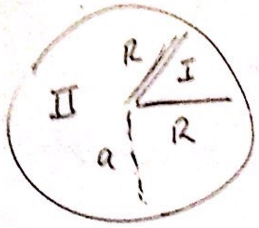
Pauta P1

1a) $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ $\quad \theta(0) = \frac{\pi}{4}$ $\quad \dot{\theta}(0) = \omega_0$



Tenemos dos circuitos: I y II. Analicemos I:

El flujo magnético que lo atraviesa es

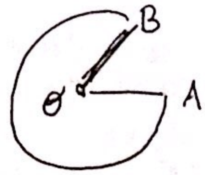
$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 \cdot \underbrace{\frac{a^2}{2}\theta}_{\text{Área}} \qquad (\hat{n} = \hat{z})$$

Y su cambio en el tiempo es $\dot{\Phi} = \frac{B_0 a^2}{2}\dot{\theta}$. Ahora consideramos la ley de Faraday: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2}{2}\dot{\theta}$. Entonces va a haber una corriente! Su dirección se encuentra al considerar la ley de Lenz:

Ley de Ohm: $\mathcal{E} = I \underbrace{R \cdot 2}_{2 \text{ resistencias!}}$

$$\Rightarrow I = \frac{-B_0 a^2 \dot{\theta}}{4R} \quad (1)$$

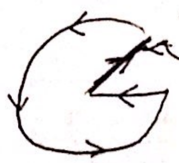
Ahora consideramos el circuito II:



El flujo cambia justo de manera opuesta al del circuito I (dado que el flujo del círculo total debe ser constante si $\vec{B}$ no depende del tiempo)

$$\Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{-B_0 a^2}{2}\dot{\theta} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{B_0 a^2}{2}\dot{\theta}$$

La dirección de la corriente será



Nos interesa esta línea! Es la única parte móvil.

$$\mathcal{E} = IR \cdot 2 \Rightarrow I = \frac{B_0 a^2 \dot{\theta}}{4R} \quad (2)$$

Para ambos circuitos la corriente a través de OB fluye en la misma dirección $\Rightarrow$ se suman. Esto toma en cuenta el efecto

Del campo sobre ambos circuitos, y es válido por el principio de superposición. Tenemos, entonces, $I = \frac{B_0 a^2 \dot{\theta}}{2R}$ (★) $I \nearrow$

Como hay un campo, va a haber una fuerza sobre $\overline{OB}$:

$$\vec{F} = I\int d\vec{l} \times \vec{B} \qquad d\vec{l} = \hat{r}\,dr \quad \text{(sentido de flujo de corriente es } \hat{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = I\int dr\, \hat{r} \times \hat{z} B_0 = I\int dr\,(-\hat{\theta}) B_0 = -\hat{\theta} B_0 I a = -\frac{B_0^2 a^3 \dot{\theta}\,\hat{\theta}}{2R}$$

Lo cual tiene sentido; la fuerza va en contra el movimiento de $\overline{OB}$.

El torque sobre $\overline{OB}$ lo calculamos como si la fuerza actuara solo sobre el centro de mesa de la barra

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} = -\frac{B_0^2 a^4 \dot{\theta}}{2R\cdot 2}\,\hat{r}\times\hat{\theta} = -\frac{B_0^2 a^4 \dot{\theta}}{4R}\,\hat{z} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(J\dot{\theta}\hat{z}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{B_0^2 a^4 \dot{\theta}}{4R} = \frac{d}{dt}(J\dot{\theta})$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-B_0^2 a^4 \dot{\theta}}{4RJ} \qquad u \equiv \dot{\theta} \Rightarrow \dot{u} = -\frac{B_0^2 a^4 u}{4RJ} \qquad \lambda \equiv \frac{B_0^2 a^4}{4RJ}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u = Ae^{-\lambda t}}_{A\text{: const. de integración}} \Rightarrow \dot{\theta} = Ae^{-\lambda t} \Rightarrow \theta = \underbrace{-\frac{A}{\lambda}}_{D} e^{-\lambda t} + C$$

$$\theta(t) = C + De^{-\lambda t} \qquad \theta(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = \frac{\pi}{4} - D$$

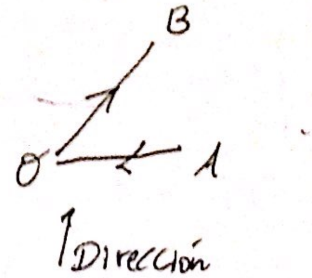
$$\dot{\theta}(0) = \omega_0 \Rightarrow -\lambda D = \omega_0 \Rightarrow D = -\frac{\omega_0}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{\lambda} - \frac{\omega_0}{\lambda}e^{-\lambda t} \qquad \text{Reemplazamos } \lambda = \frac{B_0^2 a^4}{4RJ} \quad J = \frac{1}{3}ma^2$$

$$\rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{4R\omega_0 m}{3B_0^2 a^2} - \frac{4R\omega_0 m}{3B_0^2 a^2}\exp\left[-\frac{3B_0^2 a^2}{4Rm}t\right]}$$

(b) Reemplazamos $\dot{\theta}$ en (★) para encontrar la corriente que fluye tanto por OA como por OB:

$$I = \frac{B_0 a^2 \dot{\theta}}{2R} = \frac{B_0^2 a^2}{2R}\left\{ w_0 \exp\left[\frac{-3B_0^2 a^2}{4Rm} t \right]\right\}$$



Faltan $\widehat{AB}$ y $\widehat{BA}$; aquí la corriente será la mitad de la calculada para OA y OB, pues el $\dot{\Phi}$ de cada circuito solo afecta a cada cable de manera individual. <u>OBS</u>: Se cumple la ley de Nodos (creo que así se llama; lo importante es que se conserva la carga).

(c) Si se coloca R_A uniformemente distribuida, cambian las ec. (1) y (2) de la página 1. Ahora la resistencia en I será $2R + \underbrace{\frac{\theta}{2\pi} R_A}_{\text{Pedazo de resistencia}}$

Región

$$\Rightarrow \quad I = \frac{-B_0 a^2 \dot{\theta}}{2\left(2R + \frac{\theta}{2\pi} R_A\right)}$$

. Mientras que en II, $2R + \frac{2\pi - \theta}{2\pi} R_A$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{B_0 a^2 \dot{\theta}}{2\left(2R + \frac{2\pi-\theta}{2\pi} R_A\right)}$$

$\Rightarrow$ La corriente total a través de OB es

$$\frac{B_0 a^2 \dot{\theta}}{2}\left[\frac{1}{2R + \frac{\theta R_A}{2\pi}} + \frac{1}{2R + R_A - \frac{\theta R_A}{2\pi}}\right] = \frac{B_0 a^2 \dot{\theta}}{2}\left[\frac{4R + R_A}{\left(2R + \frac{\theta R_A}{2\pi}\right)\left(2R + R_A - \frac{\theta R_A}{2\pi}\right)}\right]$$

Esto lleva a una EDO asquerosamente complicada, y no sé si se puede resolver. En fin, tendremos una respuesta no lineal en el sistema por culpa del cambio de R en cada circuito al cambiar θ, y se complica mucho más la cosa.

//