

## ÍNDICE GENERAL

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>15</b>
Carga eléctrica. Distribuciones de carga eléctrica. Ley de Coulomb. Campo eléctrico. Principio de superposición. Campo eléctrico debido a una distribución de cargas.	
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>35</b>
Potencial eléctrico. Relación entre potencial y campo: Gradiente. Potencial debido a una distribución de cargas: Superposición. Energía potencial. Conductores en un campo electrostático. Teorema de Gauss: Aplicaciones.	
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>81</b>
Dipolo eléctrico: Potencial y campo debido a un dipolo eléctrico. Potencial debido a una distribución arbitraria de carga: Momentos multipolares.	
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>113</b>
Dieléctricos. Polarización eléctrica. Potencial debido a un material polarizado. Vector desplazamiento. Susceptibilidad y permitividad eléctrica. Clases de dieléctricos. Condiciones en los límites.	
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>155</b>
Energía electrostática: Distribución discreta de cargas. Energía en el caso de una distribución continua de cargas. Expresión de la energía en función de los vectores de campo. Fuerza, momento y presión electrostática.	
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>189</b>
Conductores. Sistemas de conductores: Coeficientes de potencial, capacidad e inducción. Condensadores.	
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>213</b>
Ecuaciones de Poisson y Laplace. Solución de problemas electrostáticos: Unicidad de la solución. Método de imágenes. Solución de problemas electrostáticos por el método de separación de variables en coordenadas cartesianas. Aplicación a sistemas en coordenadas cilíndricas y esféricas. Solución de la ecuación de Poisson.	
<b>CAPÍTULO 8</b>	<b>273</b>
Corriente eléctrica: Densidad de corriente. Ecuación de continuidad. Ley de Ohm: Conductividad y resistividad eléctrica. Resistencia de conductores. Condiciones en los límites. Equilibrio electrostático. Ecuación de Laplace en medios conductores. Fuerza electromotriz (f.e.m.). Ley de Joule. Leyes de Kirchhoff.	

<b>CAPÍTULO 9</b>	<b>325</b>
Leyes de Ampère y Biot-Savart. Campo magnético debido a distribuciones de corriente y cargas en movimiento. Fuerza y par de fuerzas: Fuerza de Lorentz.	
<b>CAPÍTULO 10</b>	<b>371</b>
Teorema de la divergencia de $\mathbf{B}$ . Teorema de Ampère (teorema de la circulación de $\mathbf{B}$ ). Potencial vector magnético. Potencial y campo debido a una distribución localizada de corriente: Momento dipolar magnético. Par de fuerzas sobre un dipolo magnético.	
<b>CAPÍTULO 11</b>	<b>425</b>
Ley de Faraday. Medios estacionarios. Medios en movimiento. Coeficientes de inducción mutua y autoinducción.	
<b>CAPÍTULO 12</b>	<b>479</b>
Distribución de dipolos magnéticos: Imanación. Potenciales y campo debido a un material imanado. Intensidad de campo magnético $\mathbf{H}$ . Ecuaciones del campo en medios materiales. Susceptibilidad y permeabilidad magnética. Curva de imanación: Ciclo de histéresis. Condiciones en los límites. Circuito magnético. Energía magnética. Fuerza y par de fuerzas.	
<b>CAPÍTULO 13</b>	<b>567</b>
Ecuaciones del campo electromagnético: Corriente de desplazamiento. Ecuaciones de Maxwell. Condiciones en los límites. Energía electromagnética: Teorema de Poynting. Momento electromagnético. Ecuación de ondas electromagnéticas. Potenciales electrodinámicos: Ecuación de ondas para los potenciales. Ondas planas en dieléctricos. Propagación de ondas planas en medios con pérdidas. Forma compleja del vector de Poynting. Radiación de un dipolo. Antena lineal. Radiación de un grupo de cargas.	
<b>CAPÍTULO 14</b>	<b>665</b>
Circuitos eléctricos: Régimen transitorio. Circuitos eléctricos: Régimen estacionario. Impedancia compleja. Análisis de redes eléctricas. Teoremas de redes.	
<b>Apéndice A: RELACIONES MATEMÁTICAS I</b>	<b>739</b>
<b>Apéndice B: RELACIONES MATEMÁTICAS II</b>	<b>745</b>
<b>Apéndice C: TABLAS</b>	<b>755</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>759</b>

## PREFACIO

Al iniciar la reflexión sobre el objeto de un libro de problemas, me viene a la memoria un proverbio cuyo origen y redacción precisa desconozco, pero la idea se puede expresar de la forma siguiente: *Olvido lo que oigo, recuerdo lo que veo y aprendo lo que hago.*

Creo que siguiendo el proverbio, el objeto de los ejercicios y problemas de Electromagnetismo es facilitar al estudiante una serie de propuestas de trabajo para motivar la reflexión sobre las ideas básicas, y *haciendo problemas aprender* dichas ideas. Además de promover la reflexión sobre conceptos fundamentales, se trata de comprender la aplicación y manejo de la herramienta matemática- cálculo vectorial, diferencial e integral- imprescindible en la formulación de modelos matemáticos que describen los fenómenos físicos y la solución de los problemas con ellos relacionados.

También deben considerarse las limitaciones que "idealizan" cada problema como elementos que acotan la validez de las soluciones, puesto que para resolverlo hay que establecer simplificaciones que determinan los límites de aplicación. En este sentido los problemas deben considerarse abiertos para la discusión sobre la forma de aplicar las ideas básicas a casos concretos.

Los capítulos del libro comienzan por un resumen de las ideas y expresiones básicas que se utilizarán en los problemas. El objeto de este resumen es facilitar los instrumentos y conceptos necesarios que eviten recurrir con demasiada frecuencia al libro de teoría, y al mismo tiempo proporcione una referencia sobre símbolos y notaciones. Los problemas que siguen pretenden los objetivos indicados en el párrafo anterior, procurando que la solución también sirva como aprendizaje en la aplicación de una ley general a casos concretos.

El desarrollo del libro sigue el tratamiento tradicional o histórico del Electromagnetismo, es decir, se parte de leyes experimentales como la de Coulomb, Ampère, Biot y Savart, Faraday etc, sintetizándolas al final en las ecuaciones de Maxwell. La secuencia de capítulos enumerada en el índice muestra los temas tratados en el conjunto de problemas resueltos.

La mayoría de los problemas han sido propuestos en los exámenes de Electricidad y Magnetismo en 2º curso de CC Físicas de la UNED; por tanto el nivel de dichos problemas es adecuado para el primer ciclo de Ciencias e Ingeniería.

Termino agradeciendo las sugerencias recibidas, en particular de M<sup>a</sup> del Mar Montoya, que además ha tenido la paciencia de corregir los originales.

Las Rozas de Madrid, Enero de 1991.

V. López Rodríguez.RodríguezRodríguez

## SEGUNDA EDICIÓN

Durante los doce años transcurridos desde la aparición de la primera edición se han ido acumulando sugerencias y nuevo material, además de la corrección de erratas que han sido descubiertas por colegas y principalmente por los estudiantes; a todos agradezco su colaboración.

En la presente edición se ha revisado todo el libro. Además de añadir un capítulo sobre circuitos eléctricos con sus correspondientes problemas, se ha incrementado el número de problemas de todos los capítulos, incluida una ampliación del capítulo trece con problemas sobre radiación electromagnética. De esta forma el libro ha pasado de doscientos tres a trescientos treinta y un problemas resueltos. Con esta ampliación pienso que será más útil en los nuevos planes de estudio.

Espero que la presente edición tenga al menos la buena acogida que ha tenido la primera, pues no hay mayor satisfacción que la originada por el trabajo que sirve a los demás.

Escribir un libro requiere un esfuerzo que no se haría sin el estímulo y ayuda de otras personas. Entre otras quiero destacar la ayuda prestada por mi hija Elena y mis compañeros María del Mar Montoya Lirola y Manuel Pancorbo Castro.

Las Rozas de Madrid, Abril de 2003

V. López Rodríguez

## Capítulo 1

# CAMPO ELÉCTRICO I

## 1.1 INTRODUCCIÓN

En este apartado introduciremos las definiciones y expresiones más importantes que se utilizarán en los problemas que se proponen y resuelven en este capítulo.

### 1.1.1 CARGA ELÉCTRICA

La carga eléctrica es un atributo de las partículas elementales que la poseen caracterizado por la fuerza electrostática que entre ellas se ejerce. Dicha fuerza es atractiva si las cargas respectivas son de signo contrario, y repulsiva si son del mismo signo.

En el sistema internacional SI la unidad de carga es el culombio.

La carga libre más pequeña que se conoce es la correspondiente al electrón  $e = 1,60 \times 10^{-19}$  culombios [C].

### 1.1.2 DISTRIBUCIONES DE CARGA ELÉCTRICA

Las distribuciones de carga puntuales se caracterizan por que suponemos la carga concentrada en el punto donde está situada cada una de las cargas que componen la distribución.

### 1.1.3 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Son aglomerados de carga que desde un punto de vista macroscópico pueden ser caracterizados por densidades de carga. Se definen las densidades por la relación entre la suma de todas las cargas que hay en un volumen, superficie o longitud elemental y dicho volumen, superficie o longitud.

Densidad volumétrica de carga  $\rho$

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad (1.1)$$

Densidad superficial  $\sigma$  o  $\rho_s$

$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (1.2)$$

Densidad lineal  $\lambda$

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (1.3)$$

#### 1.1.4 LEY DE COULOMB

La ley de Coulomb establece que la fuerza entre dos cargas puntuales, es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, cuya dirección es la de la recta que une las cargas y el sentido depende de los respectivos signos, de atracción si son de signo opuesto y de repulsión si son del mismo signo.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad [\text{N}] \quad (1.4)$$

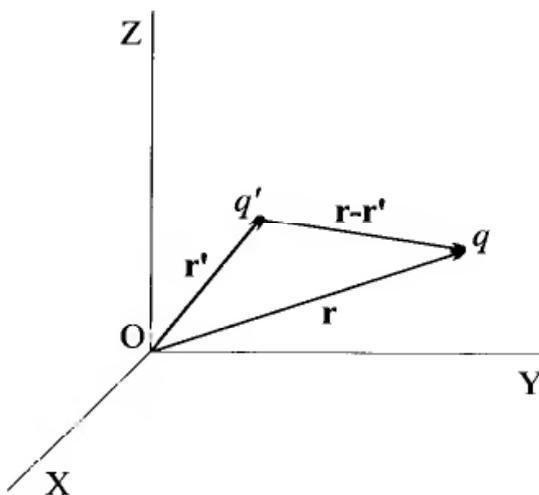


Figura 1.1

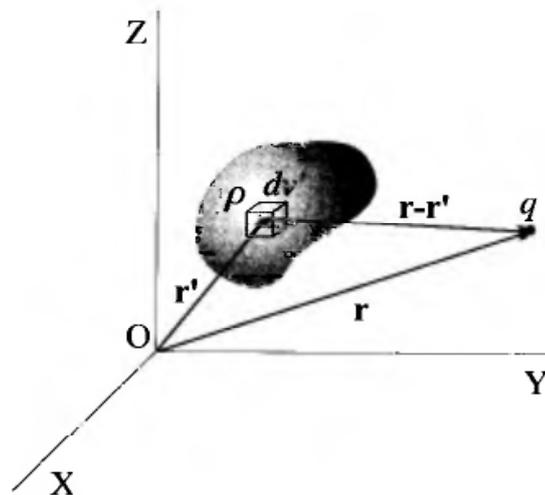


Figura 1.2

#### 1.1.5 CAMPO ELÉCTRICO

Campo eléctrico es la región del espacio donde la fuerza electrostática actúa.

Intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , es el límite al que tiende la fuerza sobre una carga de prueba  $\Delta q$ , producida por una distribución de carga, cuando  $\Delta q$  tiende a cero y con  $\Delta q$  positiva. Esta relación es independiente de la carga de prueba  $\Delta q$ , siendo un vector función del punto considerado, cuyo módulo, dirección y sentido es el de la fuerza por unidad de carga en dicho punto.

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{\Delta q}}{\Delta q} \quad [\text{N/C} = \text{V/m}] \quad (1.5)$$

### 1.1.6 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN LINEAL

Este principio establece que, la fuerza electrostática (campo eléctrico resultante) sobre una carga (en un punto), es la suma vectorial de las componentes individuales sobre la carga (en el punto), debidas a cada carga puntual o densidad de carga sobre un volumen, superficie o longitud elemental.

### 1.1.7 SISTEMAS DE CARGAS PUNTUALES

Fuerza sobre una carga  $q$  situada en el punto  $\mathbf{r}$  debida a un sistema de cargas  $q_i$  en el vacío.

$$\mathbf{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.6)$$

Campo eléctrico en el punto  $\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.7)$$

### 1.1.8 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Fuerza sobre una carga  $q$  situada en un punto  $\mathbf{r}$  debida a una distribución continua de carga. El vector  $\mathbf{r}'$  indica el punto donde se sitúa el volumen elemental  $dv'$  de la distribución (véase la figura 1.2).

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (1.8)$$

Campo eléctrico en un punto  $\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (1.9)$$

De forma similar se obtienen fuerza y campo en el caso de distribuciones superficiales y lineales de carga, sin más que sustituir  $\rho(\mathbf{r}')$  por  $\sigma(\mathbf{r}')$  o  $\lambda(\mathbf{r}')$ ,  $dv'$  por  $ds'$  o  $dl'$ , y  $V$  por  $S$  o  $C$ , respectivamente. Las expresiones para el campo eléctrico en el caso de distribuciones superficiales y lineales son:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (1.10)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \quad (1.11)$$

## 2.5 PROBLEMAS

### P 2.1

Disponemos tres cargas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  sobre una circunferencia de radio un metro como indica la figura P2.1;  $q_1 = q_0$ ,  $q_2 = q_3 = -q_0/2$ .

- 1) Calcular el campo eléctrico creado en el centro de la circunferencia.
- 2) Calcular la fuerza ejercida sobre la carga  $q_1$ .

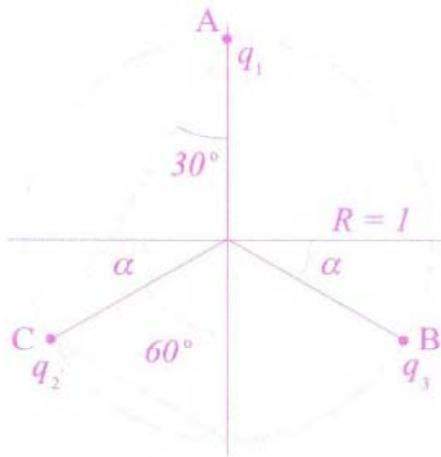


Figura P2.1

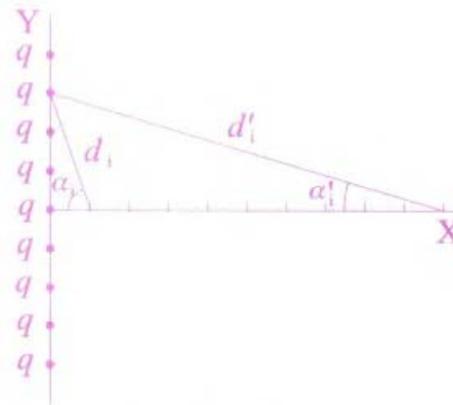


Figura P2.2

### P 2.2

Sobre el eje Y colocamos nueve cargas  $q$  como indica la figura P2.2.

- 1) Calcular el campo en los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(10, 0, 0)$ .

2) Suponiendo que la carga  $Q = 9q$  está distribuida uniformemente sobre el segmento de recta comprendido entre los puntos  $(0, 4, 0)$  y  $(0, -4, 0)$ , calcular el campo en los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(10, 0, 0)$ . Comparar los resultados obtenidos en 1) y 2).

### P 2.3

Sobre la semicircunferencia indicada en la figura P2.3 se distribuye una densidad de carga lineal  $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ .

- 1) Calcular la carga total distribuida sobre la semicircunferencia.
- 2) Calcular el campo en el punto O.

3) ¿En qué punto del eje X debe situarse la carga calculada en 1), para que el campo en O sea el mismo que el obtenido en el apartado 2).

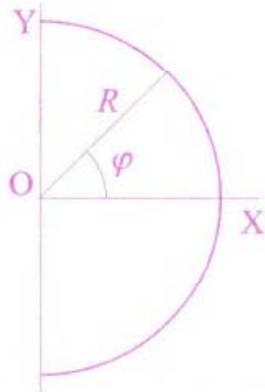


Figura P2.3

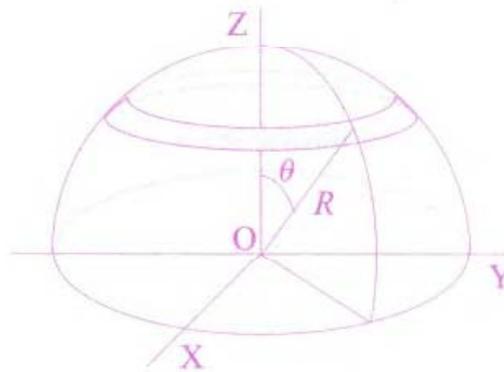


Figura P2.4

**P 2.4**

Sobre una capa semiesférica de radio  $R$ , tenemos una distribución superficial de carga uniforme  $\sigma = 1 \text{ C/m}^2$ .

Calcular el campo eléctrico en el centro  $O$  de la figura P2.4.

**P 2.5**

Sobre una superficie esférica como la indicada en la figura P2.5, se distribuye una densidad de carga superficial  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ .

Calcular el campo eléctrico en el centro  $O$ .

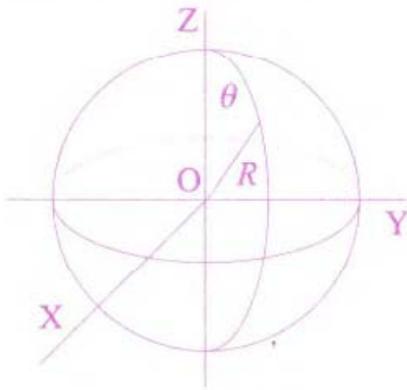


Figura P2.5

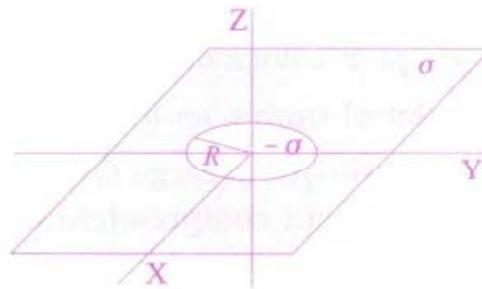


Figura P2.6

**P 2.6**

Sobre un plano indefinido tenemos dos distribuciones de carga. Una densidad superficial de carga uniforme  $-\sigma$  sobre un círculo de radio  $R$  y otra de signo contrario  $\sigma$  sobre el resto del plano, véase la figura P2.6.a.

Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico sobre el eje  $Z$ .

**P 2.7**

En una capa esférica se suprime un casquete esférico de  $30^\circ$ , como indica la figura P2.7. Sobre la capa, una vez separado el casquete, se distribuye uniformemente una densidad superficial de carga  $\sigma$ .

Aplicando el principio de superposición calcular el campo eléctrico en el centro de la esfera O.

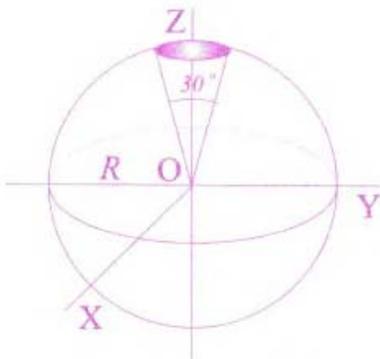


Figura P2.7

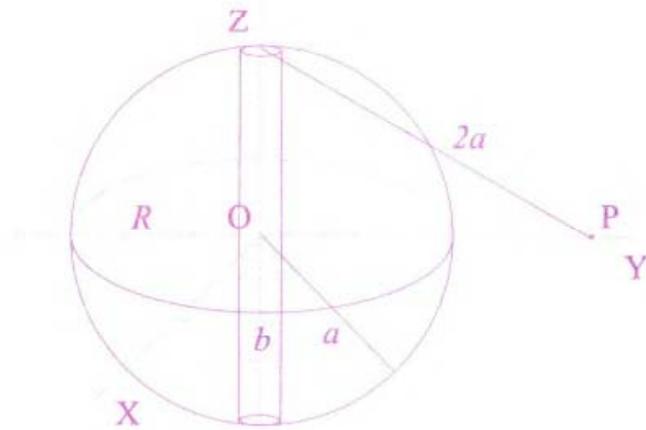


Figura P2.8

**P 2.8**

Una esfera de material dieléctrico, se taladra diametralmente, dejando un hueco cilíndrico de radio  $b = 10^{-2}a$ . El hueco se puede considerar filiforme en comparación con el radio  $a$  de la esfera. Véase la figura P2.8.

Sobre la esfera, salvo en el hueco cilíndrico, se distribuye una densidad de carga uniforme  $\rho$ .

Aplicando el principio de superposición calcular el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el punto P ( $OP = a\sqrt{3}$ ).

**P 2.9**

Disponemos de una esfera dieléctrica de radio  $R$ . Sobre un meridiano se ha realizado un canal de sección circular; el radio de dicha sección es  $d$  ( $d \ll R$ ). Véase la figura P2.9.

Sobre la esfera, excluido el canal, existe una distribución uniforme de carga  $\rho_0$ .

Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico en el punto P debido a la distribución de carga descrita.

Suponemos el radio medio del canal igual a  $R$ .

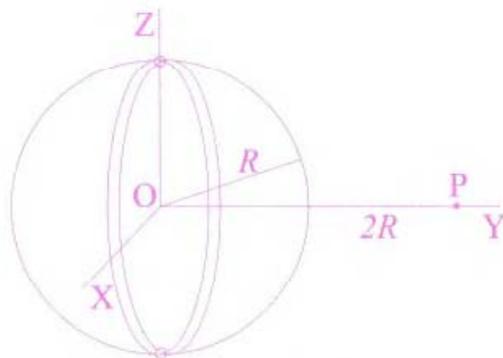


Figura P2.9

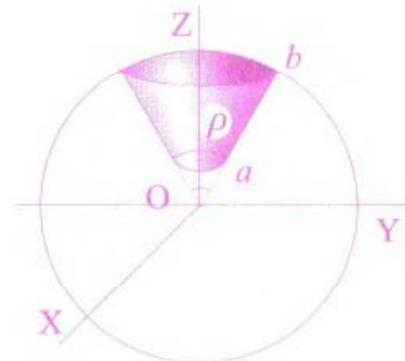


Figura P2.10

**P 2.10**

Sobre un sector truncado de una esfera de ángulo  $60^\circ$ , como el indicado en la figura P2.10, existe una distribución de carga uniforme  $\rho$ .

