

Resumen C2 Electromagnetismo

Profesor: Claudio Romero

Auxiliares: Jerónimo Herrera, Esteban Rodriguez, Claudio López de Lérica E.

Contents

1	Resumen; Electroestática y Condiciones de Borde	1
2	Trabajo y Energía en Electroestática	2
3	Conductores	2
4	Carga Superficial y Fuerza en Conductor	3
5	Capacitores	3
6	Dipolo y Dipolo Inducido	4
7	Materiales Dieléctricos	5

1 Resumen; Electroestática y Condiciones de Borde

En lo que llevamos del curso, hemos trabajado básicamente con 3 cantidades físicas: E , V y ρ , las cuales se relacionan entre si de manera integral y diferencial, como lo muestra la siguiente figura, 1

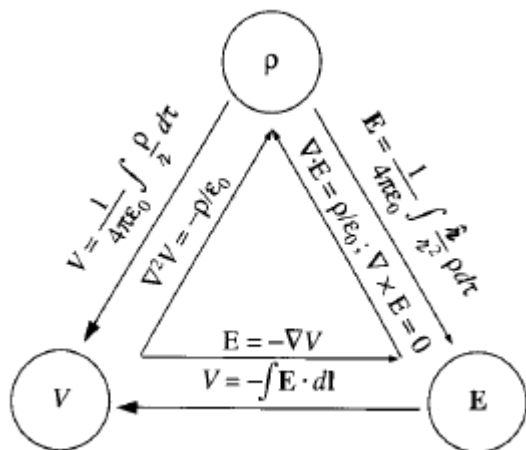


Figure 1: Relaciones entre cantidades Eléctricas.

Recordemos que esta teoría se inició a base de dos observaciones experimentales: (1) El principio de superposición (2) La ley de Coulomb.

Por otro lado, habiendo realizado algunos problemas, es

posible darnos cuenta de que el campo eléctrico sufre una discontinuidad al pasar por una superficie de densidad σ , esto se deduce de la ley de Gauss de la forma

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \quad (1)$$

Luego, si nos damos un grosor muy pequeño para nuestra superficie gausseana (ver ϵ Figura 2), podemos ignorar todo el flujo que atraviesa las caras laterales. Ojo que aquí estamos teniendo en cuenta no solo el flujo producto del campo proveniente de la superficie, sino que de cualquier configuración externa que afecte este sector (sobre y debajo del plano).

Finalmente, separando la integral en cada contribución, esto es, cada cara, sumado con lo recientemente dicho, queda

$$E_{arriba}^\perp - E_{abajo}^\perp = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (2)$$

, que es nuestra primera condición de borde.

Por otra parte, haciendo uso del teorema de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3)$$

, y ocupando el mismo argumento que la última vez, donde separamos el diferencial de largo en trozos (como se muestra en la Figura 2), nos damos cuenta que las integrales del camino que representan el grosor (ϵ), no contribuyen si es que este largo tiende a cero ($\epsilon \rightarrow 0$), con lo que nos queda como resultado

$$E_{arriba}^\parallel = E_{abajo}^\parallel \quad (4)$$

, que es nuestra segunda condición de borde.

Por último, agregar que de la primera condición obtenida, reemplazando E^\perp por $-\frac{\partial V}{\partial n}$, que representa la componente perpendicular al plano del gradiente de E , obtenemos el equivalente en términos de V .

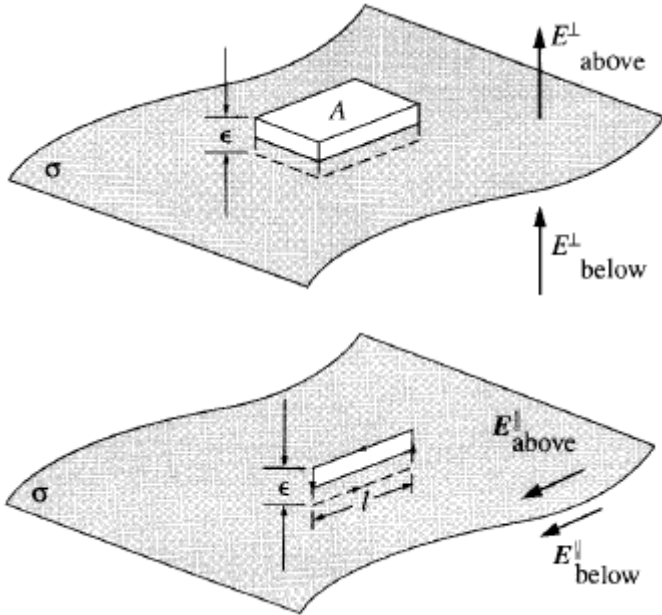


Figure 2: Diagrama dimensiones Superficie Gausseana y recorrido diferencial Teo. Stokes

Estas ecuaciones anteriormente nombradas pueden ser de gran utilidad a la hora de resolver problemas, pues son REQUISITOS que se tienen que cumplir en problemas como los que se tratan en este curso.

