Pauta Control 1
P2

Alejandro Jara

28 de abril de 2009

Un átomo esta caracterizado por tener una gran concentración de cargas positivas en un pequeño núcleo, el cual esta rodeado por una nube de carga negativas. Si la densidad de cargas tiene una distribución radial, esférica, de la forma

$$\rho(r) = Ze\alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}(1-\alpha r)$$

donde r es la coordenada radial, Z es el numero atómico, e es la carga del electrón, y α es el parámetro de apantallamiento. Encuentre el campo en todo el espacio.

Solución: Como el problema tiene simetría esferica nosotros a priori podemos decir que el campo electrico es de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Usemos la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico, entonces primero calculemos el flujo a traves de una superficie esperica de radio "r" (esto es valido para todo $r > 0$)

$$\Phi(r) = \int \vec{E}(\vec{r})d\vec{s} = \int E(r)\underbrace{\hat{r} * \hat{r}}_{1} ds = \int_\Omega E(r)r^2 d\Omega = E(r)r^2 \int_\Omega d\Omega = 4\pi E(r)r^2 \qquad (1)$$

Por la ley de Gauss sabemos que el flujo es igual a la carga encerrada dividido por ϵ_0, para la carga tomamos en cuanta que el atomo esta formado por un nucleo positivo con carga Ze y una nube de carga negativa dada por la densidada de carga $\rho(r)_e$ (densidad de carga total $\rho(r) = \rho(r)_e + Ze\delta(\vec{r})$ tiene también simetría esférica) es decir:

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= \frac{1}{\epsilon_0}\left(\int_\Omega \int_0^r (\rho(r) + Ze\delta(\vec{r}))r^2 dr d\Omega\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\int_0^r \rho(r)r^2 dr \int_\Omega d\Omega + Ze\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\left(\cancel{4\pi}\int_0^r Ze\alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{\cancel{4\pi r}}(1-\alpha r)r^{\cancel{2}} dr + Ze\right) \\
&= \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(\alpha^2 \int_0^r e^{-\alpha r} r dr - \alpha^3 \int_0^r e^{-\alpha r} r^2 dr + 1\right)
\end{aligned}$$

Calculemos $\int_0^r e^{-\alpha r} r^2 dr$ (por partes):

$$\begin{aligned}
\int_0^r e^{-\alpha r} r^2 dr &= \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha r}\, r^2\Big|_0^r + \frac{2}{\alpha}\int_0^r e^{-\alpha r} r dr \\
\Rightarrow -\alpha^3 \int_0^r e^{-\alpha r} r^2 dr &= \alpha^2 e^{-\alpha r} r^2 - 2\alpha^2 \int_0^r e^{-\alpha r} r dr
\end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación del flujo, obtenemos:

$$\Phi(r) \quad = \quad \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(\alpha^2 e^{-\alpha r} r^2 - \alpha^2 \int_0^r e^{-\alpha r} r dr + 1\right)$$

Calculemos $\int_0^r e^{-\alpha r} r dr$ (por partes):

$$\begin{aligned}
\int_0^r e^{-\alpha r} r dr &= \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha r} \left. r\right|_0^r + \frac{1}{\alpha}\int_0^r e^{-\alpha r} dr \\
&= \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha r} \left. r\right|_0^r + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{-1}{\alpha} \left. e^{-\alpha r}\right|_0^r\right) \\
&= \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha r} r - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2} \\
\Rightarrow -\alpha^2 \int_0^r e^{-\alpha r} r dr &= \alpha e^{-\alpha r} r + e^{-\alpha r} - 1
\end{aligned}$$

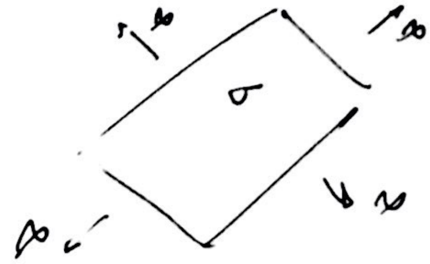
Remplazando en la ecuación del flujo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(\alpha^2 e^{-\alpha r} r^2 + \alpha e^{-\alpha r} r + e^{-\alpha r} - \cancel{1} + \cancel{1}\right) \\
&= \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1\right) e^{-\alpha r} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Juntamos (1) y (2) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
4\pi E(r) r^2 &= \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1\right) e^{-\alpha r} \\
\Rightarrow E(r) &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1)}{r^2} e^{-\alpha r}
\end{aligned}$$

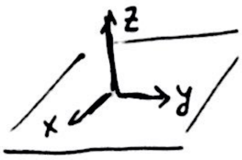
P5 Primero vamos a calcular $\vec{E}$ debido a un plano infinito, ya que vamos a aproximar a la nube como tal.



Usemos la ley de Gauss.

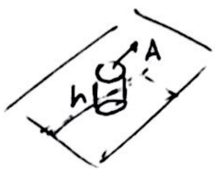
Por simetría del plano, sabemos que $E_y = E_x = 0$.

