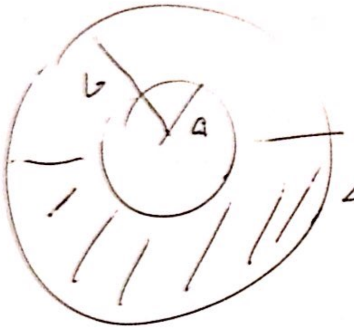
Pauta Aux I C2

P1 Conservación de carga $\Rightarrow I = -\frac{dq}{dt}$ (corriente que sale es igual a menos el cambio de la carga interior).

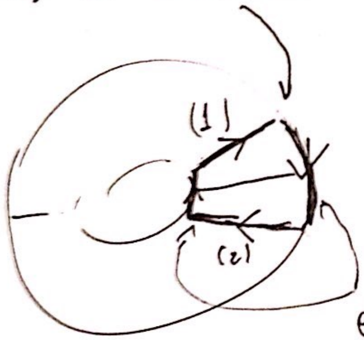


$$I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

solo fluye por abajo.

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ← vamos a usar gauss para $\vec{D}$, y despejar $\vec{E}$.

Primero, notamos que $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$; apunta radialmente, y no depende del ángulo. Para ver que no depende del ángulo, hacemos un camino cerrado:



$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ (conservativo)

V constante en cada conductor

$\Rightarrow -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \Delta V = 0$

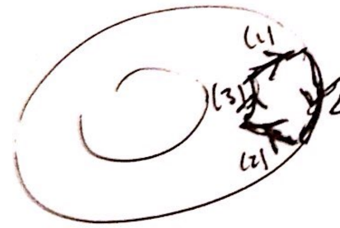
en los tramos que pasan por los conductores.

$\Rightarrow$ se cancelan (1) con (2)

La distancia de estos es igual $\Rightarrow \vec{E}$ es igual en (1) y (2)

$\Rightarrow \vec{E}$ no depende de θ.

Además, $\vec{E}$ no apunta en $\hat{\theta}$. Hacemos otro loop:



$\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

(1) se cancela con (2) por lo anterior

$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 = \int_{(3)} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

El campo en (3) solo apunta en $\hat{\theta}$

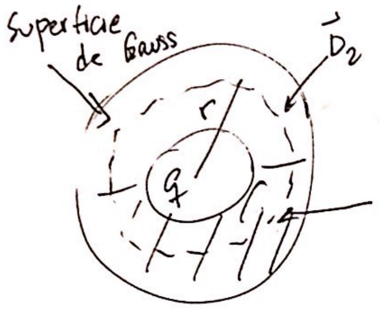
$\Rightarrow$ No puede tener componente en $\hat{\theta}$, por esto

Estamos convencidos, entonces, que $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$.

Ahora, $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon\,\vec{E}(\vec{r})$ en la zona interior; lo llamamos $\vec{D}_1$.

En la zona superior, no hay dieléctrico $\Rightarrow \vec{D}_2(\vec{r}) = \varepsilon_0\,\vec{E}(\vec{r})$.

$\vec{D}$ cambia entre los dos medios, pero sigue apuntando en $\hat{r}$, y dentro de cada región, sólo depende de r. Usemos Gauss:



$$\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q \leftarrow \text{(va cambiando en el tiempo)}$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_1 \vec{D}_1\cdot d\vec{S} + \iint_2 \vec{D}_2\cdot d\vec{S} =$$

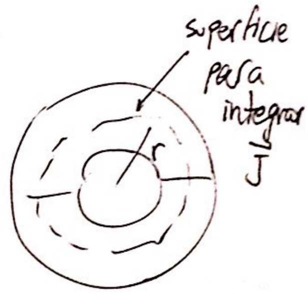
$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\!\!\int_{\pi/2}^{\pi}}_{1} D_1(r)\,\hat{r}\cdot\hat{r}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi + \underbrace{\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi/2}}_{2} D_2(r)\,\hat{r}\cdot\hat{r}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