2 Trabajo y Energía en Electroestática

Cambiando radicalmente de tema, ahora se nos ocurrió preguntarnos cuanto es el trabajo que debemos hacer, para trasladar una partícula, desde un punto a otro, por un campo eléctrico dado por una configuración arbitraria. Nos iremos directamente al caso límite en el que el trabajo sea mínimo.

Recordamos que para poder desplazar un objeto en una dirección elegida, debemos lograr que su aceleración sea 0 (en el caso límite) con su velocidad es constante en esa dirección.

Para esto, si estamos en presencia de una fuerza eléctrica \vec{F}_0 , ejercemos una fuerza $-\vec{F}_0$ para este propósito.

Así

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b -\vec{F}_0 \cdot d\vec{l} = -Q \int_a^b \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = Q[V(b) - V(a)] \quad (5)$$

Ojo pestaña y ceja, no porque se le diga potencial nos estamos refiriendo al mismo "potencial" de mecánica, asociado a un campo de fuerza conservativo, si nos fijamos en las unidades, este V es de $\frac{[J]}{[C]} \neq [J]$. Ya que estamos aquí... llámémosle voltaje nomás ;).

Ojo también que el trabajo expresado anteriormente, es el que "uno" invierte para moverla, no la configuración que la rodea, por eso el signo (-) a la fuerza.

Partiendo de una configuración compuesta de una carga puntual q_2 , si tratásemos de mover una carga puntual q_1 desde el infinito, a través del campo, llegando a una posición r_{12} , según la ecuación (5) deberíamos ejercer un trabajo :

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

Después de unos trucos con superposición (que no va al caso explicitar aquí), obtenemos qué, para una configuración general de cargas puntuales :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i) \quad (6)$$

(con \vec{r}_i indica la posición de medida del voltaje proveniente del resto de las partículas)

Ese $\frac{1}{2}$ viene de una doble suma donde recorre ciertos valores de i y j , que se simplifica dejándolo en una suma con la mitad de los valores (dadas las condiciones).

El paso integral es directo, y se efectúa de la misma manera que en oportunidades anteriores, esto es, cada q se reemplaza por un dq , que a su vez es reemplazado por un $\rho d\tau$ (dependiendo de la densidad de carga).

Así

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau \quad (7)$$

Nuevamente, saltándonos un poco de argumentos matemáticos donde se expande el término en integración por partes, y se decide integrar en todo el espacio (teniendo presente que la densidad de carga es cero donde no hay carga, por lo tanto es equivalente integrar solamente donde hay carga o en todo el espacio), llegamos a la siguiente expresión,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{espacio}} E^2 d\tau \quad (8)$$

Analizando un poco la ecuación (6) y (8), uno se da cuenta de que hay cosas que no andan bien. Por un lado la ecuación (6) puede tomar valores tanto positivos como negativos. Por otro, la ecuación (8) es puramente positiva. ¿Qué sucede?

Explicación breve: La ecuación (6) no considera el trabajo ejercido para formar estas partículas puntuales (∞), pero cada una se puede considerar para distintas situaciones (ambas están bien, aunque (8) sea más completa).

3 Conductores

Uno podría, a grosso modo, clasificar los materiales en 2 grandes categorías. Los **conductores**, que son aquellos materiales que se podrían modelar como un elemento con infinito abastecimiento de cargas, las cuales NO tienen impedimento alguno para moverse por el material, y por otro lado están los **aislantes**, en los cuales cada carga está "atascada" en una posición particular.