Además, $\vec{E}$ no debería depender de x, y (hay invarianza traslacional sobre el plano en los ejes x, y).



$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\,\hat{z} \quad \left(\equiv E(z)\,\hat{z}\right)$$

La superficie Gaussiana que vamos a usar es un cilindro de altura h, y con tapas de área A.



La mitad del cilindro está justo alineada con el plano.

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$d\vec{a} = \hat{n}\,da$. Para las tapas del cilindro, $\hat{n} = \hat{z}$ (arriba), $\hat{n} = -\hat{z}$ (abajo).

Por el otro lado, la normal a

va a apuntar en el plano xy; en coord. cilíndricas sería $\hat{n} = \hat{\rho}$. Pero $E_x = E_y = 0$

$\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{a}$ para esta parte será 0. Entonces sólo las tapas contribuyen a el flujo:

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iint_{\text{Arriba}} E(z)\,\hat{z}\cdot\hat{z}\,da + \iint_{\text{Abajo}} E(z)\,\hat{z}\cdot(-\hat{z})\,da$$

Pero arriba, $E(z) = E(h/2) = \text{const.}$ Abajo, $E(z) = E(-h/2)$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{a} = E(h/2)\cdot A - E(-h/2)\cdot A.$$

Dejémoslo hasta acá por ahora. Calculemos Q_{int}: dado que el plano tiene densidad de carga superficial σ, y el cilindro contiene un área A del plano, tenemos $Q_{int} = \sigma A$. Aplicando ley de Gauss,

$$\cancel{A}\left[E(h/2) - E(-h/2)\right] = \frac{\sigma \cancel{A}}{\varepsilon_0}$$

Ahora apliquemos otra simetría. Si uno está arriba del plano a una altura $h/2$, la magnitud de $\vec{E}$ debería ser la misma que si uno está debajo a una distancia $h/2$. Entonces tenemos $E(h/2) = E(-h/2)$, o $E(h/2) = -E(-h/2)$. La primera opción $\Rightarrow \sigma = 0$, lo cual no es cierto en general $\Rightarrow$ la descartamos. Usando la segunda opción,

$$2E(h/2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(h/2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

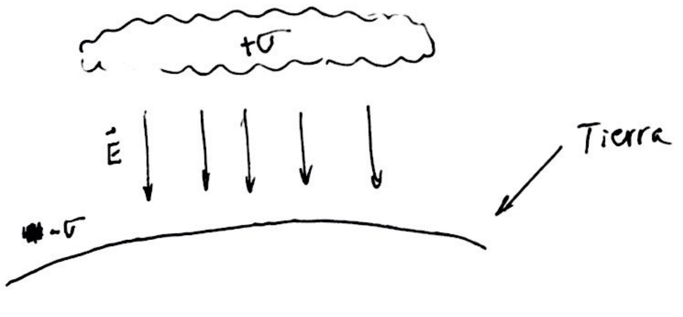
Pero <u>no</u> depende de la altura sobre el plano $\Rightarrow E_{arriba} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ siempre.

Además, $E_{abajo} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. $\Rightarrow$

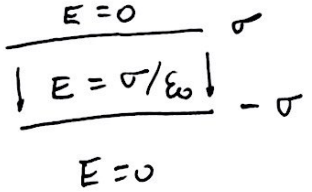
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} (\sigma/2\varepsilon_0)\,\hat{z}, & z > 0 \\ (-\sigma/2\varepsilon_0)\,\hat{z}, & z < 0 \end{cases}$$

Ahora, por fin, podemos empezar el problema ö!

Aproximamos a la nube como un plano infinito con densidad de carga constante $+\sigma$.



Podemos aproximar la superficie de la Tierra como otro plano infinito, y a la Tierra como un conductor. Todavía no lo hemos visto, pero $\vec{E} = 0$ en un conductor. Esto implica que si en la nube hay densidad de carga σ, en la tierra (superficie) debe haber $-\sigma$.



Haciendo la suma de $\vec{E}$ producido por cada plano, vemos que la magnitud de $\vec{E}$ sobre la tierra y bajo la nube es $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

P5 (cont.)

Del enunciado, sabemos que $E = 3000\,N/C$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3000\,N/C \Rightarrow \sigma \approx (3000\,N/C)\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,N^{-1}m^{-2}C^{2} \approx \boxed{2{,}64\cdot 10^{-8}\,C\,m^{-2}}$$

Si hay 0,25 cm de lluvia, en un área A del suelo tendremos un volumen $V = (0{,}25\,cm)\,A$ de agua. La carga en este volumen será igual a ρV ← densidad de carga volumétrica.