Calcular el campo eléctrico en el punto O debido a la distribución de cargas.

## 1.2 PROBLEMAS

## PROBLEMA 1.1

Disponemos tres cargas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  sobre una circunferencia de radio un metro como indica la figura P1.1;  $q_1 = q_0$ ,  $q_2 = q_3 = -q_0/2$ .

- 1) Calcular el campo eléctrico creado en el centro de la circunferencia.
- 2) Calcular la fuerza ejercida sobre la carga  $q_1$ .

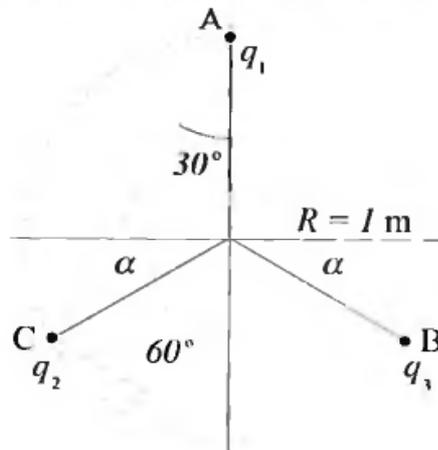


Figura P1.1

## Solución

1) Calculamos el campo en el centro de la circunferencia, teniendo en cuenta el principio de superposición y su aplicación al caso de un sistema de cargas puntuales. Es decir, el campo será la suma vectorial de los campos creados por cada una de las cargas. Aplicando la ecuación (1.7), con:

$$\mathbf{r} = 0, \mathbf{r}_1 = R \mathbf{u}_y ; \mathbf{r}_2 = -R(\mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

$$\mathbf{r}_3 = R(\mathbf{u}_x \cos \alpha - \mathbf{u}_y \sin \alpha) \text{ y } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = R \text{ con } i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R^2} (-\mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R^2} (\mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{R^2} (-\mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

Teniendo en cuenta los valores que en el problema se proponen para las cargas,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{R^2} (-1 - \sin \alpha) \mathbf{u}_y$$

como  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1/2$  y  $R = 1$ , por tanto el campo  $\mathbf{E}$  en el centro es:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q_0}{2R^2} \mathbf{u}_y = -\frac{3q_0}{8\pi\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

2) Para calcular la fuerza sobre la carga  $q_1$ , se obtiene primero el campo debido a las cargas  $q_2$  y  $q_3$  en el punto donde se sitúa la carga  $q_1$ .

La distancia entre las cargas es:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = d = (R^2 \cos^2 \alpha + R^2(1 + \sin \alpha)^2)^{1/2} = R\sqrt{3}$$

Los campos respectivos son:

$$\mathbf{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{d^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{d^3} (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

$$\mathbf{E}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{d^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{d^3} (\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

El campo total, sustituyendo  $q_2$  y  $q_3$  por  $-q_0/2$ , será,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{13} = -\frac{R}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{2d^3} (2 + 2 \sin \alpha) \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo los valores de  $\sin \alpha = 1/2$  y  $d = R\sqrt{3}$ , queda,

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{R^2} \frac{\sqrt{3}}{6} \mathbf{u}_y$$

La fuerza es:

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{R^2} \frac{\sqrt{3}}{6} \mathbf{u}_y$$

## PROBLEMA 1.2

Sobre el eje Y colocamos nueve cargas  $q$  como indica la figura P1.2.

1) Calcular el campo en los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(10, 0, 0)$ .

2) Suponiendo que la carga  $Q = 9q$  está distribuida uniformemente sobre el segmento de recta comprendido entre los puntos  $(0, 4, 0)$  y  $(0, -4, 0)$ , calcular el campo en los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(10, 0, 0)$ . Comparar los resultados obtenidos en 1) y 2).

### Solución

#### 1) Campo debido a las cargas puntuales

Para calcular el campo en los puntos indicados, recurrimos a la ecuación (1.7).

##### 1.1) Punto $(1, 0, 0)$

$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x$  ;  $\mathbf{r}_i = d_i \sin \alpha_i \mathbf{u}_y$  para  $y > 0$  ;  $\mathbf{r}_i = -d_i \sin \alpha_i \mathbf{u}_y$  para  $y < 0$

$$d_i \sin \alpha_i = n, (n = 1 \dots 4) \rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = d_i = (1 + n^2)^{1/2}$$

Dada la simetría de la distribución, las componentes  $\mathbf{u}_y$  al sumar se anulan, ya que, salvo la situada en O, cada carga tiene otra situada de forma simétrica.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left( \mathbf{u}_x + \sum_{n=1}^4 (\mathbf{u}_x - d_i \text{sen } \alpha_i \mathbf{u}_y) \frac{1}{d_i^3} + \sum_{n=1}^4 (\mathbf{u}_x + d_i \text{sen } \alpha_i \mathbf{u}_y) \frac{1}{d_i^3} \right)$$

Operando y sustituyendo  $d_i$  obtenemos:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^4 \frac{1}{(1+n^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_x \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_o} 1,98 \mathbf{u}_x$$

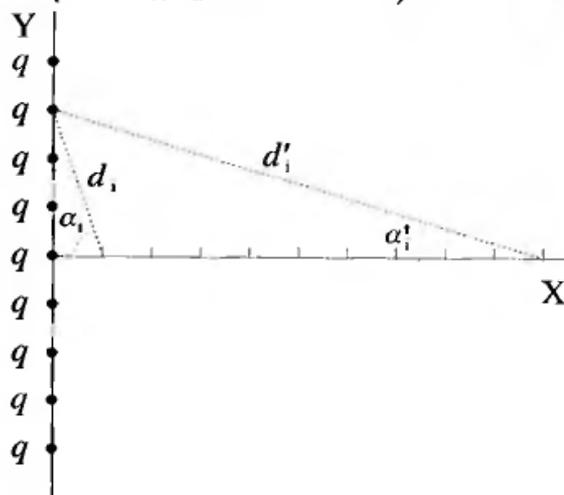


Figura P1.2

1.2) Punto (10, 0, 0)

Se procede en forma análoga al caso anterior, con la diferencia de que ahora  $\mathbf{r} = 10\mathbf{u}_x$ , y  $d_i = (10^2 + n^2)^{1/2}$ .

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{1}{10^2} + 2 \sum_{n=1}^4 \frac{10}{(10^2 + n^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_x \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_o} 8,21 \times 10^{-2} \mathbf{u}_x$$

2) Campo debido a la distribución lineal de carga

En el cálculo que vamos a realizar en este apartado, se supone que existe una distribución lineal de carga  $\lambda = 9q/8$  (C/m). Los campos se calculan mediante la ecuación (1.11).

2.1) Punto (1, 0, 0)

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r}' = y\mathbf{u}_y ; \quad dl' = dy ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = d = (1 + y^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{E}'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{9q}{8} \int_{-4}^4 \frac{(\mathbf{u}_x - y\mathbf{u}_y) dy}{(1 + y^2)^{3/2}}$$

Integrando por componentes, quedan de la forma siguiente:

$$\int_{-4}^4 \frac{dy}{(1 + y^2)^{3/2}} = \left[ \frac{y}{(1 + y^2)^{1/2}} \right]_{-4}^4 = \frac{8}{17^{1/2}} \text{ para } \mathbf{u}_x$$

$$\int_{-4}^4 \frac{-y dy}{(1+y^2)^{3/2}} = \left[ \frac{1}{(1+y^2)^{1/2}} \right]_{-4}^4 = 0 \quad \text{para } \mathbf{u}_y$$

Llevando los cálculos anteriores a  $\mathbf{E}'_1$ , obtenemos:

$$\mathbf{E}'_1 \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2,18 \mathbf{u}_x$$

### 2.2) Punto (10, 0, 0)

Procedemos de manera similar al caso anterior, poniendo ahora:

$\mathbf{r} = 10\mathbf{u}_x$  y  $d = (10^2 + y^2)^{1/2}$ . La integral que no se anula en este caso

es:

$$\int_{-4}^4 \frac{10dy}{(10^2 + y^2)^{3/2}} = \left[ \frac{y}{10(10^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{-4}^4 = \frac{8}{10\sqrt{116}}$$

El campo  $\mathbf{E}$  queda de la forma,

$$\mathbf{E}'_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{9}{8} \frac{8}{10\sqrt{116}} \mathbf{u}_x \simeq 8,35 \times 10^{-2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{u}_x$$

Comparando los resultados obtenidos en 1) y 2), se observa que el campo eléctrico disminuye más rápidamente con la distancia en la distribución continua que en la discreta. Además la diferencia entre ambos cálculos disminuye con la distancia.

### PROBLEMA 1.3

Sobre la semicircunferencia indicada en la figura P1.3 se distribuye una densidad de carga lineal  $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ .

- 1) Calcular la carga total distribuida sobre la semicircunferencia.
- 2) Calcular el campo en el punto O.
- 3) ¿En qué punto del eje X debe situarse la carga calculada en 1) para que el campo en O sea el mismo que el obtenido en el apartado 2)?

#### Solución

##### 1) Carga

El cálculo de la carga total se hace sumando las cargas elementales sobre cada segmento diferencial de la circunferencia, es decir, se suman  $\lambda dl'$  desde  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ .

$$dl' = R d\varphi; \quad \lambda dl' = \lambda_0 \cos \varphi R d\varphi$$

por tanto

$$Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \lambda_0 \cos \varphi d\varphi = 2R \lambda_0$$

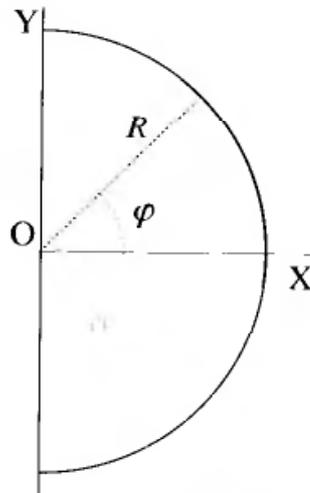


Figura P1.3

## 2) Campo

Aplicaremos la ecuación (1.11) para calcular el campo en el punto O. Dada la simetría de la distribución con respecto al eje X, la componente  $E_y$  del campo será nula.

Los vectores de posición  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  son respectivamente:

$$\mathbf{r} = 0 ; \mathbf{r}' = R \cos \varphi \mathbf{u}_x + R \sin \varphi \mathbf{u}_y ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$$

Los límites de integración son los indicados en el apartado 1).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R\lambda_0 \cos \varphi d\varphi (-R \cos \varphi \mathbf{u}_x - R \sin \varphi \mathbf{u}_y)}{R^3}$$

La integración de la parte correspondiente a la componente  $y$  es de la forma  $\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = (1/2) \sin^2 \varphi$ , que entre los límites indicados es nula, por tanto sólo queda la componente  $x$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\lambda_0 \cos^2 \varphi d\varphi}{R} \mathbf{u}_x = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda_0}{8\epsilon_0 R} \mathbf{u}_x$$

## 3) Punto sobre el eje X

Para calcular la distancia a que debemos colocar una carga  $Q = 2\lambda_0 R$ , que produzca el mismo campo en O, se igualará el campo que crea  $Q$  en el punto de coordenada  $x$  con el obtenido en el apartado anterior.

$$\frac{\lambda_0}{8\epsilon_0 R} = \frac{2\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

por tanto deducimos que

$$x = \pm \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/2} R$$

Dado que el campo tiene la dirección  $\mathbf{u}_x$  ( $x > 0$ ) y por ello,

$$x = 2R\pi^{-1/2}$$

es la coordenada del punto donde debemos situar la carga  $Q$ .

### PROBLEMA 1.4

Sobre una capa semiesférica de radio  $R$ , tenemos una distribución superficial de carga uniforme  $\sigma = 1 \text{ C/m}^2$ .

Calcular el campo eléctrico en el centro  $O$  de la figura P1.4.

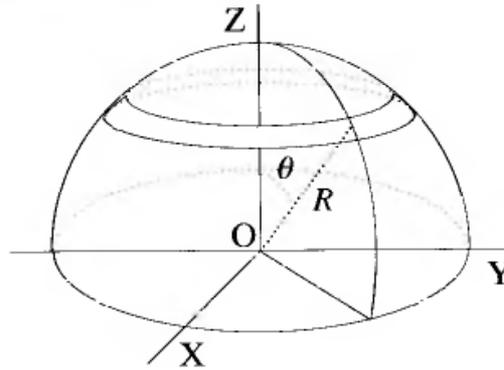


Figura P1.4

### Solución

Se trata de una distribución superficial de simetría cilíndrica, por tanto aplicaremos la ecuación (1.10) para calcular el campo en el centro  $O$ . Teniendo en cuenta la citada simetría al sumar las contribuciones de  $\sigma ds'$  sobre la semiesfera sólo quedan las componentes en la dirección del eje  $Z$ . Las componentes perpendiculares se anulan pues cada  $\sigma ds'$  tiene otro elemento simétrico que produce una componente perpendicular al eje  $Z$  del mismo módulo pero de signo contrario.

$$\mathbf{r} = \mathbf{0}; \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R; ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Cada componente sobre el eje  $Z$  es proporcional a,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z = -R\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = -R \cos \theta$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.10) y las relaciones anteriores,

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^3} R \cos \theta = -\frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2}$$

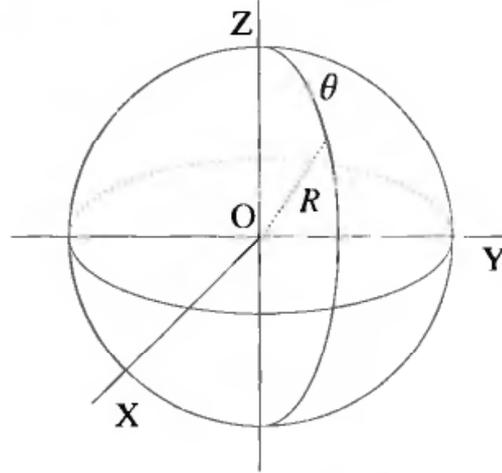
El vector campo tiene sentido hacia  $z < 0$  por tanto,

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 1.5**

Sobre una superficie esférica como la indicada en la figura P1.5, se distribuye una densidad de carga superficial  $\sigma = \sigma_o \cos \theta$ .

Calcular el campo eléctrico en el centro O.



**Figura P1.5**

**Solución**

La distribución de carga tiene simetría cilíndrica con eje Z, la zona de  $z > 0$ , parte superior de la esfera, corresponde una densidad de carga positiva, y en la inferior  $z < 0$ , la densidad de carga es negativa.

Dada la simetría de la distribución, al sumar sólo quedan componentes en la dirección del eje Z, ya que las perpendiculares a dicho eje se anulan. Cada carga elemental  $\sigma ds'$  tiene otra simétrica cuya componente perpendicular al eje Z es del mismo módulo y signo opuesto.

$$\mathbf{r} = 0 ; \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R ; ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Cada  $\sigma ds'$  tiene una componente en la dirección del eje Z proporcional a  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z$ .

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z = -R\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = -R \cos \theta$$

El campo debido a la semiesfera superior ( $z > 0$ ), tiene la dirección y sentido de  $-\mathbf{u}_z$ . El correspondiente a la semiesfera inferior, dado que su signo es negativo, tiene el mismo módulo dirección y sentido que el anterior; por tanto, calculando el campo correspondiente a la semiesfera superior y multiplicando por dos se obtiene el resultado correcto del problema.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y la ecuación (1.10), podemos calcular  $E_z$  de la forma siguiente:

$$E_z = \frac{-2}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sigma_o \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{R^3} R \cos \theta = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2}$$

Realizando operaciones obtenemos,

$$E_z = -\frac{\sigma_o}{3\epsilon_o} \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\sigma_o}{3\epsilon_o} \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 1.6

Sobre un plano indefinido tenemos dos distribuciones de carga. Una densidad superficial de carga uniforme  $-\sigma$  sobre un círculo de radio  $R$  y otra de signo contrario  $\sigma$  sobre el resto del plano, véase la figura P1.6.a.

Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico sobre el eje Z.

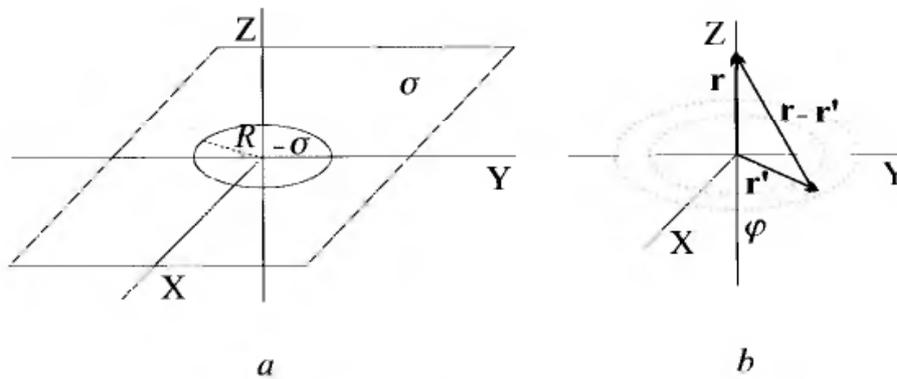


Figura P1.6

### Solución

Las distribuciones de carga propuestas son equivalentes a las siguientes: una distribución uniforme  $\sigma$  sobre todo el plano, incluido el círculo de radio  $R$ , y una distribución  $-2\sigma$  sobre el círculo de radio  $R$ . El cálculo del campo eléctrico, aplicando el principio de superposición a la distribución indicada anteriormente, es el que obtendríamos con la distribución propuesta en el problema.

Los cálculos correspondientes a cada distribución los haremos utilizando la ecuación (1.10).

#### 1) Campo debido al círculo de radio $R$ y densidad $-2\sigma$

La distribución tiene simetría cilíndrica con eje el Z. El campo eléctrico en cualquier punto del eje Z, dada la simetría de la distribución, sólo tiene componente en la dirección de dicho eje, ya que cada elemento  $-2\sigma ds'$  tiene un simétrico que produce una componente perpendicular al eje Z de signo contrario, véase la figura P1.6.b, por lo que al integrar se anulan las componentes perpendiculares al eje Z.

Como se indica en la figura P1.6.b,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z; \quad ds' = r' d\varphi dr'; \quad \mathbf{r}' = r' \cos \varphi \mathbf{u}_x + r' \sin \varphi \mathbf{u}_y$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + r'^2)^{1/2}$$

Las componentes en la dirección del eje  $Z$  son proporcionales a,

$$\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = z$$

Aplicando la ecuación (1.10) y teniendo en cuenta las condiciones particulares del problema expresadas anteriormente,

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{-2\sigma z r' d\varphi dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_o} \left[ -\frac{z}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \right]_0^R$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_o} \left( 1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

El significado de  $|z|$  es el siguiente: El campo tiene el mismo módulo, tanto para  $z > 0$  como para  $z < 0$ , pero el sentido es opuesto, el sentido de  $-\mathbf{u}_z$  para  $z > 0$  y  $\mathbf{u}_z$  para  $z < 0$ .

2) *Campo debido al plano con la distribución  $\sigma$*

El planteamiento es similar al caso anterior, lo que varía es la densidad superficial de carga y los límites de integración para  $r'$ .

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma z r' d\varphi dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left[ -\frac{z}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \right]_0^\infty$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}$$

El campo eléctrico en este caso tiene el sentido de  $\mathbf{u}_z$  en la zona de  $z > 0$ , y el de  $-\mathbf{u}_z$  para  $z < 0$ .

El campo eléctrico total será:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \mathbf{u}_z - \frac{\sigma}{\epsilon_o} \left( 1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left( \frac{2|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} - 1 \right) \mathbf{u}_z$$

El campo eléctrico para  $z < 0$  tiene el mismo módulo pero sentido opuesto al anterior.

### PROBLEMA 1.7

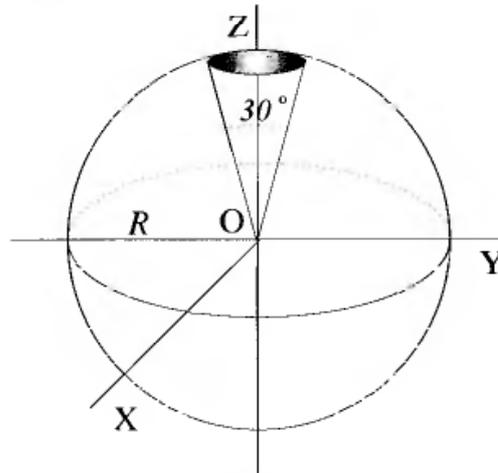
En una capa esférica se suprime un casquete esférico de  $30^\circ$ , como indica la figura P1.7. Sobre la capa, una vez separado el casquete, se distribuye uniformemente una densidad superficial de carga  $\sigma$ .

Aplicando el principio de superposición calcular el campo eléctrico en el centro de la esfera  $O$ .

**Solución**

El problema propuesto es equivalente a dos distribuciones superficiales: Una capa esférica completa con densidad uniforme  $\sigma$  y un casquete, de las mismas dimensiones que el propuesto, con una densidad  $-\sigma$ .

La aplicación del principio de superposición lleva al cálculo del campo mediante la suma de los campos creados por la capa con densidad  $\sigma$  y el casquete con densidad  $-\sigma$ .

**Figura P1.7**

El campo creado por la capa esférica con densidad  $\sigma$  en su centro es nulo, dada la simetría esférica de la distribución.

La contribución del casquete se obtiene mediante la ecuación (1.10), y la aplicación de las condiciones de simetría cilíndrica, con eje Z, que tiene dicha distribución. La simetría tiene como consecuencia que sólo existe componente del campo en la dirección del eje Z, ya que cada elemento  $-\sigma ds'$  tiene un simétrico, que produce una componente perpendicular al eje Z del mismo módulo pero de signo opuesto, con lo que al integrar se anula la componente perpendicular al eje Z.

