

POTENCIAL YUKAWA: Electrón en átomo de Hidrógeno
 Habríamos quedado en que la densidad de carga para esta distribución era:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}; \quad \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \rho = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\nabla V)$$

$$\Rightarrow \rho = -\epsilon_0 \nabla^2 V: \text{Divergencia de un gradiente es laplaciano.}$$

Aplicando alguna de las fórmulas de arriba:

$$\left[\rho(r) = -A\epsilon_0 \lambda^2 \cdot \frac{e^{-\lambda r}}{r} \right]; \quad r \neq 0 \text{ ya que diverge}$$

Integrando esto en un volumen; obtenemos la carga encerrada:

$$Q = \int_V \rho dV = \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_\epsilon^\infty}_{\text{3D}} \rho \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

(Así: integramos la parte radial desde $r = \epsilon$, ya que $\rho(r)$ es válida $\forall r \neq 0$ ($\epsilon \ll 1$ u)
 u: Unidad

Así, obtenemos $Q(\epsilon)$. Luego, hacemos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q(\epsilon) \text{ y hallamos } [Q = -4\pi A \epsilon_0]$$

¿Por qué funciona esto?

R. corta: $V(\vec{r})$ describe a un electrón en 'órbita' en torno a un protón.

Es decir, $Q = q_e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, por lo que:

$\rightarrow$ Como $-q_e < 0 \Rightarrow A > 0$

$$A = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{(4\pi)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C/Nm})}$$

$$\Rightarrow [A = 1,44 \cdot 10^{-9} \text{ Nm}^2/\text{C}]$$

(No se pedía, pero es interesante comprobar que, como $V \propto \frac{1}{r} \Rightarrow [V] = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$)

Ahora, la respuesta larga:

Recordemos que: $\vec{E} = -\nabla V = \frac{A}{r^2} e^{-kr} (\lambda r + 1) \hat{r}$

Es decir, se compone de un término $\propto r^{-1}$ y otro $\propto r^{-2}$ ($\propto$ proporcional). Se tiene que la divergencia de:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{r})$$

Distribución Delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

En forma integral, se obtiene el ángulo sólido:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \oint_S \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \vec{dS}$$

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0; & \vec{r} \neq 0 \\ \infty; & \vec{r} = 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Gauss, como: $\vec{dS} \cdot \hat{r} = r^2 d\Omega$

$$\Rightarrow \oint_S \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi = \left[\int d\Omega = 4\pi \right]$$

elemento de ángulo sólido

Como $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, tendrá que tener dos términos, el que encontramos y el que 'parche' a la solución en $r=0$; $\forall r$.

$$\left[\rho(\vec{r}) = -ge \left[\frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{4\pi r} + \delta(\vec{r}) \right] \right] (*)$$

así, vemos que al integrar en un volumen infinito (todo el espacio) para obtener la carga, el primer término se va a cero mientras el segundo se hace presente en $r=0$, de modo que:

$$\left[Q = \int_V \rho dV = -ge \right] < 0$$

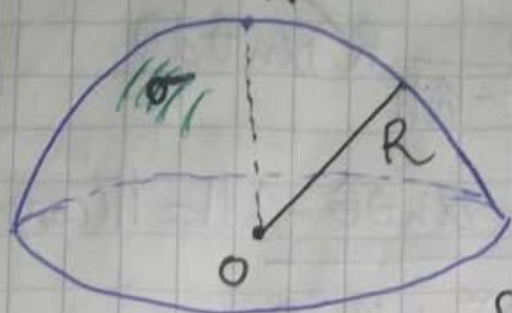
Que es lo que esperamos de este modelo: toda la carga está contenida en el electrón, de tamaño despreciable en relación a la distancia al núcleo.

(*) Una última observación:

En la densidad de carga, el 1^{er} término va como $\sim \frac{\lambda^2}{r}$; como $[\lambda] = \frac{1}{m}$; m: metros
 $\Rightarrow$ Va como $\sim \frac{1}{m^3}$. Como las unidades calzan vemos que $\delta(\vec{r}) \sim \frac{1}{m^3}$. De hecho: $\left[\int_V \delta(\vec{r}) dV = 1 \right]$ que es adimensional.

CASQUETE CARGADO

P3



Queremos ΔV_{NO} .
Usamos que el potencial para una distribución superficial de carga es:

$$\left\{ V(\vec{r}) = \int_{S'} \frac{\sigma \cdot dS'}{\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$$

Solución:

O

$$V(\vec{0}) =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{|\vec{0} - R\hat{r}|} \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2}{R} \Rightarrow \left[V(\vec{0}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \right]$$

N) Ahora, $\vec{r} = R\hat{r}$. En coordenadas esféricas, se puede expresar como:

$$R\hat{r} = R(\cos\theta\hat{z} - \sin\theta\hat{\theta})$$

Ejercicio: probar esto, usando que:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \vec{r} &= r\hat{r} = r\sin\theta\cos\varphi\hat{x} + r\sin\theta\sin\varphi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z} \\ \text{ii)} \quad \frac{d\hat{r}}{d\theta} &= \hat{\theta} \end{aligned}$$

Entonces:

$$V(R\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{|R\hat{r} - R\hat{r}|} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$V(R\hat{k}) = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{R\|\hat{k}-\hat{n}\|} R^2 \sin\theta d\theta$$

$$\begin{aligned} ; \|\hat{k}-\hat{n}\| &= \|\cos\theta\hat{n}-\sin\theta\hat{\theta}-\hat{n}\| = \|(\cos\theta-1)\hat{n}-\sin\theta\hat{\theta}\| \\ &= \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{2-2\cos\theta} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(R\hat{k}) = \frac{\sigma R}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} d\theta \quad I$$

Sabemos que $\frac{d}{d\theta}(-\cos\theta) = \sin\theta$, hacemos la sustitución $u = -\cos\theta \Rightarrow du = \sin\theta d\theta$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 \frac{du}{\sqrt{1+u}} = 2\sqrt{u+1} \Big|_{-1}^0 = 2(1-0) = 2 //$$

Con lo que: $V(R\hat{k}) = \frac{\sigma R}{\sqrt{2}\epsilon_0} \cdot \cancel{R} = \frac{\sigma R}{\sqrt{2}\epsilon_0}$

y finalmente:

$$\left[\Delta V_{NO} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} (R-1) \right] > 0$$

Nota: $\Delta V_{ON} = -\Delta V_{NO}$ igual era válido, nos interesa la diferencia absoluta.
Tiene sentido que el polo Norte esté a mayor potencial.