $\theta \in [0, 2\pi]$ donde podemos proceder de 2 formas:

1) $$\int_{C_c} \frac{z+2}{z}\, dz = \int_{C_a} \frac{z+2}{z}\, dz + \int_{C_b} \frac{z+2}{z}\, dz$$

$$= -4+2\pi i + 4+2\pi i = \underline{4\pi i}$$

2) $$\int_{C_c} \frac{z+2}{z}\, dz = 2i\left(\frac{e^{i\theta}}{i}+\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2i\left(\frac{e^{2i\pi}}{i} - \frac{e^{i0}}{i} + 2\pi - 0\right)$$

donde $e^{0\cdot i} = e^{2\pi i} \Rightarrow \int_{C_c} \frac{z+2}{z}\, dz = 2i\cdot 2\pi = \underline{4\pi i}$

P3) Si C_0 y C describen los círculos:

$$C_0 : \quad z = z_0 + Re^{i\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

$$C : \quad z = Re^{i\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

(a) Mostrar que $\displaystyle\int_{C_0} f(z-z_0)\,dz = \int_C f(z)\,dz$

Si usamos que $z = z_0 + Re^{i\theta}$ en la primera integral

$$\to \int_{C_0} f(z-z_0)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cancel{z_0} + Re^{i\theta} - \cancel{z_0})\,Rie^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\theta})\,Rie^{i\theta}\,d\theta$$

por otro lado si $z = Re^{i\theta} \to \displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\theta})\,Rie^{i\theta}\,d\theta$

$$\to \int_{C_0} f(z-z_0)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\theta})\,Rie^{i\theta}\,d\theta = \int_C f(z)\,dz$$

$$\to \int_{C_0} f(z-z_0)\,dz = \int_C f(z)\,dz$$

(b) Calcular:

$$I_1 = \int_C z^{a-1}\,dz \quad , \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$I_2 = \int_C \frac{dz}{z}$$

Partamos por I_1, con el cambio que define la curva C

$$\Rightarrow z = Re^{i\theta} \rightarrow dz = Ri\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_C z^{a-1}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} (Re^{i\theta})^{a} \cdot \cancel{(Re^{i\theta})^{-1}} \cdot i\,\cancel{(Re^{i\theta})}\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} i\,(Re^{i\theta})^{a}\,d\theta = iR^{a}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ia\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow I_1 = iR^{a}\left(\frac{e^{ia\theta}}{ia}\right)\Bigg|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = \frac{2iR^{a}}{a}\underbrace{\left(\frac{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}}{2i}\right)}_{= \operatorname{sen}(a\pi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{2iR^{a}}{a} \cdot \operatorname{sen}(a\pi)}$$

Vemos que si permitimos que $a=0 \Rightarrow I_1(a=0) = \int z^{-1}\,dz$

$$= \int \frac{dz}{z} = I_2$$

$$\Rightarrow I_1(a=0) = I_2$$

pero evaluar $a=0$ en $I_1 = \frac{2iR^{a}}{a}\operatorname{sen}(a\pi)$, no es directo dado que $I \propto \frac{1}{a}$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0} (I_1) = I_2 = \lim_{a\to 0} 2i \frac{R^a}{a} \operatorname{sen}(a\pi),$$

Y recordemos que $\lim_{a\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a\pi)\cdot\pi}{a\pi} = \pi\cdot 1$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0} (I_1) = 2i\, R^0\cdot\pi = \boxed{2i\pi = I_2}$$

✓✓

Por otro lado podríamos haber partido calculando I_2

$$\Rightarrow I_2 = \int_C \frac{dz}{z}, \quad z = Re^{i\theta} \to dz = Rie^{i\theta}\, d\theta$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}\, d\theta}{Re^{i\theta}} = i\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \boxed{2\pi i = I_2}$$

(c) Vemos que dados los resultados en (a) y en (b), mostrar lo que se pide es inmediato usando el cambio $z = z_0 + Re^{i\theta}$ dado que al reemplazar encontramos las mismas integrales.

P4) Sea F una fn: compleja y continua en $[a,b]$

Pruebe que:
$$\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|\,dt$$

•) Este resultado nos será útil en un par de semanas para calcular ciertas partes de los caminos de la curva C.

=> Dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que para cualquier partición del intervalo $[a,b]$, de tamaño $< \delta$, tenemos las siguientes 2 inecuaciones:

1) $$\left|\int_a^b F - \sum_{K=0}^{n-1} F(a_K)(a_{K+1}-a_K)\right| < \varepsilon$$

2) $$\left|\int_a^b |F| - \sum_{K=0}^{n-1} |F(a_K)(a_{K+1}-a_K)|\right| < \varepsilon$$

Recordando la desigualdad triangular → $|a+b| \leq |a| + |b|$

=> en 1) vemos que

$$\left|\int_a^b F\right| \leq \left|\sum_K F(a_K)(a_{K+1}-a_K)\right| + \varepsilon \leq \sum_K |F(a_K)| \underbrace{(a_{K+1}-a_K)}^{\text{Sup.} > 0} + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Combinando con 2)

$$\left|\int_a^b F\right| \leq \sum_K |F(a_K)|(a_{K+1}-a_K) + \varepsilon \leq \int_a^b |F| + 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ y muy pequeño $\Rightarrow$ $\boxed{\left|\int_a^b F\right| \leq \int_a^b |F|}$