Los distintos elementos de la ecuación (1.10) en este caso son:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R; \quad ds' = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

La componente en la dirección del eje Z es proporcional a:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z = -R\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = -R \cos\theta$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/12} \frac{\sigma R^3 \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}{R^3} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \sin^2\theta \right]_0^{\pi/12}$$

El campo  $\mathbf{E}$  en O será:

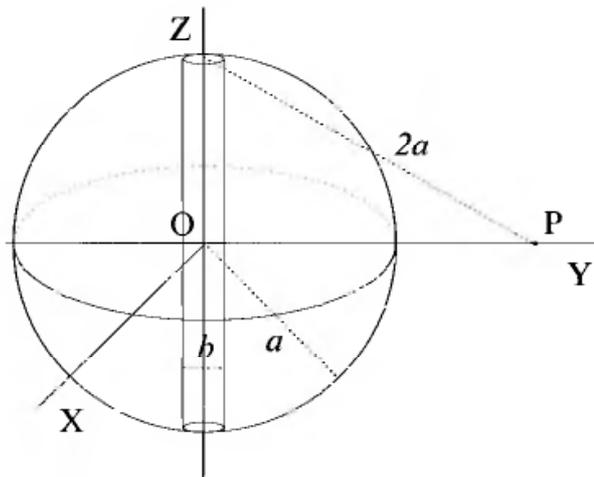
$$E_z \simeq 1,67 \times 10^{-2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{E} \simeq 1,67 \times 10^{-2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 1.8**

Una esfera de material dieléctrico, se taladra diametralmente, dejando un hueco cilíndrico de radio  $b = 10^{-2}a$ . El hueco se puede considerar filiforme en comparación con el radio  $a$  de la esfera. Véase la figura P1.8.

Sobre la esfera, salvo en el hueco cilíndrico, se distribuye una densidad de carga uniforme  $\rho$ .

Aplicando el principio de superposición calcular el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el punto P.

**Solución****Figura P1.8**

La distribución indicada en el problema es equivalente a las dos distribuciones siguientes: Una esfera con una distribución uniforme  $\rho$  y un hilo de radio  $b$  y altura  $2a$  con una densidad lineal  $\lambda$  tal que  $\lambda 2a = (-\rho)\pi b^2 2a$ , es decir,  $\lambda = -\pi b^2 \rho$ .

*1) Campo creado por la esfera*

Dicho campo es el mismo que si consideramos toda la carga sobre la esfera situada en su centro. Con los datos de la figura  $OP^2 = 4a^2 - a^2$ , es decir,  $OP = \sqrt{3}a$ , por tanto,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3a^2} \int_V \rho dv' \mathbf{u}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3a^2} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho a}{9\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

*2) Campo creado por el hilo*

Para dicho cálculo utilizamos la ecuación (1.11) y las siguientes condiciones particulares del problema:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_y ; \mathbf{r}' = z \mathbf{u}_z ; dl' = dz ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

Los límites de integración son  $-a$  y  $a$ ;  $r = \sqrt{3}a$ .

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\lambda dz (r\mathbf{u}_y - z\mathbf{u}_z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

La integración de cada componente, produce lo siguiente:

Componente  $\mathbf{u}_z$

$$E_{2z} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^2(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a = 0$$

Componente  $\mathbf{u}_y$

$$E_{2y} = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{z}{r^2(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{r(r^2 + a^2)^{1/2}}$$

Sustituyendo los valores de  $\lambda = -\pi a^2 \times 10^{-4} \rho$  y  $r = \sqrt{3}a$ ,

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho a 10^{-4} \sqrt{3}}{12\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

Sumando los valores obtenidos en 1) y 2) calculamos  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{9} - \frac{10^{-4} \sqrt{3}}{12} \right) \mathbf{u}_y \simeq 0,111 \frac{\rho a}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 1.9

Disponemos de una esfera dieléctrica de radio  $R$ . Sobre un meridiano se ha realizado un canal de sección circular; el radio de dicha sección es  $d$  ( $d \ll R$ ). Véase la figura P1.9. Sobre la esfera, excluido el canal, existe una distribución uniforme de carga  $\rho_0$ .

Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico en el punto P debido a la distribución de carga descrita.

Suponemos el radio medio del canal igual a  $R$ .

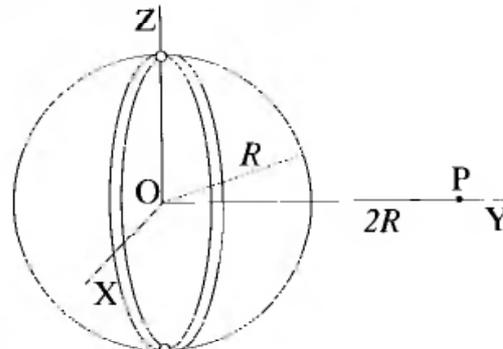


Figura P1.9

### Solución

Aplicando el principio de superposición, el sistema indicado es equivalente a una esfera uniformemente cargada con densidad  $\rho_0$ , más un anillo cuya

sección es de radio  $d$  y densidad de carga  $-\rho_o$ . El anillo ocupa la posición donde se ha abierto el canal en la esfera. Calculamos por separado los dos campos.

1) *Esfera*

Puesto que el punto P está situado fuera de la esfera. Aplicamos el campo creado por la carga de la esfera situada en O,

$$\mathbf{E}_1(y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y^2}$$

$$\mathbf{E}_1(P) = \frac{(4/3)\pi R^3 \rho_o}{4\pi\epsilon_o (2R)^2} \mathbf{u}_y = \frac{\rho_o R}{12\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

2) *Anillo*

Calculamos el campo integrando la distribución de carga que representa el anillo. Usaremos coordenadas cilíndricas, pero con el eje Y como eje del anillo. Aplicamos la siguiente ecuación para el campo,

$$\mathbf{E}_2(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

donde, en nuestro caso, y para el punto P, suponiendo que  $r' \simeq R$  ya que  $d \ll R$ .

$$\rho(\mathbf{r}') = -\rho_o ; \mathbf{r} = 2R \mathbf{u}_y ; \mathbf{r}' \simeq R \mathbf{u}_\rho$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (4R^2 + R^2)^{1/2} = R\sqrt{5} \text{ y } dv' = \pi d^2 R d\varphi$$

La integral se extiende al volumen del anillo, y la única variable es  $\varphi$ , cuyos límites son 0 y  $2\pi$ . Reescribimos la integral,

$$\mathbf{E}_2(P) = \frac{-\rho_o \pi d^2}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi (2R \mathbf{u}_y - R \mathbf{u}_\rho)}{(R\sqrt{5})^3} = \frac{-\rho_o d^2 \sqrt{5}}{4\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{(2\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_\rho) d\varphi}{25R}$$

Resolvemos la integral para cada componente de los vectores  $\mathbf{u}_\rho$  y  $\mathbf{u}_y$ , que son:

$$\int_0^{2\pi} R \mathbf{u}_\rho d\varphi = 0$$

El resultado es nulo por que se trata de la suma de vectores radiales que varían para cada ángulo de la circunferencia, de manera que  $\mathbf{u}_\rho(\varphi) = -\mathbf{u}_\rho(\varphi + \pi)$ .

$$\int_0^{2\pi} 2\mathbf{u}_y d\varphi = 2\pi 2\mathbf{u}_y = 4\pi \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\mathbf{E}_2(P) = \frac{-\rho_o \pi d^2 \sqrt{5}}{\epsilon_o 25 R} \mathbf{u}_y$$

Ahora ya podemos escribir el campo total como  $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\rho_o R}{12\epsilon_o} \mathbf{u}_y - \frac{\rho_o \pi d^2 \sqrt{5}}{\epsilon_o 25 R} \mathbf{u}_y = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left( \frac{R}{12} - \frac{\pi d^2 \sqrt{5}}{25 R} \right) \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 1.10

Sobre un sector truncado de una esfera de ángulo  $60^\circ$ , como el indicado en la figura P1.10, existe una distribución de carga uniforme  $\rho$ .

Calcular el campo eléctrico en el punto O debido a la distribución de cargas.

#### Solución

El campo eléctrico en el punto O debido a la distribución de carga dada se calcula mediante la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{V'} \frac{\rho dV' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

En este caso  $\mathbf{r} = 0$  y  $\mathbf{r}' = r' \mathbf{u}_r$ .  $dV' = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi$ . Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{-\rho r' \mathbf{u}_r r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi}{r'^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \rho \mathbf{u}_r \sin \theta dr' d\theta d\varphi$$

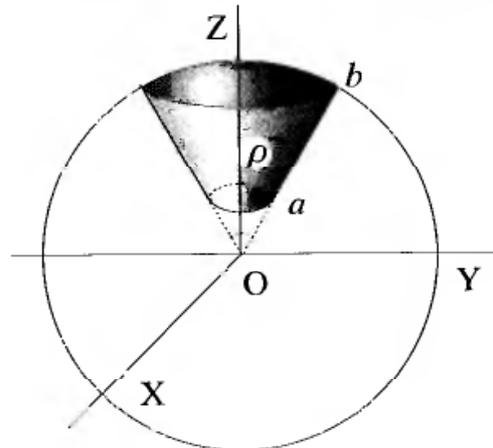


Figura P1.10

Dada la simetría de la distribución al sumar las componentes sólo nos queda la que corresponde al eje Z. O de otra manera, como  $\mathbf{u}_r$  en coordenadas cilíndricas es  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_z \cos \theta + \mathbf{u}_\rho \sin \theta$ ; al considerar todas las variaciones del ángulo  $\varphi$ ,  $\mathbf{u}_\rho$  tiene signo opuesto en  $\varphi + \pi$  con respecto al valor en  $\varphi$ , por tanto al integrar dicha componente se anula, en consecuencia,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \rho \mathbf{u}_z \cos \theta \sin \theta dr' d\theta d\varphi$$

Los intervalos de variación para  $\theta$  y  $\varphi$  son:  $\varphi$  varía entre 0 y  $2\pi$ ,  $\theta$  entre 0 y  $\pi/6$ , y  $r'$  entre  $a$  y  $b$ .

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho \mathbf{u}_z}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_a^b dr'$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho \mathbf{u}_z}{4\pi\epsilon_o} [\varphi]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin^2\theta \right]_0^{\pi/6} [r']_a^b = -\frac{\rho \mathbf{u}_z}{4\epsilon_o} (b-a) \sin^2(\pi/6)$$

La solución final para el campo es,

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho(b-a)}{16\epsilon_o} \mathbf{u}_z$$

## Capítulo 2

# CAMPO ELÉCTRICO II

## 2.1 INTRODUCCIÓN

### 2.1.1 POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Se define la diferencia de potencial entre dos puntos como el trabajo que hay que hacer contra el campo para trasladar una carga eléctrica unidad desde un punto a otro. En forma matemática:

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.1)$$

La definición de potencial en un punto requiere tomar otro como referencia. Generalmente se toma el infinito como referencia de potenciales y se le asigna el valor cero. Con esta referencia, el potencial en un punto es el trabajo realizado para trasladar una carga unidad desde el infinito al punto considerado.

El potencial eléctrico es un escalar.

*Integral de línea : Campos conservativos*

La integral de línea indicada en el segundo miembro de la ecuación (2.1), en campos electrostáticos, no depende del camino elegido para ir de 1 a 2, sólo depende de los puntos 1 y 2. Esta propiedad es característica de los campos conservativos.

En un camino cerrado los puntos 1 y 2 coinciden, por lo que la integral de línea a lo largo de un camino cerrado es nula, es decir:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.2)$$

La expresión (2.2) caracteriza a los campos conservativos.

### 2.1.2 GRADIENTE DE POTENCIAL

#### *Líneas y superficies equipotenciales*

Son aquellas en las que se mantiene el potencial constante e igual a un valor determinado.

#### *Líneas de campo*

Son líneas caracterizadas por que en cada punto el vector campo es tangente a ellas.

Las líneas de campo y las líneas o superficies equipotenciales son ortogonales entre sí, ya que sobre una equipotencial el primer miembro de la ecuación (2.1) es nulo, por tanto  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  para un intervalo diferencial  $d\mathbf{l}$ , y si  $\mathbf{E}$  es distinto de cero,  $\mathbf{E}$  debe ser perpendicular a  $d\mathbf{l}$  para que el producto escalar sea nulo.

#### *Gradiente de potencial*

Se define el módulo del gradiente de potencial en un punto como el límite del aumento de potencial  $\Delta V$  a lo largo de la longitud elemental  $\Delta l$  sobre la línea de campo dividida por  $\Delta l$  cuando  $\Delta l$  tiende a cero:

$$|\mathbf{grad} V| = |\nabla V| = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta l} = \frac{dV}{dl} \quad (2.3)$$

El gradiente es un vector cuyo módulo es el indicado en la ecuación (2.3), su dirección es la del campo eléctrico en cada punto, y puesto que una elevación del potencial se verifica cuando nos movemos en sentido contrario al campo, su sentido es opuesto al de  $\mathbf{E}$ , en forma matemática:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V = -\nabla V \quad (2.4)$$

### 2.1.3 POTENCIAL DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

#### *Superposición*

El principio de superposición aplicado a los potenciales establece que: El potencial eléctrico en un punto es la suma algebraica de los potenciales individuales en dicho punto correspondientes a cada una de las cargas elementales consideradas.

*Potencial debido a una carga puntual*

Si aplicamos la ecuación (2.1), tomando como referencia el potencial cero en el infinito, el potencial de una carga  $q$  situada en el origen de coordenadas, en un punto  $\mathbf{r}$  es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad [\text{V}] \quad (2.5)$$

*Potencial debido a una distribución de cargas puntuales*

Si cada carga  $q_i$  está situada en el punto de coordenadas  $\mathbf{r}_i$  y el punto donde se calcula el potencial es el definido por  $\mathbf{r}$ , el potencial debido a  $N$  cargas  $q_i$  es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.6)$$

*Potencial debido a distribuciones continuas de carga*

Las distribuciones que consideramos son las de volumen, superficiales y lineales. Las coordenadas donde se sitúa la carga las designamos con  $\mathbf{r}'$  y las correspondientes al punto donde se calcula el potencial por  $\mathbf{r}$ .

*Distribución volumétrica de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ :*

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.7)$$

*Distribución superficial  $\sigma(\mathbf{r}')$ :*

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.8)$$

*Distribución lineal  $\lambda(\mathbf{r}')$ :*

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.9)$$

**2.1.4 ENERGÍA POTENCIAL**

La energía potencial de una carga  $q$  situada en un punto  $\mathbf{r}$  es igual al trabajo que debemos realizar contra el campo eléctrico para llevar dicha carga desde el infinito, tomado como origen de potenciales, hasta el punto considerado.

Partiendo de la definición de potencial eléctrico,

$$W(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

### 2.1.5 CONDUCTORES EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

De una forma genérica podemos definir un conductor como un cuerpo en el que las cargas eléctricas se pueden mover libremente bajo la influencia de un campo eléctrico. Los casos más comunes son los metales como el cobre, plata, oro, aluminio, etc.

En condiciones estáticas el campo eléctrico dentro de un conductor es nulo, de lo contrario se estarían moviendo las cargas. Si el campo es nulo, la integral de línea a lo largo de cualquier camino será nula, por lo que el conductor es un volumen que está a un potencial y la superficie que lo limita es, por tanto, una superficie equipotencial. En resumen, en el interior de un conductor  $\mathbf{E} = 0$  y  $V = \text{constante}$ .

Como consecuencia de ser equipotencial la superficie del conductor, se deduce que el campo eléctrico es normal a dicha superficie en los puntos exteriores muy próximos a ella.

Cuando ponemos a un conductor en presencia de un campo eléctrico se produce, en un tiempo muy corto dependiente de su conductividad, una redistribución de las cargas libres del conductor, de forma que al terminar el proceso el campo es nulo en su interior. Estas cargas se sitúan sobre la superficie del conductor y se las conoce como cargas inducidas. Las cargas inducidas producen un campo en el interior del conductor que contrarresta el campo exterior, de forma que el campo electrostático en el interior es cero.

### 2.1.6 TEOREMA DE GAUSS

#### *Forma integral*

El teorema de Gauss establece que la integral del vector intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  sobre una superficie cerrada, es decir, el flujo de  $\mathbf{E}$  a través de la superficie cerrada es igual a la suma de todas las cargas que encierra dicha superficie. En forma matemática:

#### *Cargas puntuales*

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_1^N q_i \quad (2.11)$$

*Distribución continua de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ ,*

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (2.12)$$

El volumen  $V$  que figura en la integral es el limitado por la superficie cerrada  $S$ .

El teorema de Gauss es una consecuencia de la ley de Coulomb y la definición del campo eléctrico, que establece una dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia.

La aplicación del teorema para calcular el campo  $\mathbf{E}$  requiere tomar superficies sobre las que el módulo  $E$  permanece constante y  $\mathbf{E}$  es perpendicular o paralelo a la normal de dicha superficie.

*Forma diferencial*

Aplicando el teorema de la divergencia en la ecuación (2.12) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.13)$$

Dicha ecuación expresa que la divergencia del campo eléctrico en un punto es igual a la densidad de carga en ese punto, es decir,  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  es una función del punto considerado.

### 3.8 PROBLEMAS

#### P 3.1

Sobre tres vértices de un cuadrado se sitúan tres cargas puntuales, cuyos valores y posiciones respectivas están indicados en la figura P3.1.

- 1) Calcular el campo y potencial sobre el eje de ordenadas Y.
- 2) Calcular la fuerza sobre un carga de prueba  $Q$  en el punto A,  $OA = d\sqrt{2}$ .

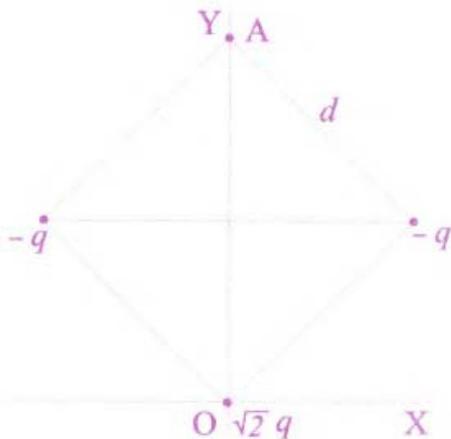


Figura P3.1

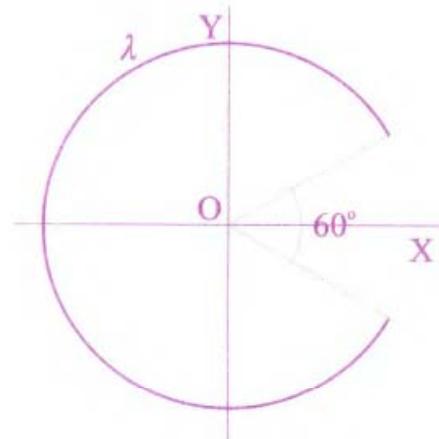


Figura P3.3

#### P 3.2

Sobre un disco de radio  $R$  situado en el plano  $XY$ , cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, se distribuye una carga superficial que varía radialmente de la forma siguiente:

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_0(\rho/R)^2 & \text{para } \rho < R \\ 0 & \text{para } \rho \geq R \end{cases}$$

Calcular el potencial y campo sobre los puntos de la parte positiva del eje Z.

#### P 3.3

Dada la distribución lineal de carga  $\lambda$  sobre un arco de circunferencia, de radio  $R$  y ángulo  $300^\circ$ , véase la figura P3.3, calcular el campo y potencial eléctrico en el centro O.

#### P 3.4

Dada la distribución de carga indicada en la figura P3.4, donde,

$$\lambda = \lambda_0(1 + \cos \varphi)$$

- 1) Calcular el potencial y el campo electrostático en el origen de coordenadas.

2) Determinar el trabajo necesario para trasladar una carga  $Q$  desde el infinito hasta el origen.

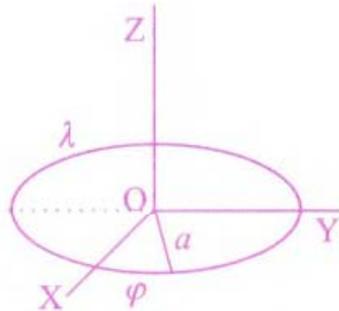


Figura P3.4

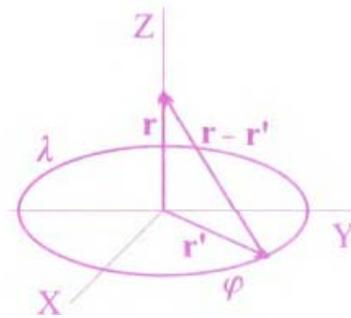


Figura P3.5

**P 3.5**

Sobre una circunferencia de radio  $R$ , situada en el plano  $XY$ , se distribuye una densidad lineal de carga  $\lambda = \lambda_0 \sin^2 \varphi$ .

Calcular potencial y campo sobre el eje  $Z$ .

**P 3.6**

Dos potenciales están definidos por:  $\phi = 2x - 4$ ; y  $\phi' = -x^2 + 4$ .

Representar gráficamente las equipotenciales de ambos.

Calcular el campo correspondiente a cada potencial. ¿Cuáles son las diferencias más importantes entre los dos campos?

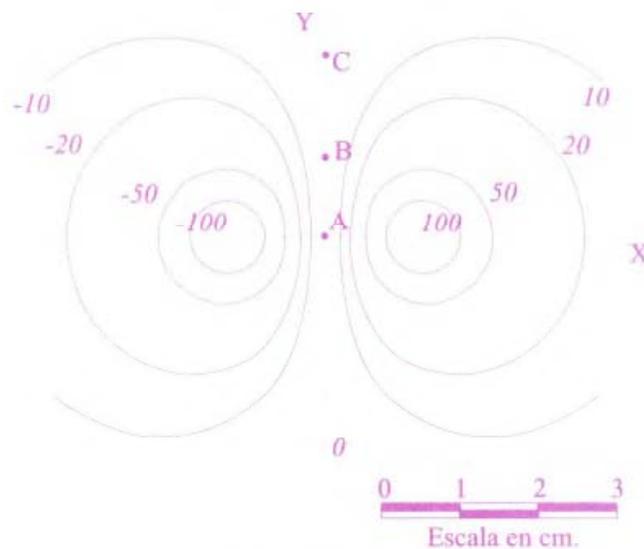


Figura P3.7

**P 3.7**

Mediante un dispositivo para la medida de diferencias de potencial (d.d.p.), hemos obtenido la representación gráfica indicada en la figura P3.7.

