Resumen
Control 2

FI2002-6: Electromagnetismo
11 de octubre de 2017

Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Manuel Morales, Nicolás Valdés

No tuve tiempo para hacer tips esta vez. Pero como siempre, traten de ojalá entender, recordar, y manejar bien todas las ecuaciones que puse acá, llegar al control con calma, y pasarlo bien :) (y revisar sus unidades!)

1. Repaso

Hay algunos conceptos de electrostática que hay que recordar. Principalmente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \implies \mathbf{E} = -\nabla V \tag{1}$$

$$\implies \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} = 0 \tag{2}$$

Es decir, el campo eléctrico es conservativo, y se puede escribir como el gradiente de un potencial. Además, la integral de camino del campo sobre un camino cerrado es cero. La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ será

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} \tag{3}$$

El campo eléctrico producido por una distribución de cargas es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq \tag{4}$$

En especial, el campo producido por una carga puntual Q (o una esfera con carga Q distribuida de manera esféricamente simétrica) es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \tag{5}$$

2. Energía Electrostática y Condensadores

La energía electrostática en todo el espacio debido al campo eléctrico es

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |\mathbf{E}|^2 dV \tag{6}$$

Cuando hay un medio material (ver sección de dieléctricos) tenemos algo parecido:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV \tag{7}$$

Un condensador consiste en dos conductores que tienen carga opuesta. La capacitancia C de un condensador se define como

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{8}$$

Donde $\pm Q$ es la carga que se coloca en los conductores, y ΔV es la diferencia de potencial eléctrico entre ellos. Típicamente para encontrar la capacidad de un condensador, hay que imaginar que un conductor tiene carga Q, el otro $-Q$, y dado esto determinar ΔV (usando, por ejemplo, el campo eléctrico). Luego se tiene C. Si hay condensadores conectados en serie, la capacidad total (o efectiva) C_T del sistema será

$$\frac{1}{C_T} = \sum \frac{1}{C_i} \tag{9}$$

Donde C_i es la capacidad de cada condensador. Para condensadores conectados en paralelo,

$$C_T = \sum C_i \tag{10}$$

La energía contenida en un condensador es

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V \tag{11}$$

3. Dieléctricos

Cuando consideramos un campo eléctrico en un medio material, las cosas se complican un poco porque el campo re-orienta y redistribuye las moléculas en el material. Esta redistribución produce un nuevo campo eléctrico propio del material (y este campo en sí re-orienta nuevamente las moléculas, ad infinitum).

Para facilitarnos la vida definimos un vector polarización $\mathbf{P}$ como el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen en un material. Además, definimos un vector desplazamiento $\mathbf{D}$ como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{12}$$

Debido al vector polarización, van a haber *cargas de polarización*. Estas son densidades de cargas inducidas en el dieléctrico por culpa de un campo eléctrico externo (se polariza el dieléctrico), o quizás debidas simplemente a una polarización permanente en un material. Estas son las cargas inducidas en el material por culpa de la redistribución de moléculas. Si tenemos un material con bordes que tienen vector normal $\mathbf{n}$ que apunta hacia afuera, la densidad de carga de polarización superficial va a ser

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \tag{13}$$

Además puede haber una densidad de carga de polarización volumétrica, dada por

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{14}$$

Volviendo al vector desplazamiento: tomémosle la divergencia a $\mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} \\ &= \rho - \rho_p \\ &= \rho_l \end{aligned} \tag{15}$$

Donde ρ_l es la densidad de carga libre (densidad de carga, sin considerar las cargas de polarización). Esta es una ley de Gauss nueva, para el vector desplazamiento; es mucho más útil que la otra ley de Gauss cuando nos preocupamos por medios materiales, ya que la carga libre típicamente se conoce, pero las cargas de polarización no. En forma integral,

$$\oiint \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = Q_l \tag{16}$$

Las aplicaciones de esto son análogas a las de ley de Gauss con el campo eléctrico (planos, esferas, cilindros, líneas; situaciones con harta simetría).

Al igual que el campo eléctrico, el vector desplazamiento satisface condiciones de borde en la interfaz entre dos medios. Con la ley de Gauss se puede deducir que hay una discontinuidad en la componente de **D** perpendicular a la interfaz, si en ésta hay densidad de carga superficial libre σ_l:

$$D^{\perp}_{arriba} - D^{\perp}_{abajo} = \sigma_l \tag{17}$$

Además, va a haber una discontinuidad en la componente paralela a la superficie en el caso que **P** también tenga una discontinuidad:

$$D^{||}_{arriba} - D^{||}_{abajo} = P^{||}_{arriba} - P^{||}_{abajo} \tag{18}$$

Esto se deduce a partir de la definición de **D**, y del hecho que el campo eléctrico sea conservativo (y por lo tanto no tenga discontinuidad paralela a la superficie).

