



Resumen y Tips

Control 1

FI2002-6: Electromagnetismo
30 de agosto de 2017

Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Manuel Morales, Nicolás Valdés

Hagan la prueba con calma y traten de pasarlo bien :). Mucha suerte!

1. Resumen

1.1. Intro

Existe una fuerza, parecida a la gravedad, que se produce entre dos partículas con carga. ¿Qué es carga? No sé, es el nombre que le damos a esta propiedad de algunas partículas que produce una interacción entre ellas¹. La ley de Coulomb nos dice que la fuerza que ejerce una partícula con carga q_1 (en posición $\mathbf{r}_1$) sobre otra con carga q_2 (en $\mathbf{r}_2$) es:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1)$$

Cosas importantes: es proporcional al producto de las cargas. Si hay dos cargas de igual signo, se repelen, mientras que tienen signo opuesto, se atraen (verifiquen esto con la ecuación de arriba). Además, es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado entre las cargas.

En electro, en vez de preocuparnos por esta fuerza, nos abstraemos un poco y pensamos en el concepto de *campo eléctrico*.

1.2. Campo Eléctrico

El campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un punto $\mathbf{r}$, producido por una carga puntual q que se encuentra en un punto $\mathbf{r}'$, es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2)$$

Entonces comparando con la ley de Coulomb, vemos que si $\mathbf{E}$ es el campo producido por q_1 , entonces la fuerza que ejerce q_1 sobre q_2 es $\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2)$. Vemos que el campo eléctrico será mejor que la fuerza de Coulomb, ya que nos permite calcular la interacción de un sistema de cargas con cualquier carga que pongamos, en cualquier lugar.

Un principio bacán y súper importante es el principio de superposición: dice que si tenemos una carga que produce un campo $\mathbf{E}_1$, y otra que produce un campo $\mathbf{E}_2$, el campo eléctrico total será $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Con este principio podemos calcular el campo eléctrico que producen muchas cargas puntuales:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{q'} q' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3)$$

Aquí sólo estamos haciendo una suma sobre todas las cargas puntuales que podrían contribuir a el campo eléctrico en un punto $\mathbf{r}$. Cada una de estas cargas q' tiene su propia posición $\mathbf{r}'$. Entonces el vector $\mathbf{r}$ se mantiene fijo dentro de la sumatoria, mientras que $\mathbf{r}'$ cambia, ya que describe la posición de cada carga.

¹Y con la ley de Coulomb, experimentalmente podemos medir cuánta carga tiene cada cosa. Algunas cosas interesantes: hay cargas positivas y negativas, la carga total en un sistema se conserva, y la naturaleza nos entrega cargas discretas, no continuas.

Para una *distribución continua* de cargas, el tema es parecido. Sólo reemplazamos q' por dq' , ya que tenemos cargas infinitesimales, y reemplazamos la sumatoria por una integral :D.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4)$$

Al igual que para el caso discreto, $\mathbf{r}$ se mantiene fijo dentro de la integral, mientras que $\mathbf{r}'$ cambia.

Pueden haber distintos tipos de distribuciones de carga continua. Pueden ser líneas (o curvas), superficies, o volúmenes. La forma del diferencial de carga dq' va a depender del tipo de distribución; para distribuciones como líneas, usamos $dq' = \lambda dl'$, donde λ es la densidad de carga lineal. Del mismo modo, $dq' = \sigma dS'$ para superficies, y $dq' = \rho dV'$ para volúmenes.

Para calcular el campo eléctrico usando esta ecuación (se le dice “calcular por definición”), sólo hay que determinar qué es $\mathbf{r}$, qué es $\mathbf{r}'$, y qué es dq' . De ahí, sólo es integrar. Para facilitar la integración, hay que elegir un origen y sistema de coordenadas conveniente, de modo que tanto $\mathbf{r}$ como $\mathbf{r}'$ sean simples. Esto típicamente es lo más difícil, y les recomendamos practicar con un par de problemas para cachar la idea.