Procedemos ahora a enunciar las propiedades de los materiales conductores:

1. $E = 0$ dentro del material. Esto es una consecuencia de el infinito abastecimiento de cargas, y la perfecta movilidad de las mismas, pues, de haber un campo distinto de cero en algún punto interno del conductor, las cargas se ordenarían para anularlo.
2. $\rho = 0$ dentro del conductor. Esto es similar a lo anterior. Ojo que no quiere decir que no existan cargas al interior, sino que, la suma superpuesta de todas aquellas debe ser igual a 0. De no ser así, se produciría un campo, y esto no es posible (se anula inmediatamente).
3. Toda la carga neta ($\neq 0$) puede vivir exclusivamente en la superficie del material, luego, las cargas interiores se las arreglan para anular el campo y el sistema queda en equilibrio.
4. Un conductor es equipotencial. Esto es, de nuevo, consecuencia de la propiedad 1. Dado que el campo en el interior es 0, entonces $\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (la diferencia de potencial es 0). A uno se le podría ocurrir integrar por un camino sobre la superficie, pero debería recordar inmediatamente que estamos en presencia de un campo conservativo, por lo tanto no importa el camino, y el resultado debería ser el mismo.
5. Existe un comportamiento particular de la condición de borde (2) para estos materiales, y es que $E_{abajo}^\perp = 0$, por lo tanto,

$$E_{arriba}^\perp = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (9)$$

. También notamos gracias a la condición (3), que \vec{E}_{arriba} tiene componente solo perpendicular al plano, es decir $\|\vec{E}_{arriba}\| = \|E_{arriba}^\perp\|$.

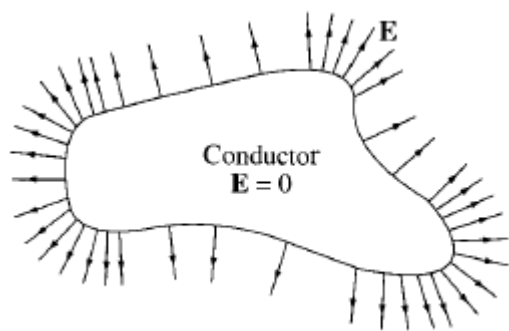


Figure 3: Conductor

Sólo para tener en cuenta, generalmente uno se encuentra con problemas del tipo cargas inducidas, donde se tiene un conductor y una configuración arbitraria de cargas, y esta última provoca una densidad de carga σ en la superficie del primero para que se cumplan las condiciones anteriores. En realidad, hay que hacer incapié en aquello, las condiciones se DEBEN cumplir.

Mención especial; uno podría preguntarse si existiría más de alguna configuración de cargas desparramadas por la superficie del material, que pudieran causar los mismo efectos. La

respuesta es NO, dado un teorema de unicidad para conductores (explicado en el capítulo 3 del David J. Griffiths). Se postula que, de encontrarse una sola configuración que cumpla las propiedades de conductor para un problema dado, entonces esta debe ser la única que las cumpla.

4 Carga Superficial y Fuerza en Conductor

En presencia de un campo eléctrico, la carga superficial del conductor va a experimentar una fuerza, naturalmente. Como hemos trabajado hasta ahora con el campo en las proximidades del material, donde se ha tratado como plano, no hemos tenido ni tendremos la necesidad de conocer el área que tomamos para identificar cantidades (dependientes del área). Es por esto que definimos \vec{f} = Fuerza por unidad de área, que explícitamente sería algo como

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dA} = \frac{dA\sigma\vec{E}_0}{dA} = \sigma\vec{E}_0 \quad (10)$$

Pero, ¿qué campo es exactamente el que está afectando a la superficie? Recordemos que existe una discontinuidad en estos puntos...

En el caso general, sabemos que ninguna carga ejerce fuerza sobre si misma (así como uno no puede tirar de un pie para levantarse), y, por otra parte, lo único que afecta a la zona es (1) El campo producido por la placa y (2) Campos externos. Entonces debemos encontrar una expresión para (2) sobre la superficie, ya que (1) no afectará.

$$\vec{E}_{arriba} = \vec{E}_{externo} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\vec{E}_{abajo} = \vec{E}_{externo} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Por lo tanto, despejando $\vec{E}_{externo}$ obtenemos

$$\vec{E}_{externo} = \frac{(\vec{E}_{arriba} + \vec{E}_{abajo})}{2} = \vec{E}_{promedio}$$

Así, en el caso particular de conductores, donde $\vec{E}_{arriba} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \hat{n}$, obtenemos que

$$\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma^2 \hat{n} \quad (11)$$

5 Capacitores

Se da una situación especial entre 2 conductores los cuales tienen una diferencia de potencial ΔV establecida (recordando que es independiente desde qué puntos se tome la diferencia). Asumamos por ahora, que el campo en es proporcional a la carga (ρ), es decir, si aumento la carga, el campo aumenta de magnitud, sin hacer cosas raras en otras direcciones. Luego, si \vec{E} es proporcional a la carga Q , entonces V también lo es, y así se define una constante de proporcionalidad :

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \quad (12)$$

Ojo piojo, $\Delta V = V_+ - V_-$, y Q es la carga que tiene el conductor positivo, mientras el otro debe tener una carga $-Q$.