- 1) Dibujar las líneas de campo.
- 2) Mediante la aproximación  $E \simeq \Delta V/\Delta d$  entre dos equipotenciales, calcular  $\mathbf{E}$  en los puntos A, B y C indicados en la figura P3.7. ¿En qué punto de los indicados se comete más error al calcular el campo?

**P 3.8**

Sobre una esfera de radio  $R$  tenemos una distribución uniforme de carga  $\rho_o$ . Por un cilindro diametral, de radio tan pequeño que prácticamente no perturba la distribución de carga, se puede mover una carga puntual  $-q$  de masa  $m$ .

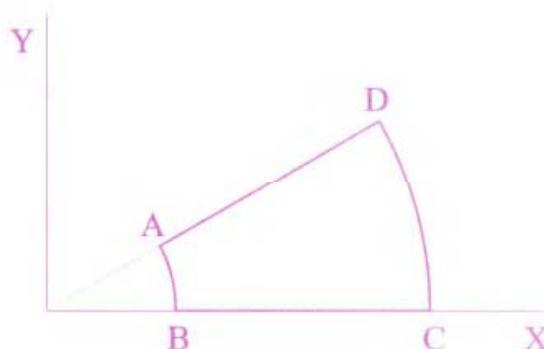
Establecer la ecuación que gobierna el movimiento de la carga puntual. Resolver dicha ecuación y establecer los puntos del recorrido donde se hace máxima la velocidad y la aceleración.

**Nota :** Suponemos despreciable la fuerza gravitatoria.

**P 3.9**

Dado el campo vectorial  $\mathbf{F} = (K/r) \mathbf{u}_r$

- 1) Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  sobre la recta AD y sobre el camino ABCD indicado en la figura P3.9.
- 2) ¿Cumple el campo  $\mathbf{F}$  las condiciones requeridas para que sea un campo electrostático?



**Figura P3.9**

**P 3.10**

Sobre una esfera tenemos una distribución superficial de carga  $\sigma = \sigma_o \cos \theta$ . ¿Se puede aplicar el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera?

**P 3.11**

Sobre una esfera de radio  $R$  tenemos una distribución de carga cuya densidad es  $\rho = Ar$  ( $C/m^3$ ).

Calcular el campo eléctrico en función de  $r$ .

**P 3.12**

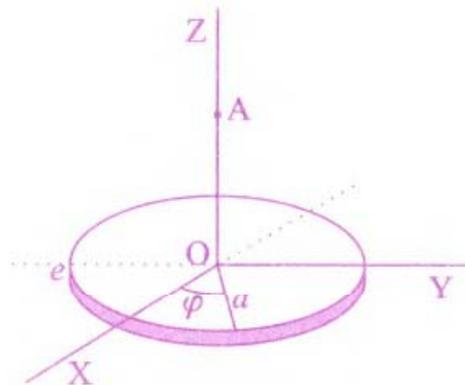
Dada la distribución volumétrica de carga:

$$\rho = \rho_o \left( \frac{3}{4} - \frac{r}{a} \right) \quad \text{para } 0 \leq r \leq a ; \quad \rho = 0 \quad \text{para } r > a$$

Calcular el campo  $\mathbf{E}(r)$  y dibujar una gráfica de  $|\mathbf{E}|$  en función de  $r$ .

**P 3.13**

Sea un disco de radio  $a$  y espesor  $e$ , con  $e \ll a$ , (figura P3.13) y con una densidad de carga  $\rho = \rho_o$ . Calcular el potencial y el campo electrostático en el punto  $A(0, 0, a)$ . Determinar el trabajo necesario para trasladar una carga  $Q$  desde el infinito hasta este punto.



**Figura P3.13**

**P 3.14**

Dada la distribución esférica de carga:

$$\rho = \begin{cases} \rho_o (r/a)^{1/2} & \text{para } a/2 \leq r \leq a \\ 0 & \text{para } r > a \text{ y } r < a/2 \end{cases}$$

Calcular el campo y potencial en función de  $r$ .

Dibujar un gráfico aproximado de  $E$  y  $V$  en función de  $r$ .

**P 3.15**

Sobre dos placas paralelas e indefinidas, separadas por una distancia  $d$ , se distribuyen respectivamente las densidades de carga superficiales:  $\sigma_1 = 2 C/m^2$ ,  $\sigma_2 = 4 C/m^2$ .

Calcular el campo entre los dos planos y en el espacio a derecha e izquierda de los mismos.

**P 3.16**

Sobre una placa dieléctrica, de espesor  $2a$  e indefinida en las otras dos direcciones, se distribuye una densidad de carga:

$$\rho = \begin{cases} \rho_o(1 - |y|/a) & \text{para } 0 \leq |y| \leq a \\ 0 & \text{para } |y| > a \end{cases}$$

Calcular el campo  $\mathbf{E}(y)$ .

**P 3.17**

Dada la distribución de carga en el entorno del plano XZ, determinada por la siguiente densidad,

$$\rho = \begin{cases} \rho_o(y/d) & \text{para } |y| \leq d \\ 0 & \text{para } |y| \geq d \end{cases}$$

que únicamente es función de la coordenada  $y$ .

Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje Y. Obtener el potencial electrostático en la zona comprendida entre  $-d$  y  $d$  ( $-d \leq y \leq d$ ), tomando como referencia el potencial en  $y = -d$ .

**P 3.18**

Tenemos un cilindro indefinido de radio  $a$ , sobre él se distribuye una densidad de carga  $\rho = \rho_o \sin(\pi r/a)$ , siendo  $\rho = 0$  para  $r > a$ .

1) Calcular el campo eléctrico para  $0 \leq r \leq a$ .

2) Si ponemos una carga negativa sobre el eje del cilindro. ¿Será estable la situación de equilibrio de la carga?

**P 3.19**

La intersección de dos esferas de radio  $R = OO'$ , se muestra en la figura P3.19. Sobre la zona exterior a la intersección se distribuye una densidad de carga en la forma siguiente: Una densidad de carga uniforme positiva  $\rho$  sobre el volumen exterior a la intersección de la esfera con centro en O; y una densidad de carga negativa  $-\rho$  sobre el volumen exterior a la intersección de la esfera con centro en O'.

1) Calcular el campo eléctrico en los puntos del segmento OO'.

2) Calcular el campo eléctrico en los puntos del segmento AB.

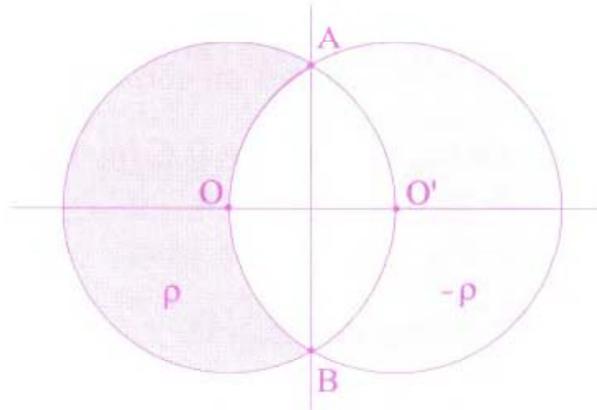


Figura P3.19

**P 3.20**

Tenemos dos esferas superpuestas de radio  $a$ , cuyos centros respectivos  $O_1$  y  $O_2$  están sobre el eje  $Y$  como muestra la figura P3.20. La distancia entre los centros es  $l = 4a/3$ . En la zona sombreada de la izquierda se distribuye una densidad de carga uniforme  $\rho$ , y en la de la derecha un densidad de carga uniforme  $-\rho$ . Calcular el campo electrostático en los puntos A y B indicados en la figura.

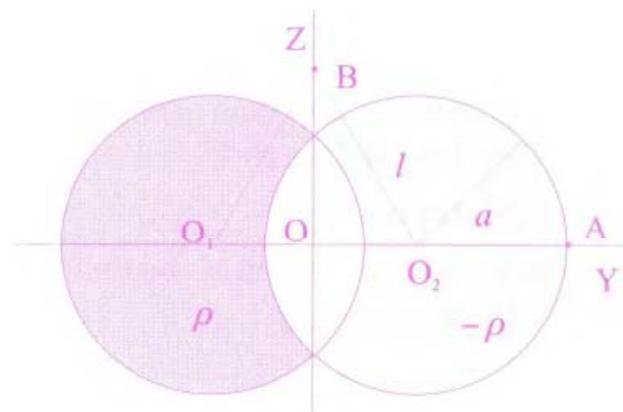


Figura P3.20

**P 3.21**

En el centro de una placa dieléctrica, de espesor  $d$  e indefinida en las otras direcciones, existe un hueco esférico de radio  $a$ . Sobre la placa, excepto en el hueco, se distribuye uniformemente una carga cuya densidad es  $\rho$ .

Calcular el campo en el punto A, figura P3.21, a una distancia  $d/2$  de la placa.

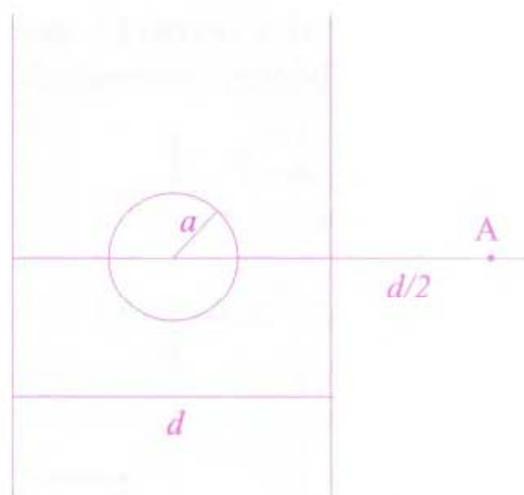


Figura P3.21

**P 3.22**

Tenemos una esfera de radio  $a$  dentro de la cual hay un hueco en forma de sector circular truncado de ángulo  $60^\circ$  y comprendido entre los radios  $a$  y  $b$ , véase la figura P3.22. Sobre la esfera, salvo en el hueco, se distribuye una carga cuya densidad es  $\rho$ .

Calcular el campo y potencial en el punto  $P$  situado en el vértice del sector circular vacío.

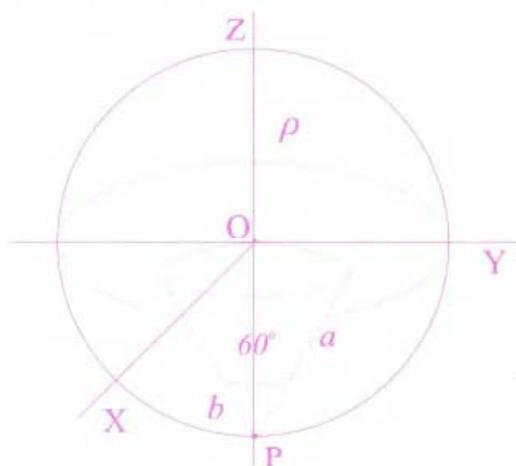


Figura P3.22

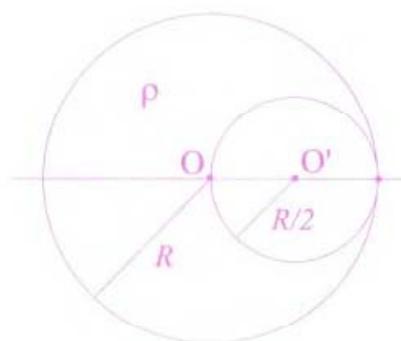


Figura P3.23

**P 3.23**

Teniendo en cuenta que el valor medio del campo en un volumen  $V$  es  $\langle \mathbf{E} \rangle = (1/V) \int_V \mathbf{E}(r) dv$ , calcular el valor medio de  $\mathbf{E}$  en los casos siguientes:

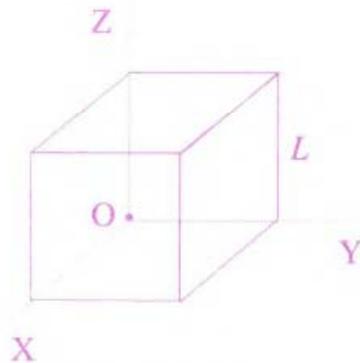
1) Dentro de la esfera vacía de radio  $R/2$  y centro en  $O'$ , véase la figura P3.23, cuando el volumen exterior a dicha esfera e interior a la de radio  $R$

y centro en  $O$  tiene una distribución uniforme de carga cuya densidad es  $\rho$ .

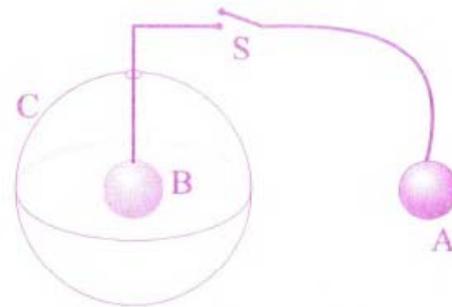
2) Dentro de la esfera de radio  $R$  y centro  $O$ , cuando la esfera de centro en  $O'$  y radio  $R/2$  tiene una distribución uniforme de carga con densidad  $\rho$ , véase la figura P3.23.

**P 3.24**

En el espacio tenemos un potencial  $\phi = 2x + 3$ . Comprobar que el valor medio de dicho potencial sobre la superficie del cubo indicado en la figura P3.24 es igual al valor del citado potencial en el centro del cubo.



**Figura P3.24**



**Figura P3.25**

**P 3.25**

Disponemos de tres esferas metálicas A, B y C; A y B del mismo radio y C hueca con radio diez veces superior a B. Las esferas están dispuestas como indica la figura P3.25. La esfera A está muy alejada de C y B, pero unida con B a través de un hilo conductor y el interruptor S, sin que B haga contacto con C.

Con el interruptor S abierto se aplica a la esfera A una carga  $Q$ , y a continuación se cierra el interruptor S. ¿Qué carga se induce en las caras interna y externa de C?

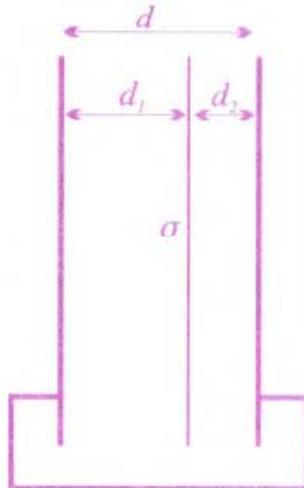
Se abre S y durante un instante unimos C a tierra (potencial cero). Después retiramos el contacto dejando la esfera C aislada de nuevo. ¿Qué ocurre con la carga en C?

Finalmente se une A a tierra y se cierra S. ¿Cuál será la carga de las tres esferas?

**P 3.26**

Entre dos planos conductores indefinidos, separados por una distancia  $d$  y unidos por un conductor, se sitúa sobre otro plano, una distribución de carga superficial  $\sigma$  como indica la figura P3.26.  $d_1 = 2d_2$ .

Calcular el campo eléctrico entre las placas y la densidad de carga inducida en cada una de ellas.



**Figura P3.26**

## 2.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 2.1

Sobre tres vértices de un cuadrado se sitúan tres cargas puntuales, cuyos valores y posiciones respectivas están indicados en la figura P2.1.

- 1) Calcular el campo y potencial sobre el eje de ordenadas Y.
- 2) Calcular la fuerza sobre un carga de prueba  $Q$  en el punto A,  $OA = d\sqrt{2}$ .

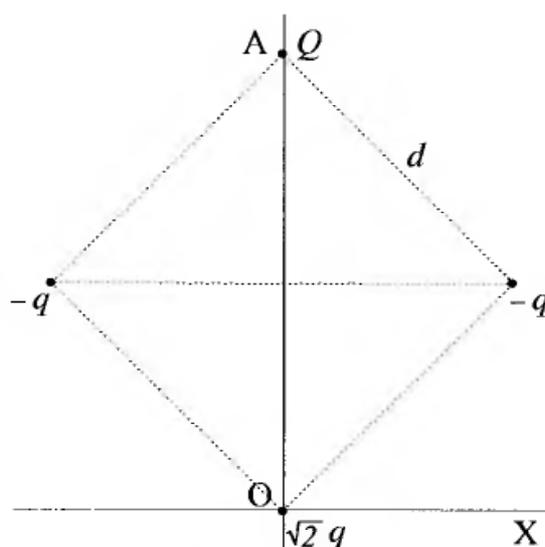


Figura P2.1

#### Solución

##### 1.1) Campo eléctrico

Se trata de una distribución de cargas puntuales dispuestas con simetría con respecto al eje Y. Para el cálculo de  $\mathbf{E}$  aplicaremos la ecuación (1.7) del capítulo anterior.

En este caso  $\mathbf{r} = y\mathbf{u}_y$

carga  $\sqrt{2}q$   $\mathbf{r}_1 = 0$ ; carga  $-q$  derecha  $\mathbf{r}_2 = d(\cos\alpha\mathbf{u}_x + \text{sen}\alpha\mathbf{u}_y)$

carga  $-q$  izquierda  $\mathbf{r}_3 = d(\cos(\pi - \alpha)\mathbf{u}_x + \text{sen}(\pi - \alpha)\mathbf{u}_y)$

$$\alpha = 45^\circ \rightarrow \cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) = \sqrt{2}/2 \quad ; \quad \text{sen}\alpha = \text{sen}(\pi - \alpha) = \sqrt{2}/2$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = y\mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = -d\cos\alpha\mathbf{u}_x + (y - d\text{sen}\alpha)\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = d\cos\alpha\mathbf{u}_x + (y - d\text{sen}\alpha)\mathbf{u}_y$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = y \quad ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = (y^2 - d\sqrt{2}y + d^2)^{1/2}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (1.7) obtenemos  $\mathbf{E}$ . Por la simetría de la distribución las componentes en  $\mathbf{u}_x$  se anulan al sumar, por tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sqrt{2}q}{y^2} - \frac{q(2y - d\sqrt{2})}{(y^2 - d\sqrt{2}y + d^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_y$$

1.2) Potencial eléctrico

Aplicamos la ecuación (2.6) teniendo en cuenta los valores calculados anteriormente para  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sqrt{2}q}{|y|} - \frac{2q}{(y^2 - d\sqrt{2}y + d^2)^{1/2}} \right)$$

2) La fuerza en cada punto es  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$

$$\mathbf{F}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sqrt{2}q}{y^2} - \frac{q(2y - d\sqrt{2})}{(y^2 - d\sqrt{2}y + d^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_y$$

como  $y = d\sqrt{2}$

$$\mathbf{F}_Q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}Qq}{2} \frac{1}{d^2} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 2.2

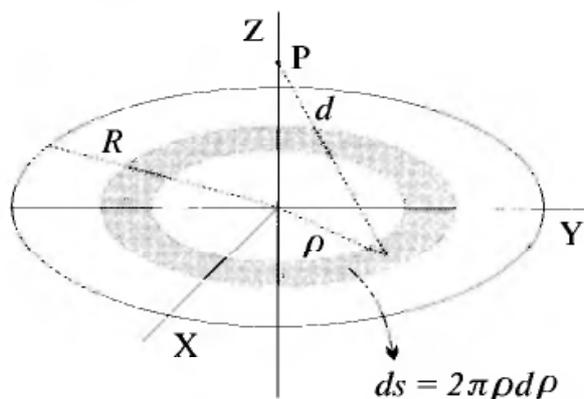
Sobre un disco de radio  $R$  situado en el plano  $XY$ , cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, se distribuye una carga superficial que varía radialmente de la forma siguiente:

$$\sigma(\rho) = \sigma_0(\rho/R)^2 \quad \text{para } \rho < R$$

$$\sigma(\rho) = 0 \quad \text{para } \rho \geq R$$

Calcular el potencial y campo sobre los puntos de la parte positiva del eje  $Z$ .

**Solución**



**Figura P2.2**

Se trata de una distribución superficial con simetría cilíndrica de eje  $Z$ . Para calcular el potencial sobre el eje  $Z$  utilizamos la ecuación (2.8) con los

siguientes valores para las coordenadas:

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r}' = \rho\mathbf{u}_\rho ; \quad ds' = \rho d\varphi d\rho$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\mathbf{u}_z - \rho\mathbf{u}_\rho ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + \rho^2)^{1/2}$$

En este caso la ecuación (2.8) queda de la forma:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma_o(\rho/R)^2 \rho d\varphi d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{1/2}} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \frac{1}{R^2} \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{1/2}}$$

$$V(z) = \frac{\sigma_o}{6\epsilon_o} \frac{1}{R^2} \left( \frac{3R^2}{2} (z^2 + R^2)^{1/2} - 2z^2 (z^2 + R^2)^{3/2} + 2z^3 \right)$$

Calculamos el campo mediante la relación entre potencial y campo determinada por la ecuación (2.4). Como se trata de obtener el campo sobre el eje Z, y dada la simetría del problema, sólo existe componente  $z$ , lo que se pone de manifiesto si observamos que  $V(z)$  sólo depende de  $z$ ; por tanto el único término distinto de cero de  $\nabla V$  es la componente sobre el eje Z.

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma_o}{6\epsilon_o R^2} \left\{ -R^2 z (z^2 + R^2)^{-1/2} + 2z^3 (z^2 + R^2)^{-1/2} + 4z (z^2 + R^2)^{1/2} - 6z^2 \right\}$$

Realizando operaciones tenemos,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o R^2} \frac{z \left( z - (z^2 + R^2)^{1/2} \right)^2}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 2.3

Dada la distribución lineal de carga  $\lambda$  sobre un arco de circunferencia, de radio  $R$  y ángulo  $300^\circ$ , véase la figura P2.3, calcular el campo y el potencial eléctrico en el centro O.

#### Solución

##### 1) Campo eléctrico

Se aplica la ecuación del campo en función de una distribución lineal de carga

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_a^b \frac{\lambda dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donde, para nuestro sistema, tenemos  $\mathbf{r} = 0$ ,  $\mathbf{r}' = R\mathbf{u}_\rho$ ,  $dl = R d\varphi$  y los límites de integración los fijamos, de acuerdo con la figura, entre  $\varphi = \pi/6$  y  $\varphi = 11\pi/6$ .