(Notar límites de integración en θ). En cada integral, la superficie está a r constante $\Rightarrow D_1(r), D_2(r)$ son constantes

$$= D_1(r)\cdot 2\pi r^2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,d\theta + D_2(r)\cdot 2\pi r^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi r^2\left(D_1(r) + D_2(r)\right) = 2\pi r^2\left(\varepsilon E(r) + \varepsilon_0 E(r)\right) = 2\pi r^2 E(r)(\varepsilon+\varepsilon_0)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\,\hat{r}}{2\pi r^2(\varepsilon+\varepsilon_0)} \quad\Rightarrow\quad \vec{J} = \frac{\sigma q\,\hat{r}}{2\pi r^2(\varepsilon+\varepsilon_0)}$$



$$I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sigma q\,\hat{r}}{2\pi r^2(\varepsilon+\varepsilon_0)}\cdot\hat{r}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$\uparrow$ solo fluye corriente en la región inferior

$$= \frac{\sigma q}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)}\cdot 2\pi\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \frac{\sigma q}{\varepsilon+\varepsilon_0}$$

Ahora volvemos a $I = -\frac{dq}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma q}{\varepsilon + \varepsilon_0} = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow -\frac{\sigma\, dt}{\varepsilon+\varepsilon_0} = \frac{dq}{q} \quad / \int$$

$$\Rightarrow \frac{-\sigma t}{\varepsilon+\varepsilon_0} + C = \ln(q) \Rightarrow q = e^{-\sigma t/(\varepsilon+\varepsilon_0)} \cdot \underbrace{e^{C}}_{A}$$

$$\Rightarrow q = A e^{-\sigma t/(\varepsilon+\varepsilon_0)} \qquad q(0) = Q_0 \Rightarrow A = Q_0$$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/(\varepsilon+\varepsilon_0)}}$$

Energía disipada: $U_i - U_f$

cuando no queda carga $\Rightarrow U_f = 0$

$$U_i = \frac{1}{2} Q_0 V_0$$

$$V_0 = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{Q_0}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

gg Chile :(

Scanned by CamScanner

FI2002-04 Electromagnetismo
Profesor : Gonzalo Palma.
Auxiliares : Diego García, Esteban Rodríguez

Pauta P2 C2

06 de Noviembre de 2016

Para resolver el problema ocuparemos la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|} \tag{1}$$

Donde C es la curva descrita en el enunciado. En coordenadas polares:

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} \tag{2}$$

Además:

$$\vec{r} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{r'} = r'\hat{r} = (a + \frac{b\theta}{\pi})\hat{r} \tag{4}$$

Al insertar (2), (3) y (4) en (1) obtenemos:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{r^2 d\theta}{r^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \frac{b\theta}{\pi})}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4b} \ln \frac{(a+b)}{a}\hat{z} \tag{5}$$

Profesor: Mario Riquelme
Auxiliares: Samuel Giordano
Vincenzo Bassi

Pauta Control #2

Problema 1

a. Lo primero que hay que notar es que como se tienen dos zonas rellenas con un medio dieléctrico las cuales se encuentran entre dos placas paralelas, se puede considerar que cada una de estas zonas por si sola es un condensador. Además como ambos condensadores están al mismo potencial, se puede decir que están conectados en paralelo.
Llamando C_1 y C_2 a los condensadores rellenos con dieléctricos de constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente, se tiene que:

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 A/2}{d} = \frac{\epsilon_1 A}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 A/2}{d} = \frac{\epsilon_2 A}{2d}$$

De esta forma, como los condensadores están conectados en paralelo, se tiene que la capacitancia total del condensador es $C = C_1 + C_2$. Reemplazando C_1 y C_2 en la ecuación anterior se obtiene:

$$C = \frac{A(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2d}$$

b. Primero que todo, se encontrará alguna expresión para cada una de las **densidades de carga libre** en cada una de las superficies de la placa positiva del dieléctrico. Se supondrá que la placa superior está cargada positivamente y que la carga inferior está cargada negativamente.
Para buscar la expresión de la densidad superficial de carga libre se usa la ley de Gauss general: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$. Usando el teorema de la divergencia se encuentra que la ley de Gauss general en forma integral es:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

Ahora, se usarán las superficies gaussianas como se muestra en la **figura 1**, con el fin de obtener una expresión para las densidades de carga libre $\sigma_{l,1}$ y $\sigma_{l,2}$.

