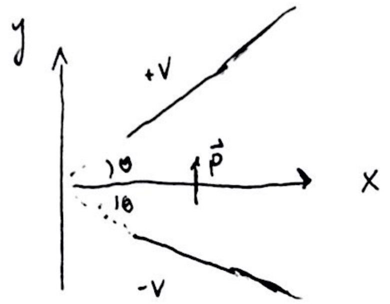
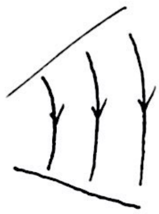
Pauta Aux 6

P1

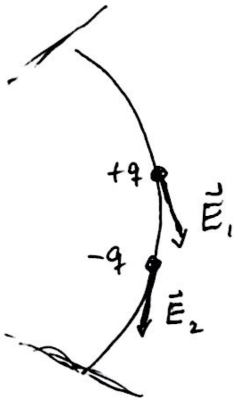


Las líneas de campo de las placas conductoras se ven así:



Esto es por
1) Simetría
2) $\vec{E}$ normal a la superficie de un conductor.

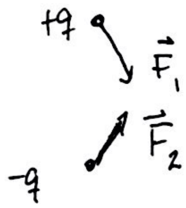
Hagamos zoom:

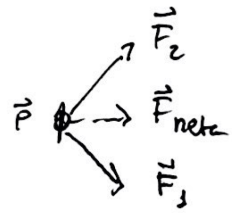


(Campo eléctrico es tangente a las líneas de campo en cada punto).

Fuerza sobre $+q$: $q\vec{E}_1$. Fuerza sobre $-q$: $-q\vec{E}_2$

$\Rightarrow$ Tenemos

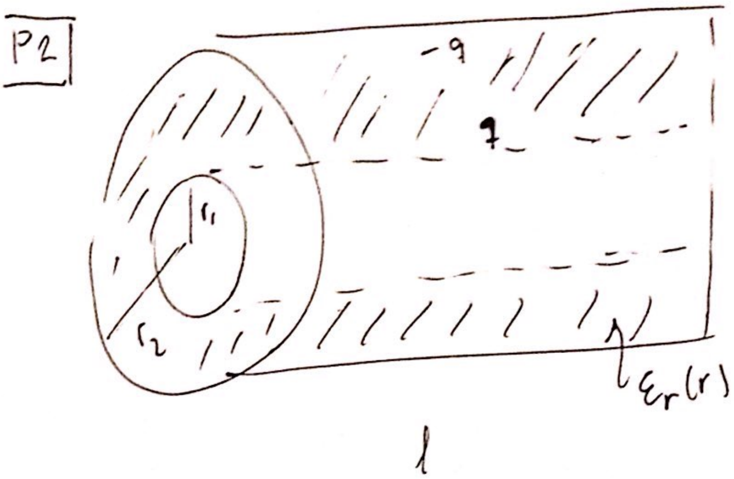




Hacia la <u>derecha</u>.

Nota: Aquí asumí que la presencia del dipolo tiene efectos despreciables sobre la distribución de cargas en cada placa (entonces no cambian las líneas de campo).

P2



$l >> r_1, r_2$

$\Rightarrow$ Los tratamos como cilindros infinitos

(a)

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
$= \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

Ley de Gauss para $\vec{D}$: $\oint\!\!\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \underbrace{Q_l}_{\text{carga libre}}$

Al igual que con Gauss para $\vec{E}$, aquí por la simetría del problema (simetría cilíndrica + dieléctrico isótropo), tenemos $\vec{D} = D(r)\,\hat{r}$

$\Rightarrow$ Colocando una superficie de Gauss cilíndrica a un radio r t.q.