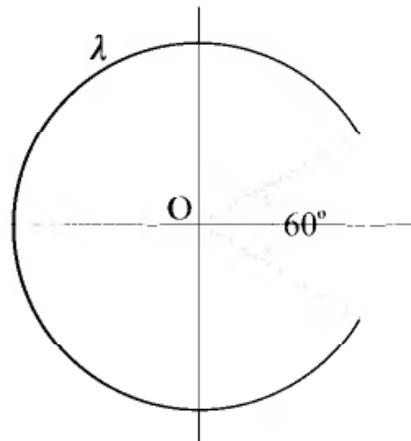


Figura P2.3

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\pi/6}^{11\pi/6} (-\mathbf{u}_\rho) R \frac{\lambda R d\varphi}{R^3} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o R} \int_{\pi/6}^{11\pi/6} \mathbf{u}_\rho d\varphi$$

Ahora escribimos el vector que gira,  $-\mathbf{u}_\rho$ , en función de vectores cartesianos

$$\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \operatorname{sen} \varphi$$

y sustituimos,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o R} \int_{\pi/6}^{11\pi/6} (-\mathbf{u}_x \cos \varphi - \mathbf{u}_y \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \\ \int_{\pi/6}^{11\pi/6} \cos \varphi d\varphi &= \operatorname{sen} \left( \frac{11\pi}{6} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) = -1 \\ \int_{\pi/6}^{11\pi/6} \operatorname{sen} \varphi d\varphi &= - \left( \cos \left( \frac{11\pi}{6} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Vemos que la componente sobre el eje Y se anula dada la simetría de la distribución.

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o R} \mathbf{u}_x$$

## 2) Potencial eléctrico

La expresión que se aplica ahora es,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_a^b \frac{\lambda dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

donde sustituimos los valores que hemos usado en el caso anterior:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\pi/6}^{11\pi/6} \frac{\lambda R d\varphi}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{5}{3} \pi \\ V &= \frac{5}{12} \frac{\lambda}{\epsilon_o} \end{aligned}$$

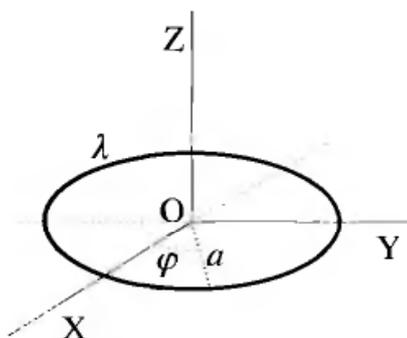
**PROBLEMA 2.4**

Dada la distribución de carga indicada en la figura P2.4, donde

$$\lambda = \lambda_o(1 + \cos \varphi)$$

1) Calcular el potencial y el campo electrostático en el origen de coordenadas.

2) Determinar el trabajo necesario para trasladar una carga  $Q$  desde el infinito hasta el origen.



**Figura P2.4**

**Solución**

1) *Potencial y campo*

Aplicamos la fórmula del potencial en función de la distribución de carga.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\lambda dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

con,

$$\mathbf{r} = 0 ; \quad \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a\mathbf{u}_\rho ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a$$

$$\lambda(\varphi)dl' = \lambda(\varphi)a d\varphi = \lambda_o a (1 + \cos \varphi) d\varphi$$

Sustituyendo,

$$V(0) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o a} a \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi = \frac{\lambda_o}{2\epsilon_o}$$

Calculamos el campo eléctrico utilizando la siguiente expresión,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\lambda dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Sustituyendo vectores de posición y carga por las expresiones del caso anterior,

$$\mathbf{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\lambda_o a (1 + \cos \varphi) d\varphi}{a^3} (-a\mathbf{u}_\rho) = -\frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o a} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) \mathbf{u}_\rho d\varphi$$

Se pone  $\mathbf{u}_\rho$  en función de vectores unitarios en cartesianas,  $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi$ . Dados los límites de integración, de todos los términos  $\sin \varphi$  y  $\cos \varphi$

que aparecen en el integrando sólo el multiplicado por  $\cos^2 \varphi$  es distinto de 0.

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = 0 ; \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi) d\varphi = \pi$$

$$\mathbf{E}(0) = -\frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o a} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_x \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{\lambda_o}{4\epsilon_o a} \mathbf{u}_x$$

2) Trabajo

El trabajo necesario para traer una carga  $Q$  desde infinito a 0 es  $QV(0)$ ,

$$W = \frac{Q\lambda_o}{2\epsilon_o}$$

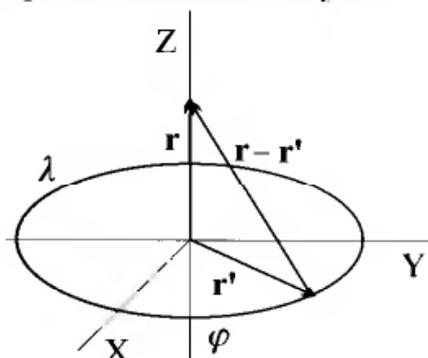
### PROBLEMA 2.5

Sobre una circunferencia de radio  $R$ , se distribuye una densidad lineal de carga  $\lambda = \lambda_o \sin^2 \varphi$ .

Calcular potencial y campo sobre el eje  $Z$ .

**Solución**

Como es una distribución lineal de carga utilizaremos la ecuación (2.9) con los siguientes valores para coordenadas y  $dl'$ :



**Figura P2.5**

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_\rho ; dl' = R d\varphi$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\mathbf{u}_z - R\mathbf{u}_\rho ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + R^2)^{1/2}$$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_o R \sin^2 \varphi d\varphi}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{\lambda_o R}{4\pi\epsilon_o (z^2 + R^2)^{1/2}} \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$V(z) = \frac{\lambda_o R}{4\epsilon_o (z^2 + R^2)^{1/2}}$$

El campo eléctrico se obtiene mediante la ecuación (2.4). En este caso sólo tiene componente en la dirección del eje  $Z$ , dado que  $V$  sólo depende de  $z$ .

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda_o R z}{4\epsilon_o(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 2.6**

Dos potenciales están definidos por:

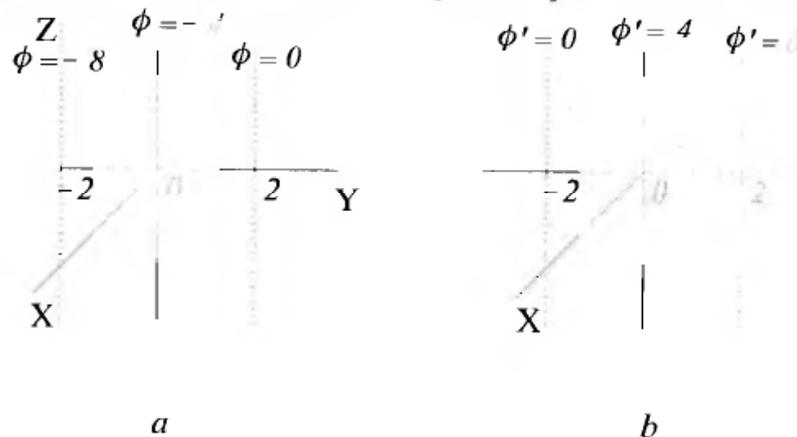
$$\phi = 2x - 4; \text{ y } \phi' = -x^2 + 4$$

Representar gráficamente las equipotenciales de ambos.

Calcular el campo correspondiente a cada potencial. ¿Cuáles son las diferencias más importantes entre los dos campos?

**Solución**

La representación de las superficies equipotenciales está indicada en las figura 2.6a y 2.6b; son respectivamente planos paralelos al YZ.

**Figura P2.6**

El campo para  $\phi$  solo tiene componente en X, dado que  $\phi = \phi(x)$ .

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{u}_x = -2\mathbf{u}_x$$

El campo para  $\phi'$  se obtiene de forma similar y únicamente tiene componente en X, dado que  $\phi' = \phi'(x)$ .

$$\mathbf{E}' = -\nabla\phi' = -\frac{\partial\phi'}{\partial x}\mathbf{u}_x = 2x\mathbf{u}_x$$

La diferencia más importante es que  $\mathbf{E}$  es uniforme y  $\mathbf{E}'$  depende en módulo y signo de la coordenada  $x$ .

**PROBLEMA 2.7**

Mediante un dispositivo para la medida de diferencias de potencial (d.d.p.), hemos obtenido la representación gráfica indicada en la figura P2.7.1.

1) Dibujar las líneas de campo.

2) Mediante la aproximación  $E \simeq \Delta V/\Delta d$  entre dos equipotenciales, calcular  $\mathbf{E}$  en los puntos A, B y C indicados en la figura P2.7.1. ¿En qué punto de los indicados se comete más error al calcular el campo?

### Solución

1) Para dibujar las líneas de campo se trazan segmentos normales a las equipotenciales, de forma que obtengamos una red de líneas ortogonales. En la figura P2.7.2 se representan las líneas equipotenciales y de campo.

2) En cada uno de los puntos indicados se toma la equipotencial que pasa por el punto y la más próxima; medimos la distancia más corta entre las dos equipotenciales utilizando el punto considerado como uno de los extremos. Para obtener  $E$  aplicamos la relación  $E = \Delta V/\Delta d$ ,

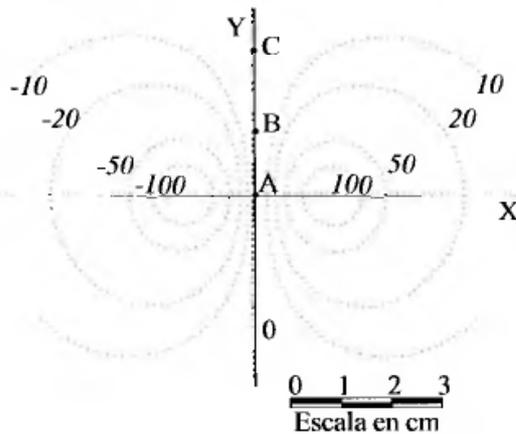


Figura P2.7.1

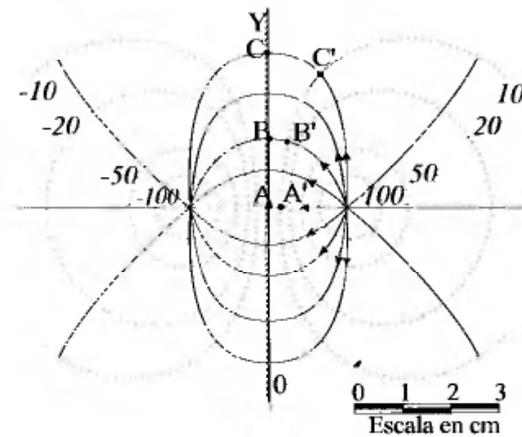


Figura P2.7.2

$$E_A = \frac{\Delta V}{\Delta d} = \frac{5 \text{ V}}{0,4 \text{ cm}} = 1250 \text{ [V/m]}$$

$$E_B = \frac{\Delta V}{\Delta d} = \frac{5 \text{ V}}{0,5 \text{ cm}} = 1000 \text{ [V/m]}$$

$$E_C = \frac{\Delta V}{\Delta d} = \frac{5 \text{ V}}{1,5 \text{ cm}} = 333,3 \text{ [V/m]}$$

En el punto C se comete un error mayor que en el B, y en los dos anteriores más que en el punto A, por que el cálculo aproximado se hace tomando la medida de los segmentos de recta AA', BB' y CC', siendo los caminos definidos por las líneas de campo ligeramente diferentes. La diferencia es mayor en el punto C que en el B, y en ambos mayor que en el A.

### PROBLEMA 2.8

Sobre una esfera de radio  $R$  tenemos una distribución uniforme de carga  $\rho_0$ . Por un cilindro diametral, de radio tan pequeño que prácticamente no

perturba la distribución de carga, se puede mover una carga puntual  $-q$  de masa  $m$ .

Establecer la ecuación que gobierna el movimiento de la carga puntual. Resolver dicha ecuación y establecer los puntos del recorrido donde se hace máxima la velocidad y la aceleración.

**Nota :** Suponemos despreciable la fuerza gravitatoria.

### Solución

El movimiento se hace sobre un diámetro, luego la coordenada que varía es  $r$ .

La fuerza  $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$ , por tanto debemos calcular  $\mathbf{E}$ .

Dada la simetría esférica de la distribución podemos aplicar el teorema de Gauss para calcular  $\mathbf{E}$ . En este caso la ecuación aplicable es la ecuación (2.12).

Tomamos coordenadas esféricas, donde:

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r ; ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi ; dv' = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Como la distribución de carga es uniforme, y  $\mathbf{E}$  tiene la misma dirección que la normal a la superficie esférica de radio  $r$  considerada, las integrales respectivas quedan de la forma:

$$4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \mathbf{u}_r$$

La fuerza  $\mathbf{F}$  siempre se dirige hacia el centro de la esfera, pues siempre tiene sentido contrario a  $\mathbf{u}_r$ .

*Ecuación diferencial:*

$$-qE_r = m \frac{d^2 r}{dt^2} ; m \frac{d^2 r}{dt^2} = -q \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$$

Si consideramos  $K^2 = (q\rho_0/3\epsilon_0 m)$ , la ecuación diferencial queda de la forma:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -K^2 r$$

Para encontrar la solución ensayamos la siguiente:  $r = R \cos \omega t$ .

Obtenemos las derivadas primera y segunda de la solución propuesta:

$$\frac{dr}{dt} = -R\omega \sin \omega t ; \frac{d^2 r}{dt^2} = -R\omega^2 \cos \omega t$$

Llevamos el valor obtenido para la derivada segunda a la ecuación diferencial y obtenemos la siguiente relación entre  $K$  y  $\omega$ :

$$-R\omega^2 \cos \omega t = -K^2 R \cos \omega t \rightarrow K^2 = \omega^2$$

Condiciones iniciales:

Suponemos que para  $t = 0$  la carga  $-q$  está en  $r = R$  y en reposo,  $v = 0$ . La solución, sustituyendo  $\omega$  por  $K$  es:

$$r = R \cos Kt$$

Puntos de máxima velocidad:

$$v = \frac{dr}{dt} = -RK \operatorname{sen} Kt$$

La velocidad será máxima cuando  $\operatorname{sen} Kt = 1$ , es decir, para

$$Kt = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

que corresponde a los puntos en que  $r = 0$ , centro de la esfera.

La aceleración es máxima cuando  $\operatorname{cos} Kt = 1$ , es decir, para

$$Kt = n\pi$$

que corresponde a puntos donde  $|r| = R$ , superficie de la esfera.

### PROBLEMA 2.9

Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{K}{r} \mathbf{u}_r$$

1) Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  sobre la recta AD y sobre el camino ABCD indicado en la figura P2.9.

2) ¿Cumple el campo  $\mathbf{F}$  las condiciones requeridas para que sea un campo electrostático?

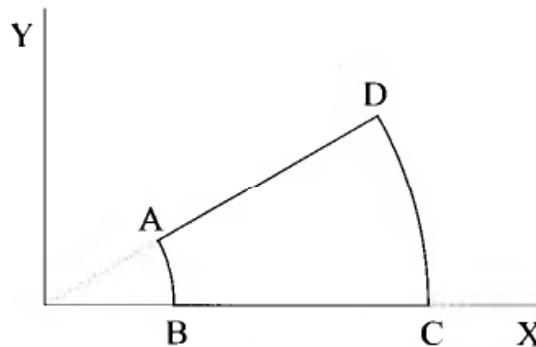


Figura 2.9

### Solución

1) Cálculo de la integral de línea

$d\mathbf{l} = dr \mathbf{u}_r$ , por tanto, en el caso de la recta AD:

$$\int_{AD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AD} \frac{K}{r} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r dr = K [\ln r]_{r_A}^{r_D} = K \ln \frac{r_D}{r_A}$$

Para el camino ABCD:

$$\int_{ABCD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_{CD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_3$$

$d\mathbf{l}_1$  es perpendicular a  $\mathbf{u}_r$  por tanto a  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_1 = 0$ , y como consecuencia la integral sobre el camino AB es nula.

$d\mathbf{l}_3$  es perpendicular a  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_3 = 0$ , por tanto la integral sobre el camino CD es nula.

$d\mathbf{l}_2 = dr\mathbf{u}_r$ , por lo que la integral sobre el camino BC es:

$$\int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_2 = \int_{r_B}^{r_C} \frac{K}{r} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r dr = K \ln \frac{r_C}{r_B} = K \ln \frac{r_D}{r_A}$$

De los cálculos realizados se deduce que:

$$\int_{ABCD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = K \ln \frac{r_D}{r_A}$$

## 2) Campo electrostático

Para que un campo vectorial cumpla las condiciones de campo electrostático, deben verificarse dos condiciones:

- Que  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , campo irrotacional o conservativo.
- Cumplir el teorema de Gauss.

Para ver si se cumple la condición a) vamos a utilizar los cálculos realizados en el apartado 1).

Las expresiones calculadas en dicho apartado ponen de manifiesto que la integral de línea sobre un camino cerrado ABCDA es nula, ya que la integral sobre ABCD es igual que la integral sobre AD y de signo opuesto a la integral sobre DA. Es decir,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

El cumplimiento de la condición b) requiere calcular el flujo del vector  $\mathbf{F}$  sobre una superficie cerrada. Como el campo  $\mathbf{F}$  tiene una singularidad en el origen de coordenadas,  $r = 0$ , vamos a calcular el flujo sobre una esfera de radio  $r$  y centro en el origen.

El área elemental es  $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r$ , por tanto:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r \frac{K}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi K r [-\cos\theta]_0^\pi$$

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi K r$$

El flujo del campo  $\mathbf{F}$  depende del radio de la esfera considerado. No existen distribuciones infinitas en extensión, por tanto no hay distribución de carga que dé lugar a un flujo tanto mayor cuanto más grande sea el radio

de la esfera considerado, cualquiera que sea este radio; de esto se deduce que el campo  $\mathbf{F}$  no cumple el teorema de Gauss y en consecuencia  $\mathbf{F}$  no puede ser un campo electrostático. Si fuera electrostático este flujo sería constante a partir de un valor del radio, valor determinado por la distribución finita de carga  $\rho(r)$  considerada.

### PROBLEMA 2.10

Sobre una esfera tenemos una distribución superficial de carga  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ . ¿Se puede aplicar el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera?

#### Solución

Para poder calcular el campo mediante el teorema de Gauss, es necesario que pueda establecerse una superficie que rodee la distribución sobre la que el campo tenga módulo constante y sea normal en cada punto; estas superficies se denominan Superficies Gaussianas.

Aquí el módulo varía por tanto no se puede establecer la superficie gaussiana. NO es posible calcular el campo mediante el teorema de Gauss.

### PROBLEMA 2.11

Sobre una esfera de radio  $R$  tenemos una distribución de carga cuya densidad es  $\rho = Ar$  ( $C/m^3$ ).

Calcular el campo eléctrico en función de  $r$ .

#### Solución

En el cálculo del campo debemos distinguir dos zonas:

1) Cuando  $0 \leq r \leq R$ ; 2) Cuando  $r > R$

1) Se aplica el teorema de Gauss teniendo en cuenta la simetría esférica de la distribución, es decir, aplicamos la ecuación (2.12) con

$$E = E_r \mathbf{u}_r ; ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r ; dv' = 4\pi r^2 dr$$

$\theta$  varía entre 0 y  $\pi$ ;  $\varphi$  varía entre 0 y  $2\pi$ ;  $r$  entre 0 y  $r$ .

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv'$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E_r$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r (Ar) 4\pi r^2 dr = \frac{A}{\epsilon_0} \pi r^4$$

igualando los dos resultados tenemos,

$$4\pi r^2 E_r = \frac{A}{\epsilon_0} \pi r^4 \rightarrow E_r = \frac{A}{4\epsilon_0} r^2$$

de donde se deduce que,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{A}{4\epsilon_0} r^2 \mathbf{u}_r$$

2) También se aplica el teorema de Gauss como en el caso anterior, con la diferencia de que ahora  $r$  varía entre 0 y  $R$ , dado que para  $r > R$ ,  $\rho = 0$ .

$$4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R (Ar) 4\pi r^2 dr = \frac{A}{\epsilon_0} \pi R^4$$

Realizando las operaciones correspondientes queda,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{AR^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$$

### PROBLEMA 2.12

Dada la distribución volumétrica de carga:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{3}{4} - \frac{r}{a} \right) \quad \text{para } 0 \leq r \leq a : \quad \rho = 0 \quad \text{para } r > a$$

Calcular el campo  $\mathbf{E}(r)$  y dibujar una gráfica de  $|\mathbf{E}|$  en función de  $r$ .

#### Solución

Vamos a distinguir dos zonas:

1) para  $0 \leq r \leq a$  y 2) para  $r > a$ .

1) Aplicamos el teorema de Gauss teniendo en cuenta la simetría esférica de la distribución de carga. Utilizamos la ecuación (2.12) con:

$$E = E_r \mathbf{u}_r; \quad ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi; \quad dv' = 4\pi r^2 dr$$

$\theta$  varía entre 0 y  $\pi$ ;  $\varphi$  varía entre 0 y  $2\pi$ , y  $r$  entre 0 y  $r$ .

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_0 \left( \frac{3}{4} - \frac{r}{a} \right) 4\pi r^2 dr$$

$$4\pi r^2 E_r = \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left[ \frac{r^3}{4} - \frac{r^4}{4a} \right]_0^r = \frac{\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left( r^3 - \frac{r^4}{a} \right)$$

Operando en la igualdad anterior el vector campo eléctrico será,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \left( r - \frac{r^2}{a} \right) \mathbf{u}_r$$

2) El tratamiento es similar al caso anterior, con la particularidad de que ahora  $r$  varía entre 0 y  $a$  en la integral de volumen.

Si nos fijamos en la solución del apartado anterior para la integral de volumen, podemos darnos cuenta de que si los límites de integración se cambian por 0 y  $a$  dicha integral se anula, por tanto,

$$4\pi r^2 E_r = 0$$

de donde se deduce que,  $E_2 = 0$ .