Hay algunos dieléctricos especiales que llamamos dieléctricos lineales; en estos, se cumple que el vector polarización producido en el material es proporcional al campo eléctrico: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$. Reemplazando esta expresión para **P** en la definición de **D**, tenemos que

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{19}$$

Donde $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ es la permitividad del dieléctrico. Un juego típico en dieléctricos lineales es encontrar **D** utilizando Gauss, luego conociendo ϵ determinar **E**, y finalmente encontrar **P** y las cargas de polarización (despejando **P** de la definición de **D**, y usando la definición de las cargas de polarización).

Si uno coloca un dieléctrico en un condensador, éste cambiará la capacidad del condensador (tiende a aumentarla). Esto se deduce a partir de lo siguiente: el dieléctrico hará que el campo eléctrico disminuya en un factor ϵ/ϵ_0 (deduzcan esto! Recuerden la definición de **D** en dieléctricos lineales), y por lo tanto el potencial va a disminuir en este mismo factor. Considerando la definición de capacitancia, se tiene que la capacitancia *aumenta* en este factor. Otra cosa: si uno coloca un dieléctrico en un condensador, va a haber una fuerza sobre el dieléctrico; el truco para calcular esta fuerza es calcular la energía del condensador con $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q^2/C$, y $C(x)$ dependerá de dónde está el dieléctrico (hay que calcular esta cantidad). Luego la fuerza sobre el dieléctrico será $F = -dU/dx$.

4. Corriente Eléctrica

Una corriente eléctrica I corresponde al movimiento de cargas.

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{20}$$

Esto quiere decir que si analizamos un punto (o línea o superficie), la intensidad de corriente a través del punto es igual a la cantidad de carga que atraviesa el punto, por unidad de tiempo. Definimos densidades superficial y volumétrica de corriente:

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}} \qquad \mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{dS_{\perp}} \tag{21}$$

Tenemos también que

$$I = \iint \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS} \tag{22}$$

Es decir, la corriente que atraviesa una superficie (la cantidad de carga que pasa la superficie por unidad de tiempo) se calcula utilizando la densidad de corriente volumétrica. Se tienen las siguientes relaciones útiles: $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, cuando hay cargas eléctricas en movimiento con velocidad **v**. Otra cosa: gracias a la conservación de carga, tenemos la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{23}$$

La ley de Ohm (es una ley empírica) nos dice que en un material, **J** es proporcional a **E**, con una constante de proporcionalidad σ llamada conductividad.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{24}$$

Otra versión de la ley relaciona la diferencia de potencial V entre dos puntos en un circuito, con la corriente I que fluye entre los puntos:

$$V = IR \tag{25}$$

Donde la constante R se llama resistencia; esto se puede tomar como la definición de resistencia.

5. Ley de Fuerza de Lorentz

La fuerza que siente una carga q con velocidad **v** en presencia de un campo eléctrico **E** y un campo magnético **B** (esto se define en la sección que sigue) es

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{26}$$

Esta ecuación puede llevar a trayectorias un poco exóticas (es culpa del producto cruz con la velocidad). Se puede ver también la fuerza magnética que se ejerce sobre un cable que porta corriente **I** (es como una extensión de lo de arriba):

$$\mathbf{F}_B = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl \tag{27}$$

6. Campo Magnético

La ley de Biot-Savart nos indica cómo calcular el campo magnético producido por una corriente I:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathbf{dl} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} \tag{28}$$

Calcular campos magnéticos utilizando esto es similar a lo que hacíamos para la ley de Coulomb con el campo eléctrico; determinar el vector **r** que indica dónde queremos *encontrar* el campo, y el vector $\mathbf{r'}$ que indica dónde está la *fuente* de corriente. El vector **dl** sigue el camino de la corriente. Hay análogos de esta ecuación para distribuciones superficiales y volumétricas. Por ejemplo,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} dS \tag{29}$$

Al igual que teníamos Gauss para calcular campos eléctricos con facilidad en situaciones simétricas, tenemos la ley de Ampère para calcular campos magnéticos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \iff \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = \mu_0 I_{enc} \tag{30}$$

A diferencia de Gauss, donde nos inventábamos una superficie imaginaria, lo que hacemos con Ampère es inventarnos un loop (un camino) imaginario, y vemos cuánta corriente atraviesa este camino. Las situaciones donde apaña la ley de Ampère son cables, planos, solenoides, y toroides.

Otra ley nueva de campo magnético es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{31}$$

Esta ecuación quiere decir, básicamente, que no hay "cargas" magnéticas (no hay monopolos magnéticos). Dado que la divergencia de **B** es cero, podemos definir un *potencial vector* **A** tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{32}$$

Hasta ahí lo dejo, no deberían entrar temas de potencial vector para este control.