$r > r_1$, $r < r_2$, tenemos $\oint\!\!\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) \cdot 2\pi r l = q$

$\Rightarrow D(r) = \dfrac{q}{2\pi r l}$. El campo eléctrico, por enunciado, no depende de

r. $\vec{D}(r) = \varepsilon \vec{E}(r) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}(r) \Rightarrow \vec{E}(r) = \dfrac{\vec{D}(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(r)} = \text{Constante} = c$

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi r l} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = c \Rightarrow \varepsilon_r(r) = \frac{q}{2\pi l \varepsilon_0 c} \cdot \frac{1}{r} \equiv \boxed{\frac{\overset{\text{Const.}}{\alpha}}{r}}$$

De esta manera, $\vec{E}$ no depende de r.

(b) $Q = C|V| \Rightarrow C = \dfrac{Q}{|V|}$ Aquí cada conductor tiene magnitud de carga q. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre ellos?

$$V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\vec{D}\, r}{\varepsilon_0 \alpha} = \frac{q\,\hat{r}}{2\pi \varepsilon_0 \alpha l} \quad (\text{const.})$$

$$\Rightarrow V = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \alpha l} \big(\underbrace{r_1 - r_2}_{<0}\big) \Rightarrow |V| = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \alpha l} (r_2 - r_1)$$

Entonces, $C = \dfrac{q}{\left(\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 \alpha l}(r_2 - r_1)\right)} = \boxed{\dfrac{2\pi\varepsilon_0 \alpha l}{r_2 - r_1}}$

(c) $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \qquad \rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$

¿Cómo encontramos $\vec{P}$? Recordemos que $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{q\hat{r}}{2\pi r l} - \frac{q\hat{r}}{2\pi\alpha l} = \frac{q\hat{r}}{2\pi l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Van a haber dos densidades superficiales de cargas de polarización: una en $r = r_1$, otra en $r = r_2$ (los dos extremos superficiales del dieléctrico). El vector $\hat{n}$ apunta hacia fuera del dieléctrico $\Rightarrow$ en r_1, $\hat{n} = -\hat{r}$, mientras que en r_2, $\hat{n} = \hat{r}$.

$$\Rightarrow \sigma_p(r_1) = \boxed{\frac{-q}{2\pi l}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\alpha}\right)} \qquad \sigma_p(r_2) = \boxed{\frac{q}{2\pi l}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

En cuanto a ρ_p, tenemos $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r P_r\right) = -\frac{1}{r}\cdot\frac{q}{2\pi l}\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)$

$$= -\frac{1}{r}\cdot\frac{q}{2\pi l}\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \boxed{\frac{q}{2\pi l \alpha r}}$$

(d) Carga total de polarización $= \underbrace{q(r_1) + q(r_2)}_{\text{superficial}} + \underbrace{Q}_{\text{volumétrica}}$

$$q(r_1) = \iint \sigma_p(r_1)\, dS = \iint \sigma_p(r_1)\cdot r_1\, d\theta\, dz = \sigma_p(r_1)\cdot 2\pi r_1 l$$

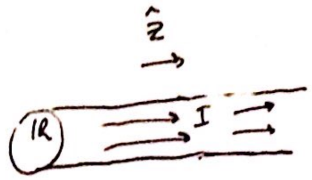
$$\Rightarrow q(r_1) = -q\left(1 - \frac{r_1}{\alpha}\right). \quad \text{Análogo,} \quad q(r_2) = q\left(1 - \frac{r_2}{\alpha}\right)$$

$$Q = \iiint \rho_p(r)\, dV = \iiint \frac{q}{2\pi l \alpha r}\cdot r\, dr\, d\theta\, dz = \frac{q}{2\pi l\alpha}\cdot 2\pi l(r_2 - r_1) = \frac{q}{\alpha}(r_2 - r_1)$$

$\Rightarrow q(r_1) + q(r_2) + Q = \boxed{0}$ Lo cual tiene sentido ya que el dieléctrico es neutro; las densidades de carga de polarización sólo son redistribuciones de las moléculas que forman el dieléctrico, pero la carga neta sigue siendo 0.