La gráfica de en función de  $r$  se representa en la figura P2.12.

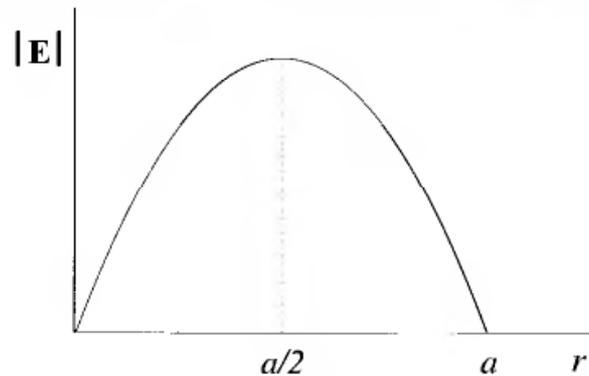


Figura P2.12

### PROBLEMA 2.13

Sea un disco de radio  $a$  y espesor  $e$ , con  $e \ll a$ . (figura P2.13) y con una densidad de carga  $\rho = \rho_0$ . Calcular el potencial y el campo electrostático en el punto A(0, 0, a). Determinar el trabajo necesario para trasladar una carga  $Q$  desde el infinito hasta A.

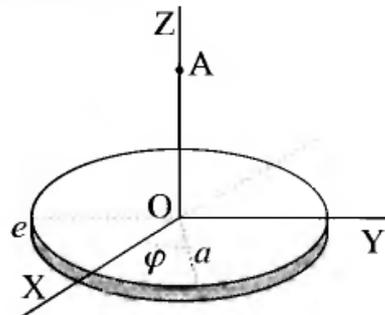


Figura P2.13

### Solución

#### 1) Potencial

La expresión para el potencial electrostático debido a una distribución volumétrica de carga viene dada por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\rho') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

En el caso que nos ocupa, tenemos

$$\mathbf{r} = a\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}' = \rho\mathbf{u}_\rho ; \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -\rho\mathbf{u}_\rho + a\mathbf{u}_z ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + a^2}$$

$$dv' = e \, d\rho \, \rho \, d\varphi$$

Sustituyendo en la expresión para el potencial

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 e \rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} = \frac{\rho_0 e}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{\rho^2 + a^2} \right]_0^a$$

Luego

$$V(A) = \frac{\rho_0 e a}{2\epsilon_0} (\sqrt{2} - 1)$$

2) *Campo*

Calculamos el campo eléctrico en el punto A mediante la siguiente ecuación,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\rho')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

Teniendo en cuenta los valores anteriores para  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ , tenemos

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_0(-\rho\mathbf{u}_\rho + a\mathbf{u}_z)}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} e d\rho \rho d\varphi$$

Expresando el vector unitario  $\mathbf{u}_\rho$  en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 e}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \frac{a\rho\mathbf{u}_z - \rho^2 \cos\varphi\mathbf{u}_x - \rho^2 \sin\varphi\mathbf{u}_y}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\varphi$$

Ahora bien, las contribuciones de  $\mathbf{u}_x$  y  $\mathbf{u}_y$  se anulan al integrar sobre todo el disco con respecto a  $\varphi$ , quedando únicamente la contribución en la dirección  $\mathbf{u}_z$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 e}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{a\rho\mathbf{u}_z}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho = \frac{\rho_0 e a}{4\epsilon_0} \left[ \frac{\rho}{a^2 \sqrt{a^2 + \rho^2}} \right]_0^a \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{E}(A) = \frac{\rho_0 e \sqrt{2}}{4\epsilon_0 a} \mathbf{u}_z \quad \left( \frac{\rho_0 e a}{2\epsilon_0} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \right)$$

3) *Trabajo*

Suponemos la referencia de potencial en el infinito, por tanto se calcula el trabajo multiplicando la carga  $Q$  por el potencial en el punto A.

$$W = QV(A) = Q \frac{\rho_0 e a}{2\epsilon_0} (\sqrt{2} - 1)$$

### PROBLEMA 2.14

Dada la distribución esférica de carga:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 (r/a)^{1/2} & \text{para } a/2 \leq r \leq a \\ 0 & \text{para } r > a \text{ y } r < a/2 \end{cases}$$

Calcular el campo y potencial en función de  $r$ .

Dibujar un gráfico aproximado de  $E$  y  $V$  en función de  $r$ .

**Solución**1) *Cálculo del campo eléctrico*

Distinguiremos tres zonas:

1.1) *Zona en la que  $r < a/2$* 

En el interior de esta zona no hay cargas, por tanto  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$  sobre una superficie esférica de radio menor que  $a/2$ . Como la distribución de cargas es de simetría radial, si existiera un campo en la zona indicada, sería normal a una superficie esférica en cada punto y la integral de superficie sería distinta de cero. Esto contradice la aplicación del teorema de Gauss sobre dicha esfera, ya que no hay cargas en el interior. La conclusión es que dentro de la esfera indicada el campo debe ser nulo:

$$\mathbf{E}_a = 0$$

1.2) *Zona para la que  $a/2 \leq r \leq a$* 

Se aplica el teorema de Gauss en la forma indicada por la ecuación (2.12). Considerando la simetría esférica de la distribución, tomamos como superficie gaussiana la de una esfera de radio  $r$ , y los límites de integración en la integral de volumen son desde  $a/2$  hasta  $r$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_b &= E_r \mathbf{u}_r ; d\mathbf{s} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r ; dv' = 4\pi r^2 dr \\ \oint \mathbf{E}_b \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E_r \\ \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho dv' &= \frac{1}{\epsilon_o} \int_{a/2}^r \rho_o \left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{\epsilon_o} \frac{4\pi \rho_o}{a^{1/2}} \left[ \frac{2}{7} r^{7/2} \right]_{a/2}^r \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Gauss,

$$4\pi r^2 E_r = \frac{2}{7} \frac{1}{\epsilon_o} \frac{4\pi \rho_o}{a^{1/2}} \left( r^{7/2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{7/2} \right)$$

El campo en esa zona será,

$$\mathbf{E}_b = \frac{2}{7} \frac{1}{\epsilon_o} \frac{\rho_o}{a^{1/2}} \frac{1}{r^2} \left( r^{7/2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{7/2} \right) \mathbf{u}_r$$

1.3) *Zona en la que  $r > a$* 

Operamos de forma similar al caso anterior, salvo que las condiciones en los límites para la integral de volumen varían entre  $a/2$  y  $a$ , con lo cual dicha integral corresponde a la carga total  $Q$  que existe en la distribución.

Ahora,

$$E_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \frac{1}{r^2} \int_{a/2}^a \rho 4\pi r^2 dr = \frac{2}{7} \frac{\rho_o}{\epsilon_o a^{1/2}} \frac{1}{r^2} \left( a^{7/2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{7/2} \right)$$

realizando operaciones,

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{56} \left( 16 - \sqrt{2} \right) \frac{\rho_o a^3}{\epsilon_o r^2} \mathbf{u}_r$$

## 2) Cálculo del potencial

Mediante los valores del campo obtenidos en el apartado 1), aplicando la definición de diferencia de potencial expresada por la ecuación (2.1) y tomando como referencia de potenciales  $V(\infty) = 0$ , podemos calcular los valores de  $V(r)$ .

Distinguiremos las mismas zonas que en el apartado 1), pero ahora empezaremos los cálculos por la zona 1.3),  $r > a$ .

2.3) Aplicamos la ecuación (2.1) con el campo calculado en 1.3); los límites son  $\infty$  y  $r$ ;  $d\mathbf{l} = dr \mathbf{u}_r$

$$V_c(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_r dr = - \int_{\infty}^r \frac{1}{56} (16 - \sqrt{2}) \frac{\rho_o a^3}{\epsilon_o r^2} dr$$

$$V_c(r) = \frac{1}{56} (16 - \sqrt{2}) \frac{\rho_o a^3}{\epsilon_o r}$$

2.2) En esta zona operamos de forma similar al caso anterior, pero aquí tomamos como potencial de referencia  $V_c(a)$ , que es el potencial calculado en el apartado 2.3) en  $r = a$ . De esta forma aplicamos la condición de continuidad en los potenciales, cuando  $r = a$ , es decir,  $V_c(a) = V_b(a)$ .

$$V_b(r) - V_b(a) = - \int_a^r \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{u}_r dr = - \int_a^r \frac{2\rho_o}{7\epsilon_o a^{1/2}} \frac{1}{r^2} \left( r^{7/2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{7/2} \right) dr$$

$$V_b(r) = V_c(a) - \frac{2\rho_o}{7\epsilon_o a^{1/2}} \left[ \frac{2}{5} r^{5/2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{7/2} \left(-\frac{1}{r}\right) \right]_a^r$$

$$V_b(r) = V_c(a) - \frac{2\rho_o}{7\epsilon_o a^{1/2}} \left( \frac{2}{5} (r^{5/2} - a^{5/2}) - \left(\frac{a}{2}\right)^{7/2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \right)$$

2.1) Esta zona corresponde a  $r < a/2$  y en ella  $E = 0$ , por lo que no existe variación de potencial, es decir, en esta zona el potencial se mantiene constante e igual al que existe en la esfera de radio  $r = a/2$ , que es  $V_b(a/2)$ .

$$V_a(r) = V_b(a/2) = \frac{2}{7} \frac{\rho_o a^2}{\epsilon_o} \frac{1}{16} (16 - \sqrt{2}) + \frac{2\rho_o}{7\epsilon_o} a^2 \frac{1}{80} (9\sqrt{2} - 32)$$

$$V_a(r) = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} a^2 \frac{1}{70} (12 + \sqrt{2}) \simeq 0,19 \frac{\rho_o}{\epsilon_o} a^2$$

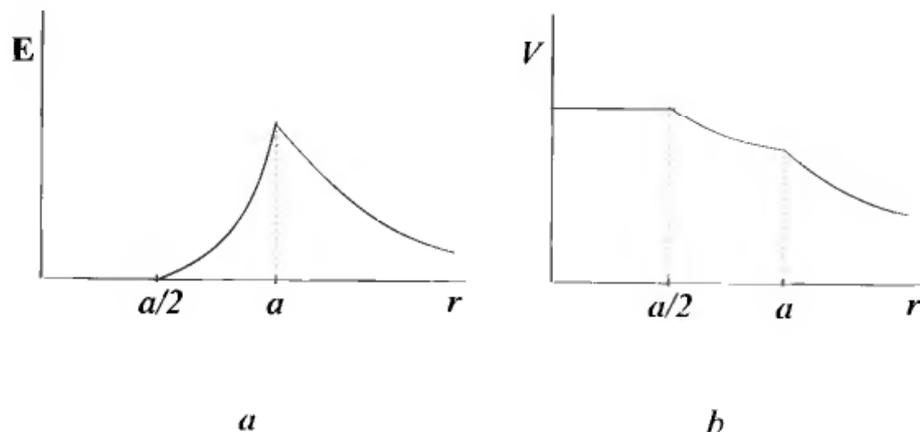


Figura P2.14

3) Gráfica de  $E(r)$  y  $V(r)$ 

En la figura P2.14a se muestra un dibujo aproximado de la variación de  $E$  con  $r$ .

En la figura P2.14b se muestra el gráfico correspondiente a la variación de potencial con  $r$ .

## PROBLEMA 2.15

Sobre dos placas paralelas e indefinidas, separadas por una distancia  $d$ , se distribuyen respectivamente las densidades de carga superficiales:  $\sigma_1 = 2 \text{ C/m}^2$ ,  $\sigma_2 = 4 \text{ C/m}^2$ .

Calcular el campo entre los dos planos y en el espacio a derecha e izquierda de los mismos.

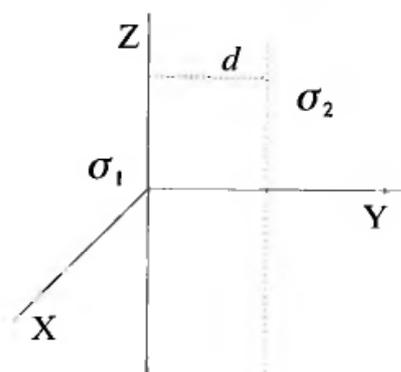


Figura P2.15.1

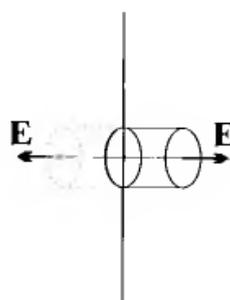


Figura P2.15.2

## Solución

Dividiremos el espacio en tres zonas:

- 1) Zona comprendida entre los planos.
- 2) Zona a la derecha,  $y > d$ .
- 3) Zona a la izquierda,  $y < 0$ .

En las tres zonas aplicaremos el principio de superposición y el teorema de Gauss. Como se trata de densidades superficiales, en la ecuación (2.12) sustituimos  $\rho$  por  $\sigma$  y la integral de volumen por una de superficie. Además, dada la extensión infinita de la distribución en las direcciones Z e Y, el campo en las tres zonas tiene sólo componente en la dirección del eje Y.

La aplicación del teorema de Gauss en la distribución de  $\sigma$  sobre el plano, véase la figura P2.15.1, produce la relación siguiente:

$$2E ds = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma ds \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

1) *Zona comprendida entre los planos*

En esta zona el campo total será la suma de los campos debidos a cada una de las distribuciones, teniendo en cuenta que tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad \text{con:} \\ \mathbf{E}_1 &= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\mathbf{u}_y) \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ :

$$\mathbf{E}_a = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_y = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

2) *Zona a la derecha de los planos,  $y > d$*

Se procede de forma similar al apartado anterior. En esta zona los campos creados por las dos distribuciones tienen la misma dirección y sentido, es decir, los dos tienen sentido hacia  $y > 0$ .

$$\mathbf{E}_b = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_y = \frac{3}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

3) *Zona a la izquierda de los planos,  $y < 0$*

Calculamos el campo de manera similar a los casos anteriores, pero ahora los campos tienen sentido hacia  $y < 0$ , por tanto:

$$\mathbf{E}_c = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_y = -\frac{3}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 2.16

Sobre una placa dieléctrica, de espesor  $2a$  e indefinida en las otras dos direcciones, se distribuye una densidad de carga:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - |y|/a) & \text{para } 0 \leq |y| \leq a \\ 0 & \text{para } |y| > a \end{cases}$$

Calcular el campo  $\mathbf{E}(y)$ .

## Solución

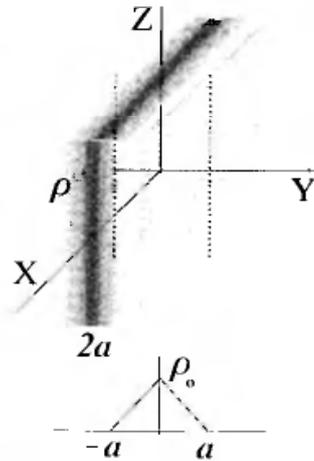


Figura 2.16

La distribución es simétrica con respecto al plano XZ (véase la figura P2.16) e indefinida en Z y X. Por ser indefinida en las direcciones X y Z, el campo creado sólo tiene componente en la dirección del eje Y.

Podemos distinguir cuatro zonas:

- 1) Zona para la que  $0 \leq y \leq a$ , en la placa e  $y > 0$
- 2) Zona para la que  $y > a$ , fuera de la placa e  $y > 0$
- 3) Zona para la que  $0 \geq y \geq -a$ , en la placa e  $y < 0$
- 4) Zona para la que  $y < -a$ , fuera de la placa e  $y < 0$

Para calcular el campo, aplicamos el teorema de Gauss mediante la ecuación (2.12). Las condiciones particulares del problema, nos llevan a la aplicación del teorema sobre un cilindro con base en el plano XZ y altura  $y$ .

- 1) Zona  $0 \leq y \leq a$

Por la simetría de la distribución con respecto al plano XZ, el campo sobre el plano XZ es nulo; el volumen elemental es  $dv' = ds dy$ ;  $\rho = \rho_0 (1 - y/a)$ , por tanto:

$$E_1 ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^y \rho_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy ds = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} ds \left(y - \frac{y^2}{2a}\right)$$

$$E_1 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(y - \frac{y^2}{2a}\right) \rightarrow \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(|y| - \frac{y^2}{2a}\right) \mathbf{u}_y$$

- 2) Zona  $y > a$

La forma de proceder es similar al caso anterior, con la diferencia de que los límites para la integral de volumen son 0 y  $a$ ; de esta forma:

$$E_2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^a \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0 2}$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2 \mathbf{u}_y = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} \mathbf{u}_y$$

3) Zona  $0 \geq y \geq -a$

En esta zona, dada la simetría de la distribución con respecto al plano XZ, los cálculos son similares a los efectuados para la zona 1), salvo que en este caso el sentido del campo es el opuesto, es decir,

$$\mathbf{E}_3 = -\mathbf{E}_1 = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left( |y| - \frac{y^2}{2a} \right) \mathbf{u}_y$$

4) Zona  $y < -a$

Procedemos de forma similar a la zona 2), excepto que ahora el campo tiene sentido contrario a  $\mathbf{E}_2$ , es decir,

$$\mathbf{E}_4 = -\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho_o a}{2\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 2.17

Dada la distribución de carga en el entorno del plano XZ, determinada por la siguiente densidad,

$$\rho = \begin{cases} \rho_o(y/d) & \text{para } |y| \leq d \\ 0 & \text{para } |y| \geq d \end{cases}$$

que únicamente es función de la coordenada  $y$ .

Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje Y. Obtener el potencial electrostático en la zona comprendida entre  $-d$  y  $d$  ( $-d \leq y \leq d$ ), tomando como referencia el potencial en  $y = -d$ .

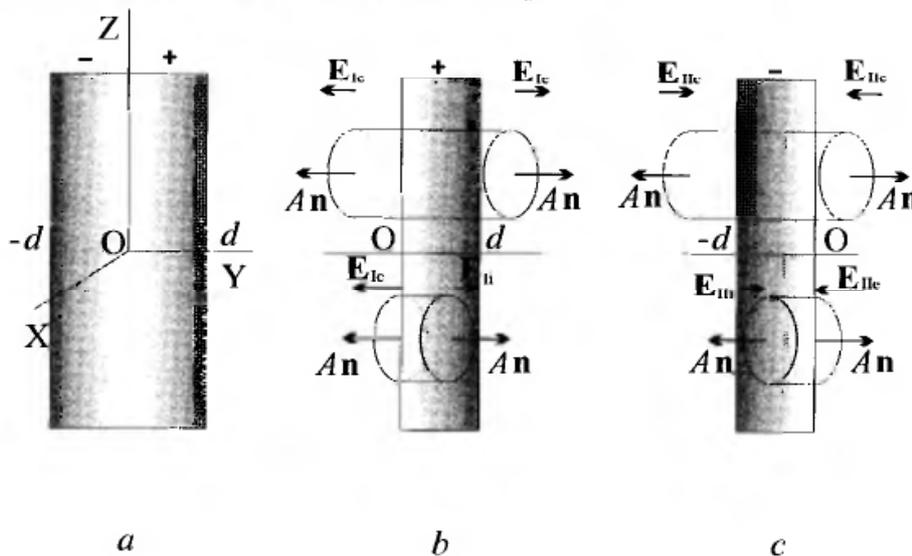


Figura P2.17

### Solución

#### Campo eléctrico

Dividimos el problema en dos partes y sumamos los resultados aplicando el principio de superposición.

En la primera tenemos: I)

$$\rho = \begin{cases} \rho_o(y/d) & \text{para } 0 < y < d \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Y en la segunda: II)

$$\rho = \begin{cases} \rho_o(y/d) & \text{para } -d < y < 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

*Campo debido a la distribución I*

Aplicamos el teorema de Gauss a un cilindro que atraviesa la zona cargada, según se ve en la figura 2.17b. Por lo que vimos en el problema 2.15, el campo eléctrico en el exterior de una lámina cargada es constante, de distinto signo en ambos lados y con dirección  $\mathbf{u}_y$ . El flujo total que atraviesa el cilindro está dado sólo por el flujo que atraviesa las secciones circulares de los extremos, ya que el campo es paralelo a la superficie lateral del cilindro.