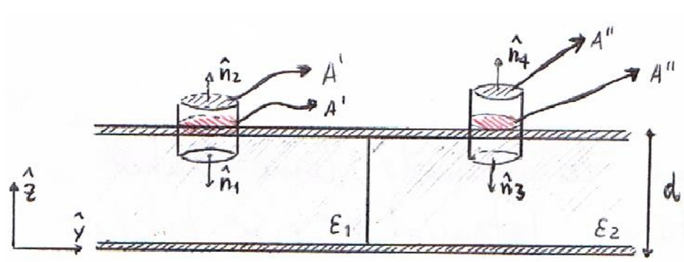


Figura 1: Superficies gaussianas.

Para el cilindro gaussiano del lado izquierdo, se tiene que:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{D}_{exterior} \cdot A'\hat{n}_1 + \int_S \vec{D}_1 \cdot A'\hat{n}_2 = 0 + \vec{D}_1 \cdot A'\hat{n}_2 = Q_{libre} = \sigma_{l,1} \cdot A'$$

De esta forma se obtiene que:

$$\sigma_{l,1} = \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2$$

Para el cilindro gaussiano del lado derecho, se obtiene que:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{D}_{exterior} \cdot A'\hat{n}_4 + \int_S \vec{D}_2 \cdot A'\hat{n}_3 = 0 + \vec{D}_2 \cdot A'\hat{n}_3 = Q_{libre} = \sigma_{l,2} \cdot A'$$

De esta forma se obtiene que:

$$\sigma_{l,2} = \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_3$$

Así, para finalizar el problema basta con encontrar los vectores $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$ y reemplazarlos en las fórmulas encontradas para las densidades de carga libre. Es sabido que los desplazamientos vienen dados por $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$ y $\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$.
Se calculará en primera instancia $\vec{E}_1$

. Suponiendo que las aristas de las placas son mucho mayores que d se pueden despreciar los efectos de borde y se puede afirmar que $\vec{E}_1 = E_1\hat{z}$. Luego, como la diferencia de potencial entre las placas viene dada por V_0 se tiene que:

$$V_0 = -\int_d^0 E_1\hat{z} \cdot (-dz\hat{z}) = -\int_0^d E_1 dz = -E_1 d$$

Luego, despejando E_1 y agregándole la dirección $\hat{z}$ se obtiene que

$$\vec{E}_1 = -\frac{V_0}{d}\hat{z}$$

Análogamente se encuentra que:

$$\vec{E}_2 = -\frac{V_0}{d}\hat{z}$$

Así, se tiene que $\vec{D}_1 = -(\epsilon_1 V_0/d)\hat{z}$ y $\vec{D}_1 = -(\epsilon_2 V_0/d)\hat{z}$.
Finalmente, se tiene que:

$$\sigma_{l,1} = -\frac{\epsilon_1 V_0}{d}\hat{z} \cdot (-\hat{z}) = \frac{\epsilon_1 V_0}{d}$$
$$\sigma_{l,2} = -\frac{\epsilon_2 V_0}{d}\hat{z} \cdot (-\hat{z}) = \frac{\epsilon_2 V_0}{d}$$

Problema 2

a. Para calcular la resistencia eléctrica entre las dos placas, se usará la ley de Ohm en forma macroscópica, es decir, la siguiente fórmula:

$$R = \frac{V}{I}$$

en donde V es la diferencia de potencial entre las dos placas e I es la intensidad de corriente eléctrica que circula entre la dos placas. Primero que todo suponiendo un estado estacionario, se tiene que la ecuación de continuidad toma la forma $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Como se desprecian los efectos de borde en el problema, se puede suponer por isotropía que $\vec{J} = J\hat{z}$. Luego, de la ecuación de continuidad se concluye que $J = Cte$.