P3

(a)

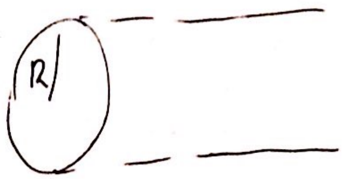


$\vec{J} = \kappa r \hat{z}$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint \kappa r \hat{z} \cdot \hat{z}\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \iint \kappa r^2 d\theta\, dr = \boxed{\frac{2\pi R^3}{3}}$$

(b)



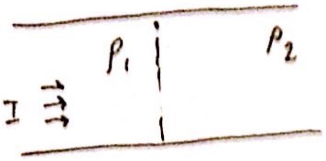
$$K = \frac{dI}{d\ell_\perp}$$ Largo perpendicular al flujo de la corriente.

En este caso, $\ell_\perp = 2\pi R \Rightarrow \boxed{K = \frac{I}{2\pi R}}$

Si $J = \frac{\alpha}{r}$, $\quad I = \iint \frac{\alpha}{r}\, dS = \iint \frac{\alpha}{r}\, r\, d\theta\, dr = 2\pi R \alpha$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{I}{2\pi R} \Rightarrow \boxed{J = \frac{I}{2\pi R r}}$$

P4



Sección A perpendicular al flujo $\Rightarrow$ hay una densidad de corriente volumétrica

$J = \frac{I}{A}$. Sabemos que $J = \sigma E = \frac{1}{\rho} E$

$\Rightarrow$ Dividiendo en las dos secciones, $J_1 = \frac{1}{\rho_1} E_1$, $J_2 = \frac{1}{\rho_2} E_2$.

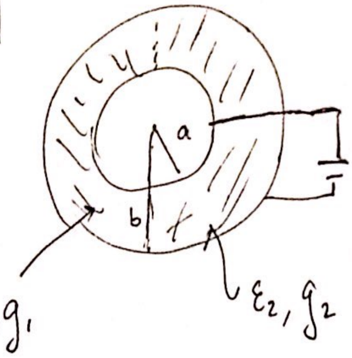
Pero por conservación de carga, las cargas que salen del lado izq. llegan al lado derecho $\Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow J_1 = J_2 \equiv J$.

Entonces $\frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2}$. Ahora, por condiciones de borde en la superficie, si se acumula una densidad de carga superficial σ, hay una discontinuidad en el campo: $E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 (E_2 - E_1)$

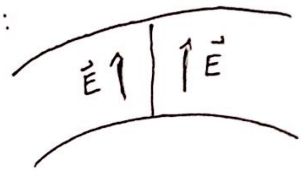
$$\Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 (\rho_2 J - \rho_1 J) = \varepsilon_0 \left(\rho_2 \cdot \frac{I}{A} - \rho_1 \cdot \frac{I}{A}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{\varepsilon_0 I}{A}(\rho_2 - \rho_1)} \quad (Q = \sigma A)$$

P5



(a) El campo paralelo a la superficie es continuo, y como es un campo radial, va a ser igual en las dos zonas:
(No depende del ángulo).



Además, no puede tener componente angular, ya que si la tuviera, podríamos tomar el siguiente camino cerrado:

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \neq 0$ si hay componente en $\hat{\theta}$.

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$$

Separamos la superficie Gaussiana (esférica) en dos, la mitad de una esfera para cada región (ya que si bien $\vec{E}$ es igual en ambas regiones, $\vec{D}$ no lo es).

$$\Rightarrow \oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_1 \vec{D}\cdot d\vec{S} + \iint_2 \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 D_1 + 2\pi r^2 D_2 = Q$$

$$D = \varepsilon E \Rightarrow 2\pi r^2 (\varepsilon_1 E + \varepsilon_2 E) = Q \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q\,\hat{r}}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}$$

(En $r<a$, $r>b$, $\vec{E}=0$).

(b) $$\Delta V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = \boxed{\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

(c) $$I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{J}_1 = g_1\vec{E}, \quad \vec{J}_2 = g_2\vec{E}$$

$$\Rightarrow I = \iint_1 g_1\vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_2 g_2\vec{E}\cdot d\vec{S} = \boxed{\left(\frac{g_1+g_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right) Q}$$

(d) $$V = IR \Rightarrow R = \frac{V}{I} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{2\pi(g_1+g_2)}}$$