Para cargar un capacitor, es necesario mover cargas de un conductor a otro (cosa de aumentar la diferencia de potencial). Para esto, nos damos cuenta que por cada carga dq que movemos, ejercemos un trabajo igual a

$$dW = dq\Delta V = \frac{qdq}{C}$$

Así, integrando para obtener el trabajo completo realizado:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C(\Delta V)^2}{2} \quad (13)$$

6 Dipolo y Dipolo Inducido

Preámbulo.- Si nos paramos muy muy lejos de una distribución de cargas, estas se terminarían viendo como una carga puntual (como aproximación), pero, ¿qué pasaría si la carga total de la configuración fuera cero? Nuestra intuición nos dice que, así como la carga es aproximadamente cero, entonces V debería tener valor pequeño también, o por lo menos, debería decaer más rápido que una configuración con $Q \neq 0$. Esto en realidad, es así, y expandiendo en términos de Taylor uno puede llegar a la conclusión de que el potencial de un **dipolo eléctrico** físico viene dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd\cos(\theta)}{r^2} \quad (14)$$

, que cae bastante más rápido que nuestro potencial de una partícula cargada. Nos definimos un dipolo eléctrico físico donde las cargas son iguales y opuestas, de forma que el término monopolar no tenga relevancia.

Saltándonos algunos pasos matemáticos (no es directo reemplazar dq por $\rho d\tau$, pues es una expansión), tenemos que nuestro potencial dipolar proveniente por una distribución de cargas viene dado por:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos(\theta)' \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (15)$$

, donde las variables con prima detonan la información de las cargas que provocan el campo con respecto a un origen dado, y las no primadas denotan donde el observador siente el campo, como lo muestra la siguiente figura.

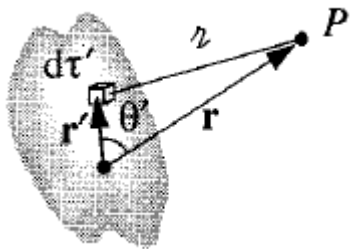


Figure 4: Diagrama variables V_{dip}

Definimos $\vec{p} \equiv \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'$ como el momento dipolar de la configuración.

Lo que nos importa.- Hablamos hace un rato sobre los materiales conductores, ahora nos toca comentar sobre materiales dieléctricos (o aislantes). A diferencia de los primeros, que tenían un abastecimiento infinito de cargas capaces de moverse con libertad, en estos últimos las cargas están adosadas a su posición particular.

Entonces, ¿qué pasa cuando sometemos a un aislante bajo el efecto de un campo eléctrico? Este tiene dos mecanismos de reacción, (1) a base de dipolos inducidos y (2) rotando dipolos naturales.

(1) Si uno se pregunta ¿qué pasa cuando someto a un átomo neutro bajo los efectos de un campo eléctrico, uno podría pensar que nada, pues es neutro, pero en realidad este está compuesto por cargas positivas y negativas, las cuales, individualmente reaccionarán ante el campo externo. De aquí que las cargas positivas (núcleo) se mueven en dirección del campo, y las cargas negativas (electrones) en dirección opuesta, hasta llegar al equilibrio entre campo externo y campo interno provocado por estas dos densidades, dejando el átomo polarizado como se muestra en la siguiente figura,

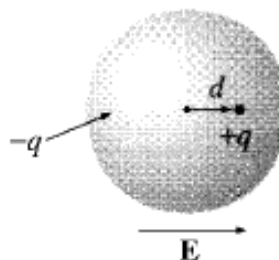


Figure 5: Átomo polarizado

Así, este átomo queda con un pequeño momento dipolar que apunta en dirección de \vec{E} , de la forma

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (16)$$

con α constante de polarizabilidad.

(2) Por otro lado, tenemos el alineamiento o rotación de una configuración, donde el campo externo aplicado sobre, digamos, una molécula, causa un torque y logra girar esta misma.

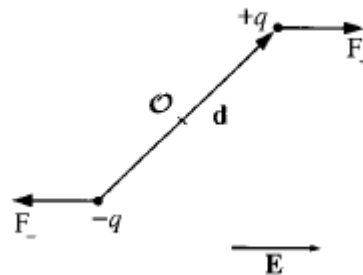


Figure 6: Torque sobre dipolo

Si el campo es uniforme, entonces se le aplica una fuerza $\|\vec{F}_+\| = \|\vec{F}_-\|$, por lo tanto la molécula no acelera, pero sufre un torque de la forma

$$\vec{N} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = \left(\frac{\vec{d}}{2} \times q\vec{E}\right) + \left(\frac{-\vec{d}}{2} \times -q\vec{E}\right) = \vec{p} \times \vec{E} \quad (17)$$

De no ser uniforme, existiría un $\Delta\vec{F}$, que provocaría una aceleración, como una fuerza cualquiera.