Última cosa: dijimos que dada una carga q , la fuerza sobre ella será $q\mathbf{E}$. Pero esto es para cargas puntuales... Para distribuciones de cargas continuas, tenemos

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}') dq' \quad (5)$$

1.2.1. Gauss

Cuando hay mucha simetría en un problema, podemos saltarnos el proceso tedioso de calcular por definición, usando el teorema de Gauss. Este teorema tiene una forma integral y una forma diferencial. Éstas son:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6)$$

La forma integral dice lo siguiente: si calculamos el flujo² de campo eléctrico que sale de una región, éste será igual a la carga contenida adentro (por una constante). Es razonable; el campo “sale” de una región cuando hay cargas en esa región. La forma diferencial de la ley dice algo muy parecido: la divergencia del campo en un punto (es decir, cuanto “explota” el campo en un punto) es proporcional a la densidad de carga *en ese punto*.

Ambas formas de la ley son útiles, pero como regla general, si les piden calcular un campo eléctrico, usen la forma integral. Si les piden calcular una densidad de carga conociendo el campo eléctrico, les conviene la forma diferencial.

Ahora, ¿cómo, exactamente, usamos la forma integral de la ley de Gauss? Aquí viene una acotación importante: **la ley de Gauss siempre es verdad, pero no siempre es útil**. Esto es porque la queremos usar para calcular el campo, pero justamente para aplicar la ley hay que tomar la integral de flujo del campo... Y ¿cómo calculamos esta integral, sin conocer el campo?! La clave es que haya mucha simetría; en casos muy simétricos, podemos tener un campo eléctrico constante sobre la superficie, y sacarlo de la integral. Vean los ejemplos típicos de esto (sirve para distribuciones esféricas, cilíndricas (infinitas), lineales (infinitas), y planos infinitos).

1.3. Potencial

Como en electrostática se tiene $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, entonces $\mathbf{E}$ puede escribirse como el gradiente de un campo escalar (propiedad que se suele ver en CAA). Así, se tiene la caracterización $\mathbf{E} = -\nabla V$.

²El flujo de un campo es sólo su integral sobre una superficie, tomando un producto punto entre el campo y la normal a la superficie en cada punto.

La forma de definir el potencial adecuado para satisfacer la condición de arriba es:

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

Algunos comentarios: esta es una integral de línea sobre un camino Γ , pero dado que el campo es conservativo, la integral no depende del camino. Además, no tenemos una expresión como $V = \text{algo}$. Tenemos la diferencia de potencial entre dos puntos. Esto es porque el potencial no es una cantidad física que podemos medir; sólo podemos medir diferencias de potencial. Algo típico es usar un punto de referencia $\mathbf{r}_0$, donde el potencial lo definimos como cero, de modo que

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

Además, es estándar (para distribuciones finitas de carga) usar $r_0 = \infty$.

Otra forma de calcular el potencial es considerar el potencial producido por una carga q en $\mathbf{r}'$, tomando el infinito como punto de referencia:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9)$$

Esto sale directamente al aplicar la definición que dimos de potencial, para el campo eléctrico de una partícula. Lo bacán es que al igual que el campo eléctrico, el potencial obedece el principio de superposición, entonces el potencial producido por una distribución continua de cargas es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10)$$

A veces es más fácil calcular esta integral que la de $\mathbf{E}$, por lo que podemos calcular el potencial y luego tomar su gradiente para determinar el campo eléctrico (noten que potencial es un escalar!).

La interpretación física de la diferencia de potencial entre $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_1$ es que es el trabajo por unidad de carga que hay que hacer para llevar una carga desde $\mathbf{r}_1$ hasta $\mathbf{r}_2$.

De la primera ecuación de Maxwell (ley de Gauss) se deduce que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

con lo que se obtiene la ecuación de Poisson: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (en el caso particular en el que $\rho = 0$, se llega a la ecuación de Laplace).

Hay teoremas que dicen lo siguiente:

Si las condiciones de borde en una región del espacio (i.e. el potencial en los bordes, o en el infinito, etc.) están especificadas, y se tiene una distribución de carga dada ρ , entonces *existe* un potencial V que resuelve la ecuación de Poisson, y *es único*. Esto será útil para el método de imágenes.

