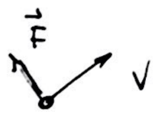
Pauta Aux 7

P1

a) $\times \vec{B}$



$\vec{F} \perp$ a $\vec{v}$

$\Rightarrow$ no cambia la rapidez, sólo la dirección.

Rapidez cte. y fuerza perpendicular a la velocidad $\Rightarrow$ movimiento circular uniforme.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}$$

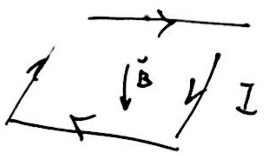
Aceleración centrípeta

$$\Rightarrow qvB = \frac{mv^2}{R}$$

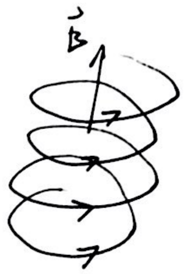
$$\Downarrow$$

$$\boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$

b)



Hacia abajo



En solenoide hacia arriba, por la regla de la mano derecha.

c) <u>No</u> se aplica, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, $\nabla \cdot \vec{J} \neq 0$. (No hay corriente estacionaria)

d) Si $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, y creamos un nuevo potencial vector $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda$ (con λ alguna función continua, etc.), el campo producido por $\vec{A}'$ es

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \lambda}_{0} = \vec{B}$$

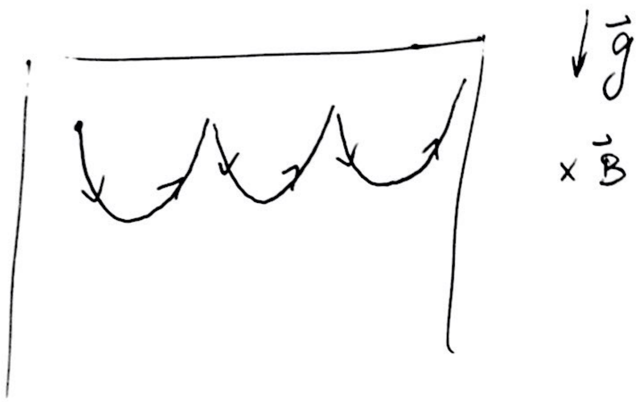
$\Rightarrow$ el potencial $\vec{A}$ que corresponde a $\vec{B}$ no es único; se le puede agregar el gradiente de una función escalar y no cambia $\vec{B}$.

Para potencial eléctrico, el único cambio que podíamos hacer era agregar una constante.

e) $\underbrace{\nabla \cdot \vec{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Esto indica, aprox., cuánta corriente sale de una región ($\iiint \nabla \cdot \vec{J} \, dV = \oiint \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$), lo cual corresponde a que carga salga de ahí (cuando $\nabla \cdot \vec{J}$, I positivos), que es igual a $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (porque ρ disminuye cuando $I > 0$). Conservación de carga.

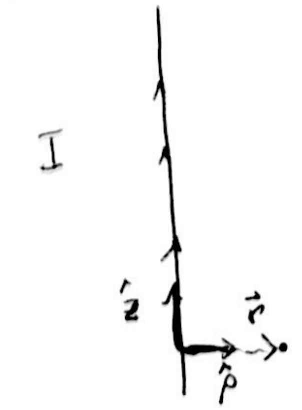
f)



g) $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (B_0 z \hat{z}) = B_0 \neq 0 \Rightarrow$ no es posible.

Scanned by CamScanner

P2



Con ley de Biot - Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

Usamos coordenadas cilíndricas

$\Rightarrow \vec{r} = \rho \hat{\rho}$ (no le damos altura ya que el alambre es infinito $\Rightarrow \vec{B}$ no depende de z)

$\vec{r}\,' = z\hat{z}$, $z \in (-\infty, \infty)$. $d\vec{l}\,' = dz\,\hat{z}$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = \rho\hat{\rho} - z\hat{z}$ $\quad \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3 = (\rho^2 + z^2)^{3/2}$

$d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = dz\,\hat{z} \times (\rho\hat{\rho} - z\hat{z}) = \rho\, dz\, (\hat{z} \times \hat{\rho}) = \hat{\phi}\,\rho\, dz$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\phi}\rho\, dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Integramos sobre z $\Rightarrow \hat{\phi}$ y ρ no cambian

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \rho \hat{\phi}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$z = \rho \tan\theta \quad dz = \rho \sec^2\theta\, d\theta$

$z = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, $z = -\infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \rho \hat{\phi}}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2\theta\, d\theta}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2\theta)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \hat{\phi}}{4\pi\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\, d\theta = \frac{\mu_0 I \hat{\phi}}{4\pi\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{\phi}}{2\pi\rho}}$$

Ahora, con Ampère: gracias a la regla de la mano derecha, hacemos el ansatz $\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r})\,\hat{\phi}$. Gracias a la simetría rotacional, y traslacional en z, $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\,\hat{\phi}$.

Ampère: $\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}$. Hacemos un loop circular de radio ρ, con centro en el eje del alambre:

const. en el loop

$\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint B(\rho)\hat{\phi} \cdot \rho\, d\phi\, \hat{\phi}$

$= \underline{B(\rho) \cdot 2\pi\rho}$

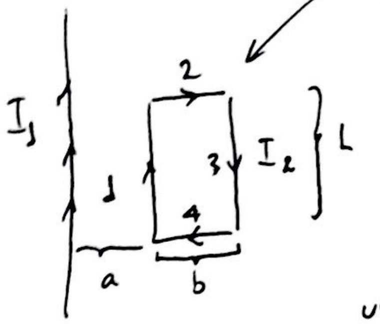
$\underline{I_{enc} = I}$

$\Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \hat{\phi}}{2\pi\rho}}$

Ahora vamos a aplicar esto a la siguiente situación:

Fuerza sobre esto?