7 Materiales Dieléctricos

Definimos ahora el vector polarización como $\vec{P} \equiv$ momento dipolar por unidad de Volumen. Después de manipular el potencial V escrito en función de este último término definido (desarrollo innecesario para este texto), se nos definen las siguientes cantidades :

$$\sigma_l = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (18)$$

$$\rho_l = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (19)$$

, como cargas ligadas del material en presencia de un campo \vec{E} . Estas son la reacción del material producto de ser sometido a un campo externo. Si, por un momento obviamos toda interacción con el medio circundante, y nos preocupamos solamente de la reacción en nuestro material, podemos hacer uso de las ecuaciones expuestas recientemente para desarrollar y obtener cantidades como $\vec{E}_{material}$, que es el campo que producen los dipolos del material (creados o rotados por agentes externos que no estamos teniendo en cuenta).

Pero, ¿qué es exactamente una carga ligada? Son cargas resultantes producto de la interacción entre los dipolos dentro del material. Por ejemplo, si tomamos una fila de dipolos alineados, unos tras otro como lo muestra la siguiente figura,

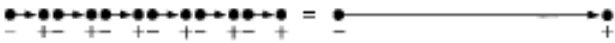


Figure 7: Fila de dipolos alineados

podemos observar la resultante en los extremos. Esta dinámica la podemos extrapolar a un plano o una carga volumétrica para hacer alusión a las cantidades de las ecuaciones (18) y (19).

Ahora sí, vamos al meollo del asunto. Pongamos todo junto, los efectos sobre el material, y los causantes de estos, es decir $\vec{E}_{material}$ junto con \vec{E} . Sabemos que el primero se explica por medio de las cargas ligadas (σ_l y ρ_l), y el segundo será provocado por agentes externos, o por cargas libres (free para denotar σ_f y ρ_f).

Así, utilizando la ley de Gauss con $\rho_{total} = \rho_l + \rho_f$, y con $\vec{E} = \vec{E}_{total}$ (producido por ambas fuentes), tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_l + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f$$

Así, se obtiene que

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \quad (20)$$

de donde nace la definición de nuestro vector desplazamiento $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, para dejar la expresión (20) como

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (21)$$

que también tiene su equivalente integral como Gauss sobre \vec{E} .

En las ecuaciones anteriores sólo se consideraron cargas volumétricas, pues la ecuación (19) explota en la superficie, dejando la embarrá'. Así, sólo serán útiles las ecuaciones (20) y (21) dentro del material.

Ojo piojo, dado que las cargas ligadas son "fabricadas", la suma total de estas debe dejar al aislante con su carga original, es decir, si en un principio nuestro material portaba una carga total nula, la suma de cargas ligadas también debe ser nula.

Importante aclaración: Aunque las ecuaciones recién enunciadas son básicamente idénticas a las ocupadas con el campo \vec{E} , uno NO puede decir que el vector \vec{D} es lo mismo que el campo con un factor ϵ_0 de diferencia, pues esto NO es cierto.

Una característica de la que nos hemos aprovechado para desarrollar la teoría electromagnética hasta el momento, es $\nabla \times \vec{E} = 0$, y esta NO es siempre cierta para \vec{D} , de hecho, casi nunca lo es. Es por esto que NO se podrán ocupar las relaciones de la Figura 1 indiferentemente para el vector desplazamiento como para el campo eléctrico.

Algo que sí se puede reescribir en términos de nuestras nuevas cantidades, son las condiciones de borde (muy útiles, por cierto), que quedan de la forma

$$D_{arriba}^\perp - D_{abajo}^\perp = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_f \quad (22)$$

$$D_{arriba}^\parallel - D_{abajo}^\parallel = P_{arriba}^\parallel - P_{abajo}^\parallel \quad (23)$$

, mientras que las anteriores siguen siendo válidas.

La última patita que nos queda son los **dieléctricos lineales**, que es con lo que se trabajará con mayor fuerza. En estos materiales se cumple que

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (24)$$

, con χ_e la susceptibilidad del medio (adimensional).

De esta manera, se pueden re representar las ecuaciones anteriormente obtenidas como

$$\vec{D} \equiv \epsilon \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (25)$$

, de donde se define

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (26)$$

, la permitividad del material, y la permitividad relativa (o constante dieléctrica)

$$\epsilon_r \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (27)$$