La ecuación de Poisson puede resolverse de diferentes formas. Una de las más usadas es variables separables. Siempre es útil fijarse si el potencial presenta simetrías, lo que podría implicar resolver una ecuación harto más fácil.

1.4. Conductores

A grandes rasgos, los conductores satisfacen 5 condiciones fundamentales:

1. $\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor. Las cargas del conductor, como tienen libertad de movimiento, se agrupan en su superficie de tal forma de suprimir cualquier acción de un campo eléctrico externo en su interior.

2. $\rho = 0$ dentro de un conductor. Noten bien que esto nace directamente como una consecuencia de que el campo eléctrico en el interior se anule. $\nabla \cdot (\mathbf{E} = \mathbf{0}) = 0$.
3. Toda la carga de un conductor debe almacenarse en su superficie (es el único lugar que le queda!).
4. El conductor es un equipotencial (región del espacio donde el potencial permanece constante). Esto nuevamente puede interpretarse como una consecuencia de que el campo eléctrico en el interior del conductor sea nulo: “Si el campo es menos el gradiente del potencial, ¿Qué potencial “gradientado” me da campo nulo? El potencial constante. Deal with it.”
5. El campo eléctrico $\mathbf{E}$, evaluado justo afuera de un conductor es perpendicular a su superficie. Si hubiera componente tangencial, el flujo de cargas que circula libremente por la superficie se encargaría de suprimirlo. (Obviamente las cargas no pueden suprimir el componente normal del campo, pues no pueden “salir” del conductor).

En términos cuantitativos, el campo inmediatamente fuera de un conductor viene dado por:

$$\mathbf{E}(\text{superficie}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie del conductor en ese punto.

Con estas propiedades se puede llegar a entender el comportamiento de conductores en distintas situaciones; en general las cosas más útiles para recordar son que los conductores tienen potencial constante, y que el campo eléctrico dentro de ellos es cero.

1.5. Método de las Imágenes

El método de las imágenes es ampliamente usado en los problemas con conductores. Trata de recrear la electrostática de un determinado problema a resolver con una configuración más sencilla de estudiar. Así, si logramos encontrar una distribución de carga que satisfaga la misma ecuación de Laplace que el sistema original (el que queremos resolver) y que además cumpla con las condiciones de borde del problema, entonces la solución al problema **equivalente** será LA MISMA que para la del problema **original**.

El ejemplo clásico es un plano conductor conectado a tierra y una carga puntual sobre él. Conviene echarle un vistazo, y pensar en qué ocurriría con más conductores (más planos, por ejemplo) u otras cosas por el estilo.

1.6. Aplicación Bonita: Multipolo

A veces, una distribución de cargas puede tener carga total cero, pero aún así producir un campo eléctrico interesante. Por ejemplo, consideremos un dipolo: una carga q a una distancia d de una carga $-q$. Si colocamos la carga q en $\frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}$, y $-q$ en $-\frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}$, entonces el potencial producido por las cargas será

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}d\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}d\hat{\mathbf{z}}|} \right) \quad (11)$$

Usando coordenadas esféricas, y una expansión de Taylor a primer orden considerando que $d \ll r$, llegamos a que para puntos lejanos del dipolo el potencial es

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos(\theta)}{r^2} \quad (12)$$

Lo interesante de este resultado es que a diferencia del caso de una partícula puntual, el potencial aquí decae como $1/r^2$ (no $1/r$). La cantidad $\mathbf{p} \equiv qd\hat{\mathbf{z}}$ se llama momento dipolar (en este caso).

Un dipolo $\mathbf{p}$ en un campo $\mathbf{E}$ siente un torque $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, y tiene energía potencial $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.

