Pauta C2 - P3 :

Parte a)

Para calcular la energía del sistema primero se debe calcular el campo eléctrico y el vector desplazamiento en todo el espacio. Asumiendo que $\vec{D} = D(r)\hat{r}$, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ y procediendo por ley de Gauss:

Para $r < R$:

$$\vec{E} = 0 \ , \ \vec{D} = 0 \ \text{ (dentro de un conductor).}$$

Para $R \leq r < a$:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \Longrightarrow D(r) \cdot 4\pi r^2 = q \Longrightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Para $a \leq r \leq b$:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \Longrightarrow D(r) \cdot 4\pi r^2 = q \Longrightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r}$$

Para $b < r$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \Longrightarrow D(r) \cdot 4\pi r^2 = q \Longrightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

(1.5 pto.)

Luego como $U = \frac{1}{2}\int\int\int \vec{D} \cdot \vec{E} dV$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{4\pi}{2}\int_0^{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr \\
&= 2\pi \cdot \left(\int_0^R \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr + \int_R^a \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr + \int_a^b \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr + \int_b^{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr\right) \\
&= 2\pi \cdot \left(\int_0^R 0\ r^2 dr + \int_R^a \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 dr + \int_a^b \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot r^2 dr + \int_b^{\infty} \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 dr\right) \\
&= \frac{2\pi q^2}{(4\pi)^2} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0}\int_R^a \frac{1}{r^2} \cdot dr + \frac{1}{\epsilon}\int_a^b \frac{1}{r^2} \cdot dr + \frac{1}{\epsilon_0}\int_b^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr\right) \\
&= \frac{q^2}{8\pi} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}\right)\right)
\end{aligned}$$

(1.5 pto)

Parte b) Para esta parte se procede de igual forma, como la cantidad de carga encerrada para $r < c$ no cambia, tanto el vector desplazamiento como el vector campo eléctrico siguen siendo los mismos que la parte anterior. (1 pto)

Para analizar el caso $c \leq r$ volvemos a usar la ley de Gauss considerando que ahora hay una carga inducida q_c en el conductor conectado a tierra.

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q + q_c \Longrightarrow D(r) \cdot 4\pi r^2 = q + q_c \Longrightarrow \vec{D} = \frac{q + q_c}{4\pi r^2}\hat{r} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{q + q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Además, como el conductor está conectado a tierra tenemos que la diferencia de potencial con el infinito es nula (tanto el infinito como el casquete tienen potencial 0).

$$V(r = \infty) - V(r = c) = -\int_c^\infty \frac{q + q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q + q_c}{4\pi\epsilon_0 c} = 0 \Longrightarrow q = -q_c$$

Lo anteriormente deducido nos dice que $\vec{E} = 0$, $\vec{D} = 0$ para $c \leq r$. (1 pto.)

Finalmente, volviendo a usar el calculo de la energía:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{4\pi}{2} \int_0^{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr \\
&= 2\pi \cdot \left(\int_0^R \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr + \int_R^a \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr + \int_a^b \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr + \int_b^c \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr + \int_c^\infty \vec{D} \cdot \vec{E}\ r^2 dr \right) \\
&= 2\pi \cdot \left(\int_0^R 0\ r^2 dr + \int_R^a \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 dr + \int_a^b \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot r^2 dr + \int_b^c \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 dr + \int_c^\infty 0\ r^2 dr \right) \\
&= \frac{q^2}{8\pi} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right)
\end{aligned}$$

(1 pto.)