En el exterior de la placa el campo en la zona izquierda ( $y < 0$ ) es del mismo módulo y dirección pero de sentido contrario al que tiene el campo en la zona derecha ( $y > d$ ), por tanto,

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{\text{izq}} + \Phi_{\text{der}} = (-E_{\text{le}} \mathbf{u}_y) \cdot (-A \mathbf{u}_y) + E_{\text{le}} \mathbf{u}_y \cdot A \mathbf{u}_y \\ \Phi &= 2AE_{\text{le}} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\Phi = \frac{Q_a}{\epsilon_o} = \frac{1}{\epsilon_o} \int_0^d \rho dv = \frac{A}{\epsilon_o} \int_0^d \frac{\rho_o y}{d} dy = \frac{Ad\rho_o}{2\epsilon_o}$$

Por tanto,

$$2AE_{\text{le}} = \frac{\rho_o}{2\epsilon_o} Ad \rightarrow E_{\text{le}} = \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o}$$

El campo en ambos lados será:

$$\mathbf{E}_{\text{le}} = \begin{cases} ((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y > d \\ -((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

En el interior de la placa tomamos ahora un cilindro de longitud  $y$  con una base en  $y = 0$ , según la figura 2.17b

$$\Phi(y) = \Phi_{\text{izq}} + \Phi_{\text{der}} = (\mathbf{E}_{\text{le}}) \cdot (-A \mathbf{u}_y) + E_{\text{li}}(y) \mathbf{u}_y \cdot A \mathbf{u}_y$$

Sustituimos  $\mathbf{E}_{\text{le}}$  por su valor obtenido anteriormente,

$$\Phi(y) = \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} A + E_{\text{li}}(y) A$$

Por otro lado:

$$\Phi(y) = \frac{Q}{\epsilon_o} = \frac{A}{\epsilon_o} \int_0^y \frac{\rho_o y'}{d} dy' = \frac{\rho_o y^2}{2d\epsilon_o} A$$

Igualando ambas expresiones y despejando  $E_{\text{li}}$ ,

$$E_{II}(y) = \frac{\rho_o}{4d\epsilon_o} (2y^2 - d^2)$$

Resumiendo,  $\mathbf{E}_I$  es:

$$\mathbf{E}_I = \begin{cases} -((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y < 0 \\ (\rho_o/(4d\epsilon_o)) (2y^2 - d^2) \mathbf{u}_y & \text{para } 0 < y < d \\ ((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y > d \end{cases}$$

*Campo debido a la distribución II*

Procedemos con II de forma similar a I:

Tomamos inicialmente, de nuevo, un cilindro totalmente exterior (véase figura 2.17c)

$$\Phi = \Phi_{izq} + \Phi_{der} = (E_{IIe} \mathbf{u}_y) \cdot (-A \mathbf{u}_y) + (-E_{IIc} \mathbf{u}_y) \cdot (A \mathbf{u}_y)$$

$$\Phi = -2AE_{IIc}$$

Y, aplicando el teorema de Gauss,

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_o} = \frac{A}{\epsilon_o} \int_{-d}^0 \frac{\rho_o y}{d} dy = -\frac{Ad\rho_o}{2\epsilon_o}$$

por tanto

$$\mathbf{E}_{IIc} = \begin{cases} -((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y > 0 \\ ((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y < -d \end{cases}$$

Tomamos ahora un cilindro interior de longitud  $y$  y base en  $y = 0$ , según la figura 2.17c

$$\Phi(y) = \Phi_{izq} + \Phi_{der} = E_{III}(y) \mathbf{u}_y \cdot (-A \mathbf{u}_y) + \mathbf{E}_{IIc} \cdot A \mathbf{u}_y$$

Sustituimos  $\mathbf{E}_{IIc}$  por su valor obtenido anteriormente para  $y > 0$ ,

$$\Phi(y) = -E_{III}(y)A - \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} A$$

Por otro lado:

$$\Phi(y) = \frac{Q}{\epsilon_o} = \frac{A}{\epsilon_o} \int_{-y}^0 \frac{\rho_o y'}{d} dy' = -\frac{\rho_o y^2}{2d\epsilon_o} A$$

Vemos que la carga es negativa. Igualando las dos últimas expresiones y despejando  $E_{III}$ ,

$$E_{III} = \frac{\rho_o}{4d\epsilon_o} (2y^2 - d^2)$$

Luego,

$$\mathbf{E}_{II} = \begin{cases} ((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y < -d \\ ((\rho_o d)/4\epsilon_o) (2y^2 - d^2) \mathbf{u}_y & \text{para } -d < y < 0 \\ -((\rho_o d)/4\epsilon_o) \mathbf{u}_y & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

*Campo eléctrico*

Obtenemos el campo total  $\mathbf{E}$  sumando  $\mathbf{E}_I$  con  $\mathbf{E}_{II}$ , teniendo cuidado con la suma en las zonas comunes.

Para  $y > d$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} \mathbf{u}_y - \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} \mathbf{u}_y = 0$$

Esto se debe a que la carga neta entre  $-d$  y  $d$  es nula.

Para  $y < -d$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} \mathbf{u}_y + \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} \mathbf{u}_y = 0$$

Para  $0 < y < d$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o}{4d\epsilon_o} (2y^2 - d^2) \mathbf{u}_y - \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} \mathbf{u}_y = \frac{\rho_o}{2d\epsilon_o} (y^2 - d^2) \mathbf{u}_y$$

Para  $0 > y > -d$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o}{4d\epsilon_o} (2y^2 - d^2) \mathbf{u}_y - \frac{\rho_o d}{4\epsilon_o} \mathbf{u}_y = \frac{\rho_o}{2d\epsilon_o} (y^2 - d^2) \mathbf{u}_y$$

Resumiendo tenemos,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & \text{para } y < -d \\ (\rho_o/(2d\epsilon_o)) (y^2 - d^2) \mathbf{u}_y & \text{para } -d < y < d \\ 0 & \text{para } y > d \end{cases}$$

*Potencial*

Calculamos el potencial  $V(y)$  en la zona  $|y| < d$  tomando como referencia el potencial en  $y = -d$ , es decir  $V(-d) = 0$ .

$$V(y) - V(-d) = - \int_{-d}^y \mathbf{E}(y') \cdot \mathbf{u}_y dy' = -\frac{\rho_o}{2d\epsilon_o} \int_{-d}^y (y'^2 - d^2) dy'$$

$$V(y) = -\frac{\rho_o}{2d\epsilon_o} \left( \frac{1}{3} (y^3 + d^3) - d^2(y + d) \right)$$

En el plano ZX  $y = 0$ ,

$$V(0) = \frac{\rho_o d^2}{3\epsilon_o}$$

**PROBLEMA 2.18**

Tenemos un cilindro indefinido de radio  $a$ , sobre él se distribuye una densidad de carga  $\rho = \rho_o \sin(\pi r/a)$ , siendo  $\rho = 0$  para  $r > a$ .

- 1) Calcular el campo eléctrico para  $0 \leq r \leq a$ .
- 2) Situamos un carga negativa sobre el eje del cilindro. ¿Será estable la situación de equilibrio de la carga?

**Solución**

1) La distribución de carga tiene simetría cilíndrica con el eje Z. Como además es indefinida en la dirección Z, el campo sólo tiene componente radial, es decir,  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r$ . (Utilizamos la coordenada  $r$  en lugar de  $\rho$  para que no se confunda con la densidad de carga).

Aplicamos el teorema de Gauss tomando como superficie gaussiana un cilindro de radio  $r$  y eje Z. En este caso la ecuación (2.12) se aplica teniendo en cuenta que,

$$\int E_r ds = 2\pi r L E_r ; \quad y \quad dv' = L2\pi r dr$$

En definitiva, para  $r < a$ ,

$$2\pi r L E_r = \frac{1}{\epsilon_o} \int_0^r \rho_o \operatorname{sen}(\pi r/a) L2\pi r dr = \frac{\rho_o L2a}{\epsilon_o \pi} (a \operatorname{sen}(\pi r/a) - \pi r \cos(\pi r/a))$$

$$E_r = \frac{\rho_o a}{\epsilon_o \pi^2} (a \operatorname{sen}(\pi r/a) - \pi r \cos(\pi r/a)) \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o a}{\epsilon_o \pi^2} (a \operatorname{sen}(\pi r/a) - \pi r \cos(\pi r/a)) \frac{1}{r} \mathbf{u}_r$$

2) La fuerza sobre una carga  $-q$  en el eje Z es  $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ . El campo  $\mathbf{E}$  cuando  $r \rightarrow 0$ , tiende a cero,

$$\cos(\pi r/a) \rightarrow 1 \quad y \quad \left(\frac{a}{\pi}\right) \frac{1}{r} \operatorname{sen}(\pi r/a) \rightarrow 1$$

pues si tomamos el desarrollo en serie del seno vemos que,

$$\operatorname{sen}(\pi r/a) = \frac{\pi}{a} r - \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \frac{r^3}{3!} + \text{T.O.S.}$$

por tanto  $E \rightarrow 0$ .

Fuera del eje el campo siempre tiene el sentido de  $\mathbf{u}_r$  ya que  $\rho$  es positiva. La fuerza  $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$ , por lo que siempre se dirige hacia el eje Z, es decir, la fuerza siempre tiende a llevar la carga hacia el eje Z, lo que nos llevaría a la conclusión de equilibrio estable. Dado que la distribución es indefinida en la dirección del eje Z, la carga se puede desplazar sobre dicho eje sin que se ejerza fuerza sobre ella, es decir, el equilibrio sería indiferente.

En la realidad no existe ninguna distribución infinita como la establecida de forma teórica en este problema, siempre será limitada en todas las direcciones. Si esta distribución tuviera una longitud finita  $L$ , el campo sólo sería nulo en el centro de la distribución. El potencial en el centro de la distribución, se puede demostrar que es máximo, ya que para llevar una carga positiva desde el infinito hasta el centro se realiza un trabajo contra el campo. La energía de la carga  $-q$  en ese punto es la mínima ( $-qV(0)$ ), por tanto el equilibrio es estable.

Para mantener la distribución como la hemos considerado anteriormente, se requiere la aplicación de unas fuerzas que retengan a las cargas de la distribución  $\rho$  en los puntos respectivos, de lo contrario no se mantendrían en dichos puntos. Así se puede explicar la aparente contradicción con lo que establece el teorema de Earnshaw, es decir, que un sistema de cargas no puede alcanzar una situación estable bajo la única influencia de fuerzas de naturaleza eléctrica.

### PROBLEMA 2.19

La intersección de dos esferas de radio  $R = OO'$ , se muestra en la figura P2.19.1. Sobre la zona exterior a la intersección se distribuye una densidad de carga en la forma siguiente: Una densidad de carga uniforme positiva  $\rho$  sobre el volumen exterior a la intersección de la esfera con centro en  $O$ ; y una densidad de carga negativa  $-\rho$  sobre el volumen exterior a la intersección de la esfera con centro en  $O'$ .

- 1) Calcular el campo eléctrico en los puntos del segmento  $OO'$ .
- 2) Calcular el campo eléctrico en los puntos del segmento  $AB$ .

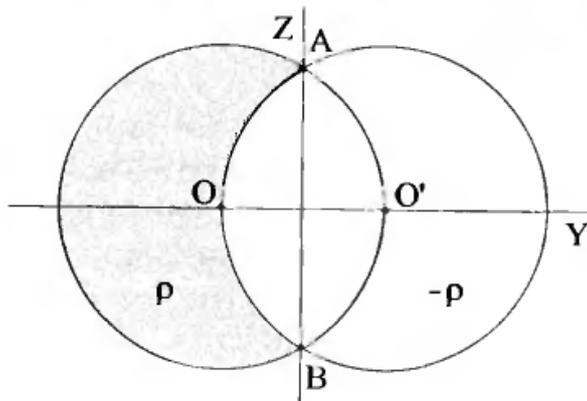


Figura P2.19.1

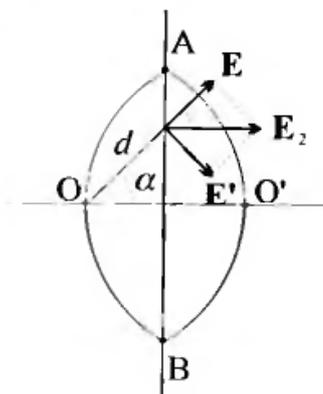


Figura P2.19.2

### Solución

Para resolver este problema se aplica el teorema de Gauss en la forma expresada por la ecuación (2.12) y el principio de superposición.

#### 1) Cálculo de $E_1$ en $OO'$

Se obtiene el campo  $E_1$  sumando los campos de dos distribuciones esféricas de radio  $R$  una con  $\rho$  positiva y centrada en  $O$  y la otra con  $-\rho$  centrada en  $O'$ .

Suponemos el origen de coordenadas situado en  $O$ ,  $R = OO'$ .

Dado que son distribuciones uniformes, la integral de volumen es proporcional  $(4/3)\pi r^3$ , y la de superficie a  $4\pi r^2$ .

Sobre un punto  $y$  del segmento  $OO'$  ( $y = r$ ):

*Campo de la esfera con centro en O:*

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi E y^2 = \frac{1}{\epsilon_o} \int \rho 4\pi y^2 dy = \frac{\rho 4\pi}{3\epsilon_o} y^3$$

Operando queda,

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_o} y \rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} y \mathbf{u}_y$$

*Campo de la esfera con centro en O':*

Para esta distribución el punto  $y$  está a una distancia de  $O'$  igual a  $(R - y)$ , la densidad es negativa y el sentido de la normal a la superficie es opuesto al caso anterior, es decir, ahora tiene sentido de  $-\mathbf{u}_y$ ; por tanto el campo creado será de la misma forma, pero con  $(R - y)$  en lugar de  $y$ ,  $-\rho$  en lugar de  $\rho$  y  $-\mathbf{u}_y$  en lugar de  $\mathbf{u}_y$ , en consecuencia,

$$\mathbf{E}' = \frac{\rho}{3\epsilon_o} (R - y) \mathbf{u}_y$$

En cualquier punto del segmento  $OO'$  el campo  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}'$ ,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \frac{\rho}{3\epsilon_o} R \mathbf{u}_y$$

Como muestra la ecuación anterior el campo es uniforme sobre el segmento  $OO'$ .

## 2) Cálculo de $\mathbf{E}_2$ sobre el segmento AB

En la figura P2.19.2 se muestra la suma de los campos correspondientes a las dos distribuciones. A una distancia  $d$  los respectivos campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{E}'$  tienen componentes en las direcciones del eje Y y Z. Los módulos respectivos son los mismos que hemos calculado en el apartado anterior, es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} d (\cos \alpha \mathbf{u}_y + \text{sen } \alpha \mathbf{u}_z)$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\rho}{3\epsilon_o} d (\cos \alpha \mathbf{u}_y - \text{sen } \alpha \mathbf{u}_z)$$

Teniendo en cuenta que  $\cos \alpha = (R/2d)$  y que  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} + \mathbf{E}'$ ,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_o} R \mathbf{u}_y$$

Comparando los resultados vemos que  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ . Este campo es el mismo en todos los puntos de la zona de intersección.

## PROBLEMA 2.20

Tenemos dos esferas superpuestas de radio  $a$ , cuyos centros respectivos  $O_1$  y  $O_2$  están sobre el eje Y como muestra la figura P2.20. La distancia entre los centros es  $l = 4a/3$ . En la zona sombreada de la izquierda se distribuye una densidad de carga uniforme  $\rho$ , y en la de la derecha un densidad de

carga uniforme  $-\rho$ . Calcular el campo electrostático en los puntos A y B indicados en la figura.

### Solución

El problema se resuelve aplicando el *principio de superposición*. Buscamos un sistema equivalente que permita calcular el campo de forma sencilla. En nuestro caso tal sistema equivalente puede ser: Una esfera centrada en  $O_1$  con una densidad de carga  $\rho$  más una esfera centrada en  $O_2$  con una densidad de carga  $-\rho$ .

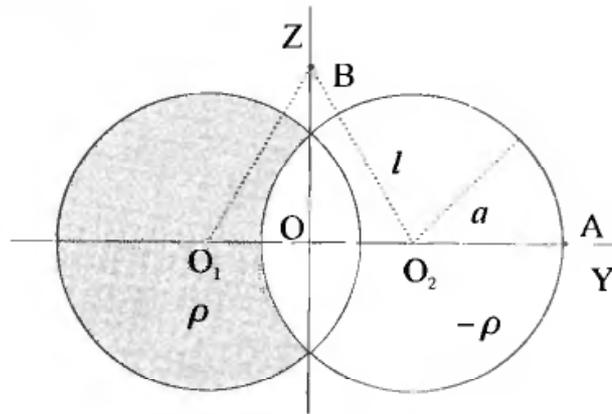


Figura P2.20

Puesto que los puntos A y B son exteriores a ambas esferas, el teorema de Gauss da como resultado que el campo pedido es equivalente a considerar dos cargas puntuales,  $Q_1$  y  $Q_2$  en los puntos  $O_1$ ,  $O_2$ . El valor de la carga total de cada esfera es:

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho ; \quad Q_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 (-\rho)$$

*Punto A*

El campo total es la suma de los campos parciales de cada una de las esferas,

$$\mathbf{E}_{1A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_{1A}^2} \mathbf{u}_{1A} ; \quad \mathbf{E}_{2A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_{2A}^2} \mathbf{u}_{2A}$$

En este caso,

$$r_{1A} = a + l = a + \frac{4}{3}a = \frac{7}{3}a ; \quad r_{2A} = a ; \quad \mathbf{u}_{1A} = \mathbf{u}_{2A} = \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo,

$$\mathbf{E}_{1A} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \frac{9}{49a^2} \mathbf{u}_y = \frac{3}{49} \frac{\rho a}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{E}_{2A} = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \mathbf{u}_y = -\frac{1}{3} \frac{\rho a}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

El campo total es,

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_{1A} + \mathbf{E}_{2A} = \left( \frac{3}{49} - \frac{1}{3} \right) \frac{\rho a}{\epsilon_o} \mathbf{u}_y = -\frac{40}{147} \frac{\rho a}{\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

Punto B

$$\mathbf{E}_{1B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_1}{r_{1B}^2} \mathbf{u}_{1B} ; \quad \mathbf{E}_{2B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_2}{r_{2B}^2} \mathbf{u}_{2B}$$

Puesto que  $\overline{O_1O} = l/2$  y  $\overline{O_1B} = l$ , tenemos que  $\mathbf{r}_{1B} = \frac{l}{2} \mathbf{u}_y + l \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z$ . Por tanto,

$$r_{1B} = l = \frac{4}{3}a ; \quad \mathbf{u}_{1B} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z$$

Para el punto  $O_2$  la situación es similar,

$$r_{2B} = l = \frac{4}{3}a ; \quad \mathbf{u}_{2B} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z$$

Sustituyendo,

$$\mathbf{E}_{1B} = \frac{3}{16} \frac{\rho a}{\epsilon_o} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z \right) ; \quad \mathbf{E}_{2B} = -\frac{3}{16} \frac{\rho a}{\epsilon_o} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{u}_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z \right)$$

Al sumar los campos desaparece la componente  $\mathbf{u}_z$  y queda,

$$\mathbf{E}_B = \mathbf{E}_{1B} + \mathbf{E}_{2B} = \frac{3}{16} \frac{\rho a}{\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 2.21

En el centro de una placa dieléctrica, de espesor  $d$  e indefinida en las otras direcciones, existe un hueco esférico de radio  $a$ . Sobre la placa, excepto en el hueco, se distribuye uniformemente una carga cuya densidad es  $\rho$ .

Calcular el campo en el punto A indicado en la figura P2.21.1 a una distancia  $d/2$  de la placa.

#### Solución

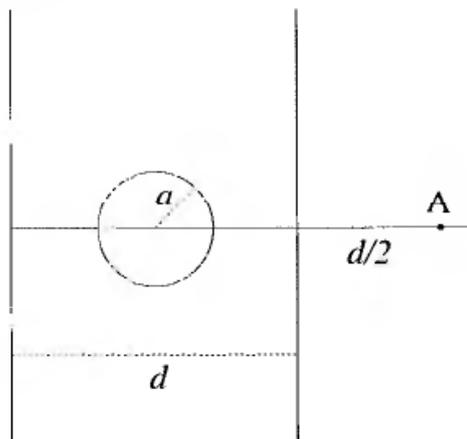


Figura P2.21.1



Figura P2.21.2

La solución se obtiene aplicando el principio de superposición y el teorema de Gauss. El cálculo se hace sumando el campo creado por una placa de espesor  $d$  y densidad  $\rho$  en toda la placa, con el debido a una esfera de radio  $a$  y densidad  $-\rho$  situada en el centro de la placa.

1) *Campo creado por la distribución en la placa*

Se trata de una distribución indefinida en las direcciones de los ejes X y Z, por lo que el campo sólo tiene componente en la dirección del eje Y. Si observamos la figura P2.21.2, la aplicación del teorema de Gauss en este caso nos lleva a,

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} S d = 2E_1 S \rightarrow E_1 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

2) *Campo debido a la distribución esférica*

Aplicamos el teorema de Gauss a una distribución esférica con densidad  $-\rho$  y centro en el origen de coordenadas. Como la densidad es uniforme, la ecuación (2.12) queda de la forma,

$$E_2 4\pi r^2 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi a^3 \rightarrow E_2 = -\frac{1}{3} \frac{\rho a^3}{\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{1}{3} \frac{\rho a^3}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_y$$

El campo total en A ( $r = d$ ) es,

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{d}{2} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{d^2} \right) \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 2.22

Tenemos una esfera de radio  $a$  dentro de la que hay un hueco en forma de sector esférico truncado de ángulo  $60^\circ$  y comprendido entre los radios  $a$  y  $b$ . véase la figura P2.22. Sobre la esfera, salvo en el hueco, se distribuye una carga cuya densidad es  $\rho$ .

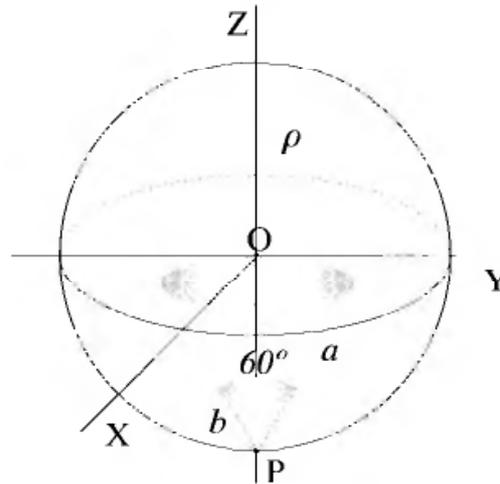
Calcular el campo y potencial en el punto P situado en el vértice del sector circular vacío.

#### Solución

1) *Campo eléctrico*

Aplicamos el principio de superposición y el campo en el punto P será la suma de los siguientes contribuciones: Una densidad de carga  $\rho$  sobre toda

la esfera de radio  $a$  más el sector esférico indicado en la figura P2.22 con densidad  $-\rho$ .



**Figura P2.22**

1.1) Campo debido a la distribución esférica de densidad  $\rho$

Para calcularlo aplicamos el teorema de Gauss:

$$\int \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s} = E_1 4\pi a^2 ; \quad \frac{Q}{\epsilon_o} = \frac{4}{3\epsilon_o} \pi a^3 \rho$$

de donde

$$E_1 = \frac{a\rho}{3\epsilon_o}$$

En el punto P el campo obtenido tiene la dirección y sentido de  $-\mathbf{u}_z$ , por tanto,

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{u}_z \frac{a\rho}{3\epsilon_o}$$

1.2) Campo debido al sector esférico truncado de densidad  $-\rho$

El campo de dicho sector vendrá dado por

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(-\rho)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv$$

Para calcular este campo consideramos el origen de coordenadas en el punto P. Según esto tenemos

$$\mathbf{r} = 0 ; \quad \mathbf{r}' = r \mathbf{u}_r$$

En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{r}' = r(\sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = |\mathbf{r} - r\mathbf{u}_r|^3 = r^3 ; \quad dv = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$$

Sustituyendo

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_b^a \frac{(-\rho)(-\mathbf{r}')}{r} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} \sin \theta d\theta$$

La simetría de la distribución de cargas nos lleva a que las proyecciones del vector  $\mathbf{r}'$  sobre los ejes X e Y se anulan, quedando solo la proyección sobre el eje Z. Para demostrarlo sustituimos el valor de  $\mathbf{r}'$  en coordenadas cartesianas; la integral se transforma en la siguiente:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_b^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} (\mathbf{u}_x \sin^2\theta \cos\varphi + \mathbf{u}_y \sin^2\theta \sin\varphi + \mathbf{u}_z \cos\theta \sin\theta) d\theta \right)$$

La integral de los dos primeros términos con respecto a la variable  $\varphi$  se anula y queda,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_b^a dr \int_0^{\pi/6} \cos\theta \sin\theta d\theta \mathbf{u}_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (a-b) \left[ \frac{1}{2} \sin^2\theta \right]_0^{\pi/6} \mathbf{u}_z$$

Esto es,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{16\epsilon_0} (a-b) \mathbf{u}_z$$

El campo total vendrá dado por la suma de los campos

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{E}_T = -\frac{a\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_z + \frac{\rho}{16\epsilon_0} (a-b) \mathbf{u}_z$$

Es decir

$$\mathbf{E}_T = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{a-b}{16} - \frac{a}{3} \right) \mathbf{u}_z$$

## 2) Potencial electrostático

Del mismo modo calculamos el potencial aplicando el principio de superposición.