Para un caso más general, tenemos una distribución de carga ρ , y el potencial será

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13)$$

Haciéndole una expansión de Taylor a esto, tendremos que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}')dV' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos(\theta') \rho(\mathbf{r}')dV' + \dots \right) \quad (14)$$

Para la expresión general necesitamos polinomios de Legendre, pero da lo mismo. Lo importante es ver que hay distintos términos en la expansión, cada uno con menos contribución al potencial. El primer término es el término monopolar, el segundo es dipolar, el tercero cuadrupolar, etc. Si la carga neta es cero, vemos que el término monopolar es cero, pero los otros términos pueden sobrevivir aún.

El momento dipolar de una distribución en el caso más general (no sólo dos puntos) se define como

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')dV' \quad (15)$$

En términos de esto, el termino dipolar en la expansión se convierte en

$$V_{dipolo}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (16)$$

2. Tips

- POR FAVOR hagan análisis dimensional. Esto los va a salvar en algún momento de sus vidas, se los prometemos. Pueden ver al tiro si se equivocaron en algo. Además, hagan análisis de distintos límites, y distintas implicancias físicas, de sus resultados :D.
- En la definición de campo eléctrico, tengan claro cada término; suelen haber errores al confundirse entre qué es $\mathbf{r}$ y qué es $\mathbf{r}'$. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ nos dice el campo eléctrico en un punto $\mathbf{r}$, y el $\mathbf{r}'$ en el otro lado de la ecuación apunta a dónde está cada carga. Algo importante: $\mathbf{r}$ suele ser un punto arbitrario, pero se *fija* al calcular $\mathbf{E}$ en ese punto (mientras que $\mathbf{r}'$ no, va variando en la integral).
- Cuando uno calcula el campo eléctrico por definición, su integral puede tener términos como $\hat{\rho}$. Estos *no* se pueden sacar de la integral, ya que van cambiando al cambiar la posición. Los únicos vectores unitarios que se pueden sacar de la integral son aquellos que se mantienen fijos, como $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.
- Al aplicar la ley de Gauss, tengan cuidado con todos los términos. En especial, la carga contenida dentro de la superficie causa problemas. Si tienen una partícula con carga q dentro de la superficie, bacán, $Q_{int} = q$. Pero si su distribución de carga es continua, la carga contenida en su superficie se calcula integrando! Además, si tienen distintas densidades de carga en el espacio (por ejemplo, una esfera con densidad ρ , pero en el resto del espacio $\rho = 0$), tendrán que calcular el campo eléctrico usando distintas superficies que cuidan cada región (en el ejemplo, una superficie sería un cascarón esférico dentro de la esfera, y la otra sería un cascarón fuera).
- Nunca hay que usar la Ley de Gauss a ciegas! Antes de proceder, asegúrense que las distribuciones de carga o las condiciones del problema le otorgan una buena simetría al campo eléctrico. Si es así, resultará conveniente usarla. Si no, entonces se puede usar el cálculo por definición, por ejemplo.
- Si les piden calcular el potencial o el campo eléctrico en el espacio, típicamente si tienen simetría de algún tipo lo más fácil es calcular el campo con Gauss, y luego hacer una integral de línea del campo para encontrar el potencial.
- Al resolver un problema de conductores, no hay que complicarse demasiado! Sólo acuérdense de (y entiendan) las propiedades que los caracterizan los conductores, y cuáles les pueden servir para encontrar lo que necesitan.

- Si sospechan que tienen que usar método de imágenes, algo que sirve es ver si uno puede usar imágenes de tipo “espejo” (reflejar las cargas que tienen a través de la superficie, como si fuera un espejo, para idearse las imágenes); esto es especialmente útil cuando hay planos conductores.
- Otra cosa que recordar con imágenes: deben colocarse fuera de la zona donde uno calcula el campo eléctrico, o el potencial. Por ejemplo para el potencial sobre un plano, colocamos una imagen bajo el plano. Para el potencial fuera de una esfera conductora, colocamos una imagen dentro de la esfera.
- Si en algún momento le piden aproximar algo para distancias lejanas, o algo así, use una expansión de Taylor a primer orden. Si esto le da cero, calcule a segundo orden. Si esto le da cero, a tercer orden, y etc. (aunque típicamente uno no sube a más de orden 2).