Primero, sabemos por la 3ra ley de Newton que el loop no va a ejercer fuerza neta sobre sí mismo ⇒ a pesar de que I_2 produce un campo magnético, podemos ignorarlo en nuestro análisis.

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ ← Fuerza sobre cada parte del loop.

$$\vec{F}_1 = I_2 \int d\vec{l} \times \vec{B}(a) = I_2 \int d\vec{l} \times \frac{\mu_0 I_1 \hat{\phi}}{2\pi a}$$

$d\vec{l} = dz\,\hat{z}$ en 1

$\hat{z} \times \hat{\phi} = -\hat{\rho}$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{-\mu_0 I_1 I_2 \hat{\rho}}{2\pi a} \int_0^L dz = \frac{-\mu_0 L I_1 I_2 \hat{\rho}}{2\pi a}$$

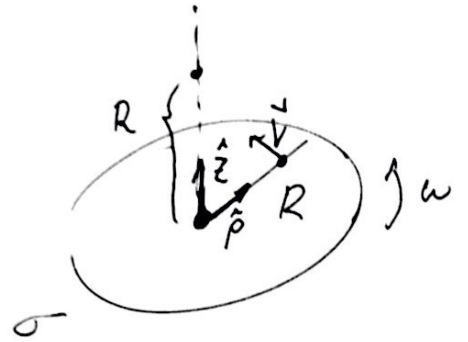
$\vec{F}_3$ es análogo, sólo que con $\vec{B}(a+b)$, y con I_2 en dirección opuesta

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = \frac{\mu_0 L I_1 I_2 \hat{\rho}}{2\pi (b+a)}$$

$\vec{F}_2$ con $\vec{F}_4$ se cancelan, ya que tienen corrientes que fluyen en direcciones opuestas, y sólo tienen diferencia de altura, pero $\vec{B}$ no depende de la altura.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi} \hat{\rho} \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a} \right)}$$

P3



Vamos a tener una densidad de corriente superficial $\vec{K}$.

$\vec{K} = \sigma \vec{v}$ ← velocidad de un elemento de carga dq en el disco.

$\vec{v} = \omega r \hat{\phi}$ ← va girando; tiene solo velocidad angular

$\Rightarrow \vec{K} = \sigma \omega r \hat{\phi} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} da = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{4\pi} \int \frac{r \hat{\phi} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} da$ ← $r\,d\phi\,dr$

$\vec{r} = R\hat{z} \quad \vec{r}\,' = r\hat{\rho} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \int \frac{r\hat{\phi} \times (R\hat{z} - r\hat{\rho})}{(r^2 + R^2)^{3/2}} \cdot r \, d\phi \, dr$

Integral 1: $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{4\pi} \int \frac{r^2 \hat{\phi} \times \hat{z}}{(r^2 + R^2)^{3/2}} d\phi \, dr$

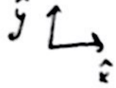
Pero $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$, y la integral de $\hat{\rho}$ sobre ϕ es $0 \Rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = 0$.

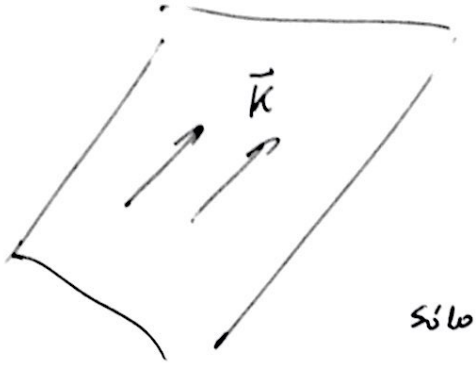
(perdón xD)

$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \int \frac{r^3 \hat{\phi} \times \hat{\rho}}{(r^2 + R^2)^{3/2}} d\phi \, dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \hat{z} \int_0^R \frac{r^3 \, dr}{(r^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi$

$= \frac{\mu_0 \sigma \omega \hat{z}}{2} \cdot \frac{1}{2} (3\sqrt{2} - 4) R = \boxed{\frac{\mu_0 \sigma \omega R}{4} (3\sqrt{2} - 4) \hat{z}}$

P4





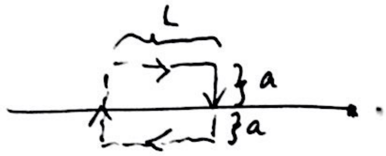
Vista de lado: ______________

Ansatz: sobre el plano, $\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r})\,\hat{x}$
$= B(y)\,\hat{x}$

Sólo puede depender de la altura por simetría, y apunta en $\hat{x}$ por la regla de la mano derecha y por simetría.

Además, $B(-y) = -B(y)$; esto también se puede ver con regla de la mano derecha, y simetría.

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}$ Hacemos el siguiente loop:



$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \int_0^L B(a)\,dx + -\int_0^L B(-a)\,dx + 0 \leftarrow$ los lados en $\hat{y}$ no contribuyen

$= 2B(a)\cdot L$

$I_{enc} = \int \vec{K}\cdot d\vec{l}_\perp = KL \Rightarrow 2B(a)\,L = \mu_0 K L$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2}\,\hat{x}, & y > 0 \\ -\frac{\mu_0 K}{2}\,\hat{x}, & y < 0 \end{cases}}$$