Además, estas gotas cayeron desde la nube, donde a la misma área A le correspondía la misma carga que cayó al suelo.

$$\Rightarrow \rho V = \sigma A \Rightarrow \rho \cdot 0{,}25\,cm\,\cancel{A} = \sigma \cancel{A} \Rightarrow \rho = \frac{\sigma}{0{,}25\,cm}$$

La carga en una gota será $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho = q$

y el campo eléctrico en la superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2} = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}R^{\cancel{3}}\rho\right)/\cancel{R^2} = \frac{R\rho}{3\varepsilon_0} = \frac{R\sigma}{(0{,}25\,cm\,\varepsilon_0)\,3}$$

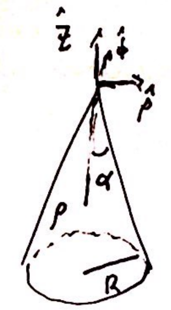
$$= \left(\frac{R}{0{,}25\,cm}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)}_{3000\,N/C}\cdot\frac{1}{3}$$

$$R = \frac{1}{2}(1\,mm)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{0{,}25\,cm} = \frac{0{,}5\,mm}{2{,}5\,mm} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{15}\cdot 3000\,N/C \Rightarrow \boxed{E = 200\,N/C}$$

P6



Lo vamos a calcular por definición ya que no hay simetrías convenientes para explotar.

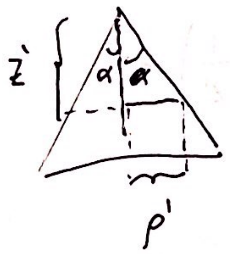
$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,dV$$

Vamos a colocar el origen del sistema de coordenadas en la punta del cono, y usaremos coord. cilíndricas.

$$\Rightarrow \vec{r} = 0, \quad \vec{r}\,' = \underbrace{\rho'\hat{\rho} + z'\hat{z}}$$

Integramos sobre esto. Cuidado: no confundir coordenada ρ' con densidad de carga ρ.

Límites de integración: $\phi' \in [0, 2\pi]$ (se da la vuelta sobre todo el cono).



Relación entre z', ρ' : $\tan(\alpha) = \frac{\rho'}{\underbrace{-z'}}$

signo (−) porque z' tomará solo valores negativos, y aquí la estamos tratando como distancia (con signo (+)).

Tenemos dos opciones: hacer que los límites de z' dependan de ρ', o al revés. Usaremos la segunda

$$\Rightarrow \rho' \in [0, -z'\tan\alpha]. \quad z' \in [0, -H], \quad \text{con } \tan\alpha = \frac{R}{H}$$

$$\Rightarrow H = R/\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{0}) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{-H}\int_0^{-z'\tan\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{-\rho'\hat{\rho} - z'\hat{z}}{\left((\rho')^2 + (z')^2\right)^{3/2}}\cdot \rho'\,d\phi'\,d\rho'\,dz'$$

Por simetría, la componente en $\hat{\rho}$ debe ser cero. Esto se puede ver además porque $\hat{\rho} = \hat{x}\cos\phi' + \hat{y}\sin\phi'$, y tanto $\cos\phi'$ como $\sin\phi'$ son 0 al ser integrados entre 0 y 2π. Entonces luego de integrar sobre ϕ',

$$\vec{E}(\vec{0}) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\int_0^{-H}\int_0^{-z'\tan\alpha} \frac{-z'\hat{z}\rho'}{\left[(\rho')^2 + (z')^2\right]^{3/2}}\,d\rho'\,dz'$$

Scanned by CamScanner

Como $\hat{z}$ es un vector constante (a diferencia de $\hat{\rho}$), lo sacamos de la integral.

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{0}) = \frac{-\rho\hat{z}}{2\varepsilon_0}\int_0^{-H} z'\int_0^{-z'\tan\alpha} \frac{\rho'}{\left((\rho')^2+(z')^2\right)^{3/2}}\, d\rho'\, dz'$$

C.V. $u = (\rho')^2 + (z')^2 \Rightarrow \frac{du}{d\rho'} = 2\rho' \Rightarrow du = 2\rho' d\rho'$ (*D)

(En la integral sobre ρ', z' se mantiene constante).

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{0}) = \frac{-\rho\hat{z}}{4\varepsilon_0}\int_0^{-H} z'\int_0^{-z'\tan\alpha} \frac{du}{u^{3/2}}\, dz'$$

$$= -\frac{\rho\hat{z}}{4\varepsilon_0}\int_0^{-H} z'\cdot\left(-2/\sqrt{u}\right)\Big|_0^{-z'\tan\alpha} dz'$$

$$= \frac{+\rho\hat{z}}{2\varepsilon_0}\int_0^{-H} z'\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{(\rho')^2+(z')^2}}\right)\Big|_0^{-z'\tan\alpha} dz' = \frac{\rho\hat{z}}{2\varepsilon_0}\int_0^{-H} z'\cdot\left(\frac{1}{z'\sec\alpha} - \frac{1}{z'}\right) dz'$$

$$= \frac{\rho\hat{z}}{2\varepsilon_0}\int_0^{-H}(\cos\alpha - 1)\, dz' = \frac{\rho\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left[\cos\alpha\, z' - z'\Big|_0^{-H}\right]$$

$$= \boxed{\frac{H\rho\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left[1-\cos\alpha\right]}$$

Nota: intenten calcular lo mismo, pero para un cono con sólo densidad superficial de carga σ. Pasan cosas raras en las "puntas" de cargas superficiales!