### 2.1) Potencial debido a una distribución esférica de densidad $\rho$

El potencial debido a una distribución esférica y uniforme de carga es el mismo que si consideramos toda la carga en el centro de la esfera. En el caso particular del punto P(0, 0, -a) se obtiene,

$$V_1 = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$$

### 2.2) Potencial debido al sector esférico truncado con densidad $-\rho$

Para determinarlo consideramos el origen en el punto P y aplicamos la expresión

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(-\rho)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv$$

En este caso tendremos

$$\mathbf{r} = 0 ; \mathbf{r}' = r\mathbf{u}_r ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \text{ y } dv = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$$

Sustituyendo

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{(-\rho)}{r} r^2 dr \int_0^{\pi/6} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{-\rho}{2\epsilon_0} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_b^a [-\cos \theta]_0^{\pi/6}$$

Operando

$$V_2 = -\frac{\rho}{8\epsilon_0} (a^2 - b^2) (2 - \sqrt{3})$$

El potencial en el punto P será la suma de  $V_1$  y  $V_2$

$$V_T = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{8\epsilon_0} (a^2 - b^2) (2 - \sqrt{3})$$

### PROBLEMA 2.23

Teniendo en cuenta que el valor medio del campo en un volumen  $\mathcal{V}$  es  $\langle \mathbf{E} \rangle = (1/\mathcal{V}) \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}(r) dv$ , calcular el valor medio de  $\mathbf{E}$  en los casos siguientes:

1) Dentro de la esfera vacía de radio  $R/2$  y centro en  $O'$ , véase la figura P2.23a, cuando el volumen exterior a dicha esfera e interior a la de radio  $R$  y centro en  $O$  tiene una distribución uniforme de carga cuya densidad es  $\rho$ .

2) Dentro de la esfera de radio  $R$  y centro  $O$ , cuando la esfera de centro en  $O'$  y radio  $R/2$  tiene una distribución uniforme de carga con densidad  $\rho$ , véase la figura P2.23b.

### Solución

1) Cálculo de  $\langle \mathbf{E}_1 \rangle$  dentro de la esfera de radio  $R/2$

Primero debemos calcular  $\mathbf{E}_1$  en cada punto de la esfera y después obtener el valor medio  $\langle \mathbf{E}_1 \rangle$ .

El cálculo de  $\mathbf{E}_1$  se hace aplicando el principio de superposición y el teorema de Gauss expresado por la ecuación (2.12).

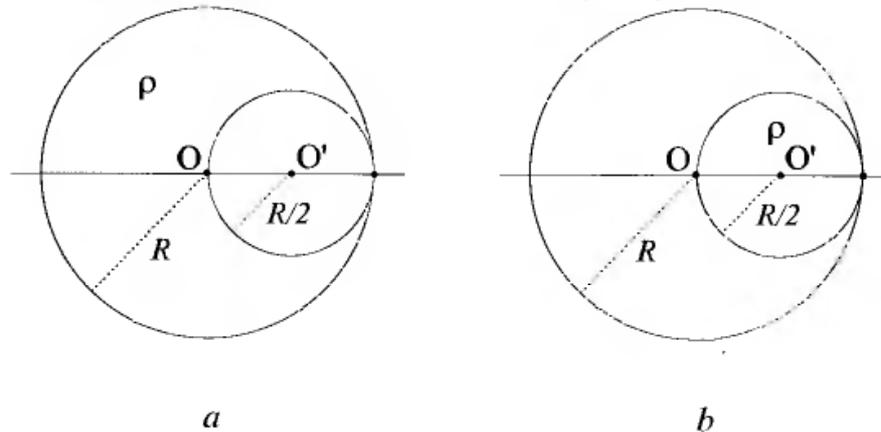


Figura P2.23

La distribución indicada es equivalente a una esfera de radio  $R$  y centro en  $O$  con densidad uniforme  $\rho$ , y otra de radio  $R/2$  centro en  $O'$  con densidad  $-\rho$ . El campo  $\mathbf{E}_1$  será la suma de las dos contribuciones.

Consideramos el origen de coordenadas situado en  $O$ .

El teorema de Gauss aplicado a estas dos distribuciones queda de la forma:

Esfera de radio  $R$  y centro en  $O$ , (véase la figura P2.23a)

$$4\pi r^2 E_O = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_o} \rightarrow \mathbf{E}_O = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \mathbf{r}$$

Esfera de radio  $R/2$  y centro  $O'$ ,

$$4\pi r'^2 E_{O'} = \frac{4}{3}\pi r'^3 \frac{-\rho}{\epsilon_o} \rightarrow \mathbf{E}_{O'} = -\frac{\rho}{3\epsilon_o} \mathbf{r}'$$

El campo  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_O + \mathbf{E}_{O'}$ . Si tenemos en cuenta la relación siguiente,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - (R/2)\mathbf{u}_y$ , la suma queda de la forma,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{6\epsilon_o} R\mathbf{u}_y$$

Vemos que el campo es uniforme dentro de la citada esfera.

El valor medio será,

$$\langle \mathbf{E}_1 \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E}_1 dv = \frac{1}{V} \int_V \frac{\rho}{6\epsilon_o} R\mathbf{u}_y dv$$

Como el campo es uniforme la integral de volumen es  $V \mathbf{E}_1$ ,

$$\langle \mathbf{E}_1 \rangle = \mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{6\epsilon_o} R\mathbf{u}_y$$

2) Cálculo de  $\langle \mathbf{E}_2 \rangle$  dentro de la esfera de radio  $R$

Para calcular el valor medio  $\langle \mathbf{E}_2 \rangle$ , debemos sumar los valores de  $\int \mathbf{E} dv$  sobre el volumen de la esfera de radio  $R/2$  y la  $\int \mathbf{E} dv$  sobre el volumen exterior a la esfera de radio  $R/2$  e interior a la esfera de radio  $R$ . En este caso el campo en el interior de la esfera centrada en  $O'$ , como hemos visto en el apartado anterior, es de la forma  $(\rho/3\epsilon_o)\mathbf{r}'$ , ya que sólo existe la distribución de carga  $\rho$  sobre ella; por tanto, a cada volumen elemental le corresponde un campo que tiene otro simétrico del mismo módulo pero sentido contrario. Como consecuencia la integral sobre dicha esfera es nula.

Para obtener el citado valor medio, debemos calcular sólo la integral correspondiente al volumen  $V_E = (4/3)\pi(R^3 - (R/2)^3)$ , y dividir el resultado por el volumen total  $(4/3)\pi R^3$ .

El campo producido en el exterior de la esfera de radio  $R/2$  por la distribución  $\rho$  se obtiene aplicando el teorema de Gauss, que en este caso se calcula de la forma siguiente:

$$4\pi r'^2 E_2 = \frac{1}{\epsilon_o} \int_0^{R/2} \rho 4\pi r^2 dr = \frac{\rho}{\epsilon_o} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{\epsilon_o} Q$$

Donde  $Q = (4/3)\pi(R/2)^3\rho$  es la carga total sobre la esfera de radio  $R/2$ .  
Despejando y teniendo en cuenta que  $\mathbf{r}'$  es un vector con origen en  $O'$ ,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r'^3} \mathbf{r}'$$

Que es el campo creado por un carga puntual  $Q$  situada en  $O'$ .

Para calcular  $\langle \mathbf{E}_2 \rangle$  procedemos de la forma siguiente:

Si suponemos una carga  $Q$  situada en  $O'$  y una distribución  $\rho$  uniforme en  $\mathcal{V}_E$ , la fuerza sobre  $Q$  debida a la distribución  $\rho$  en  $\mathcal{V}_E$  es de signo contrario a la fuerza sobre la distribución  $\rho$  en  $\mathcal{V}_E$  debida a la carga  $Q$  en  $O'$ . La fuerza de  $Q$  sobre  $\rho$  en  $\mathcal{V}_E$  es:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}_E} \rho \mathbf{E}_2 dv$$

La fuerza de  $\rho$  en  $\mathcal{V}_E$  sobre  $Q$  es:

$$\mathbf{F}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \int_{\mathcal{V}_E} \frac{\rho(\mathbf{r}-R\mathbf{u}_y)}{|\mathbf{r}-R\mathbf{u}_y|^3} dv$$

$\mathbf{F}'/Q = \mathbf{E}_1$ , es decir, igual al campo calculado en el apartado 1),

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\mathcal{V}_E} \frac{\rho(\mathbf{r}-R\mathbf{u}_y)}{|\mathbf{r}-R\mathbf{u}_y|^3} dv = \mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{6\epsilon_o} R\mathbf{u}_y$$

Hemos dicho que  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$ , por tanto,

$$\int_{\mathcal{V}_E} \rho \mathbf{E}_2 dv = -Q \frac{\rho}{6\epsilon_o} R\mathbf{u}_y$$

Deducción basada en que  $\rho$  es constante.

Dividiendo la integral anterior por  $\rho$  y el volumen total de la esfera de radio  $R$  obtendremos,

$$\langle \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E}_2 dv = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_E} \mathbf{E}_2 dv = -\frac{3}{4\pi R^3} \frac{Q}{6\epsilon_o} R\mathbf{u}_y$$

La carga  $Q$  es la contenida en la esfera de radio  $R/2$  y centro en  $O'$ . Sustituyendo el valor de  $Q$  y realizando operaciones queda,

$$\langle \mathbf{E}_2 \rangle = -\frac{1}{48} \frac{\rho R}{\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 2.24

En el espacio tenemos un potencial  $\phi = 2x + 3$ . Comprobar que el valor medio de dicho potencial sobre la superficie del cubo indicado en la figura P2.24 es igual al valor del citado potencial en el centro del cubo.

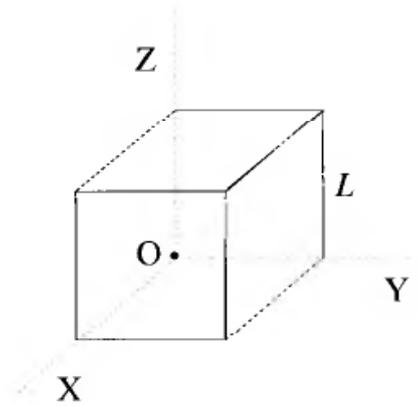


Figura P2.24

**Solución**

El valor medio del potencial en volumen ocupado por el cubo de lado  $L$  se calcula mediante la siguiente relación,

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{S} \int_S \phi ds$$

En este caso,

$$\int_S \phi ds = \int_{S_1} \phi(0) ds + \int_{S_2} \phi(L) ds + \int_{S_3} \phi(x) ds$$

$S_1$  es la cara que está en el plano  $YZ$   $x = 0$ , donde  $\phi = 3$ .  $S_2$  es la cara situada en el plano  $x = L$ , con  $\phi = 2L + 3$ .

La superficie  $S_3$  está formada por las cuatro caras laterales en las que  $\phi = 2x + 3$ .  $S_3$  es la superficie lateral de perímetro  $4L$  y altura  $L$ .

La superficie elemental en  $S_1$  es  $ds = dy dz$ , en  $S_2$   $ds = dy dz$  y en  $S_3$   $ds = 4L dx$

$$\int_{S_1} \phi(0) ds = \int_0^L dz \int_0^L 3 dy = 3L^2$$

$$\int_{S_2} \phi(L) ds = \int_0^L dz \int_0^L (2L + 3) dy = (2L + 3) L^2$$

$$\int_{S_3} \phi(x) ds = \int_0^L (2x + 3) 4L dx = 4L (L^2 + 3L) = L^2(4L + 12)$$

$$\int_S \phi ds = L^2 (3 + 2L + 3 + 4L + 12) = L^2 (6L + 18)$$

La superficie del cubo es  $S = 6L^2$ , por tanto,

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{S} \int_S \phi ds = \frac{1}{6L^2} (L^2 (6L + 18))$$

operando tendremos,

$$\langle \phi \rangle = L + 3$$

El potencial en el centro de cubo es

$$\phi\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) = 2\frac{L}{2} + 3 = L + 3$$

Por tanto queda demostrada la pregunta del problema

### PROBLEMA 2.25

Disponemos de tres esferas metálicas A, B y C; A y B del mismo radio y C hueca con radio diez veces superior B. La esferas están dispuesta como indica la figura P2.25. La esfera A está muy alejada de C y B, pero unida con B a través de un hilo conductor y el interruptor S, sin que B haga contacto con C.

Con el interruptor S abierto se aplica a la esfera A una carga  $Q$ , y a continuación se cierra el interruptor S. ¿Qué carga se induce en las caras interna y externa de C?

Se abre S y durante un instante unimos C a tierra (potencial cero). Después retiramos el contacto dejando la esfera C aislada de nuevo. ¿Qué ocurre con la carga en C?

Finalmente se une A a tierra y se cierra S. ¿Cual será la carga de las tres esferas?

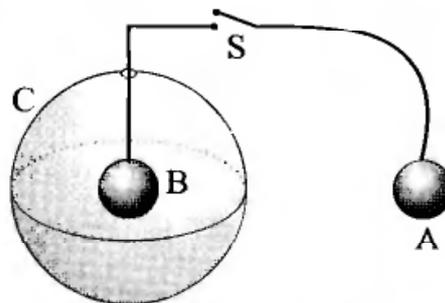


Figura P2.25

### Solución

1) Cuando se cierra el interruptor S se iguala el potencial de las esferas A y B, repartiéndose la carga  $Q$  entre ambas. Es decir,

$$V_A = V_B$$

$$Q_A + Q_B = Q$$

Puesto que el potencial de una esfera aislada viene dado por la expresión

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

y la capa esférica C no tiene carga neta, tenemos que,

$$\frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A} = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

siempre que consideremos que una no influye en la otra, lo que es el caso puesto que se supone que la esfera A está muy alejada de B y C.

Como  $r_A = r_B$  se deduce que  $Q_A = Q_B$  y, por tanto, dado que  $Q_A + Q_B = Q$ , tenemos,

$$Q_A = Q_B = \frac{Q}{2} \text{ y } Q_C = 0$$

es decir, la capa esférica C permanece neutra pero sus cargas libres se reparten de forma distinta entre la superficie interna y externa. Veamos esto: como en el interior del metal el campo eléctrico es nulo, el flujo a través de una superficie cerrada contenida en el interior de la capa esférica C también lo es. Y por el teorema de Gauss deducimos que la carga total encerrada debe ser 0, es decir

$$Q_{\text{ence}} = Q_B + Q_{C,i} = 0$$

de lo cual se deduce

$$Q_{C,i} = -Q_B = -\frac{Q}{2}$$

y como la capa C debe ser neutra,

$$Q_{C,i} + Q_{C,e} = Q_C = 0$$

luego,

$$Q_{C,e} = -Q_{C,i} = \frac{Q}{2}$$

2) Al abrir el interruptor S permanecen las cargas en A y B,

$$Q'_A = Q_A = \frac{Q}{2} ; Q'_B = Q_B = \frac{Q}{2}$$

y al llevar C a tierra hacemos que su potencial sea 0,  $V'_C = 0$ . Hay que tener cuidado porque la carga de la esfera B contribuye al potencial de la capa esférica C al estar ambas suficientemente cerca. El efecto de la esfera A se desprecia por que suponemos está muy alejada.

$$V'_C = \frac{Q'_B}{4\pi\epsilon_0 r_C} + \frac{Q'_C}{4\pi\epsilon_0 r_C} = 0$$

Por tanto,

$$Q'_C = -Q'_B = -\frac{Q}{2}$$

Aplicando el teorema de Gauss para una superficie entre la cara interna y externa de C como hemos hecho anteriormente llegamos a la conclusión que

$$Q'_{C,i} + Q'_B = 0 ; Q'_C = Q'_{C,i} = -\frac{Q}{2}$$

es decir, la carga de la parte exterior se ha neutralizado con cargas procedentes de la tierra y la capa queda con la carga  $-Q/2$  en su cara interna.

3) Al cerrar S y conectar a tierra igualamos el potencial de A y B a 0,

$$V_A'' = V_B'' = 0$$

de lo que se deduce inmediatamente que la carga en A es nula, ya que al estar muy alejada suponemos que no recibe la influencia de la esfera C.

$$Q_A'' = 0$$

La capa esférica C permanece aislada y por tanto mantiene la misma carga neta del apartado anterior.

$$Q_C'' = Q_C' = -\frac{Q}{2}$$

Para calcular la carga en B tenemos en cuenta que su potencial es cero y se debe a su propia carga y a la que tiene la capa esférica C.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_C''}{r_C} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B''}{r_B} = 0$$

Despejando  $Q_B''$  ( $r_C = 10r_B$ ),

$$Q_B'' = -Q_C'' \frac{r_B}{r_C} = Q \frac{r_B}{2r_C} = 0,05Q$$

La carga  $Q_B''$  induce una carga negativa en la cara interna de C y la misma con signo positivo en la cara externa. Operando como en el primer apartado,

$$Q_{C,i}'' = -0,05Q$$

y en la externa tendremos la inducida con signo positivo más  $Q_C''$ ,

$$Q_{C,e}'' = -0,5Q + 0,05Q = -0,45Q$$

$$Q_C'' = Q_{C,i}'' + Q_{C,e}'' = -0,5Q$$

### PROBLEMA 2.26

Entre dos planos conductores indefinidos, separados por una distancia  $d$  y unidos por un conductor, se sitúa sobre otro plano, una distribución de carga superficial  $\sigma$  como indica la figura P2.26a.  $d_1 = 2d_2$ .

Calcular el campo eléctrico entre las placas y la densidad de carga inducida en cada una de ellas.

#### Solución

1) Para resolver el problema aplicamos el teorema de Gauss, la condición de campo conservativo y la ecuación que relaciona los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ .

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad ; \quad V_{AB} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad ; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

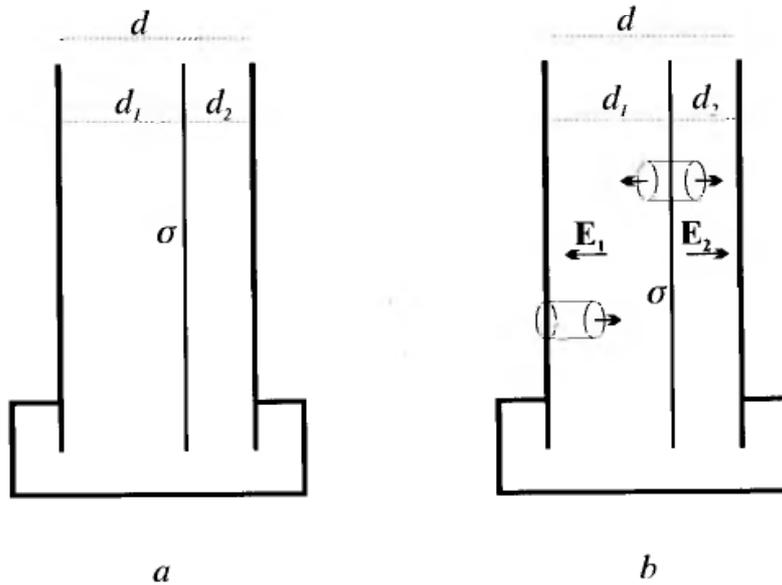


Figura P2.26

Aplicamos el teorema de Gauss a un cilindro de tapas paralelas a los planos como muestra la figura P2.26b. El área de las tapas es  $A$ . El cilindro atraviesa la distribución de carga. Llamamos  $E_1$  al campo a la izquierda de la distribución y  $E_2$  al campo a la derecha.

$$\mathbf{E}_1 \cdot A (-\mathbf{u}_y) + \mathbf{E}_2 \cdot A \mathbf{u}_y = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (2.26.1)$$

Por otro lado calculamos la circulación de  $E$  a lo largo de una línea recta que cruza el espacio entre las placas conductoras. Esto es, calculamos la integral de línea entre las placas, que es igual a la d.d.p. entre ambas. La d.d.p. es 0 debido a que están unidas exteriormente por un cable metálico. Es decir,

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \rightarrow \mathbf{E}_1 \cdot d_1 \mathbf{u}_y + \mathbf{E}_2 \cdot d_2 \mathbf{u}_y = 0$$

$$\mathbf{E}_1 = -E_1 \mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = E_2 \mathbf{u}_y$$

por tanto, si realizamos las operaciones vectoriales necesarias queda

$$\begin{aligned} -E_1 d_1 + E_2 d_2 &= 0 \\ E_1 + E_2 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.26.2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.26.2) y teniendo en cuenta que  $d_1 = 2d_2$ , obtenemos:

$$E_1 = \frac{\sigma}{3\epsilon_o} \quad ; \quad E_2 = 2 E_1 = \frac{2\sigma}{3\epsilon_o} \quad (2.26.3)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\sigma}{3\epsilon_o}\mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{2\sigma}{3\epsilon_o}\mathbf{u}_y \quad (2.26.4)$$

2) Para calcular la densidad de carga inducida en los planos conductores, aplicamos el teorema de Gauss a dos cilindros que atraviesan una cara de cada placa metálica, quedando una tapa en el exterior y otra en el interior, ver figura P2.26b. Dentro de la placa el campo es 0.

En la placa izquierda

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = \sigma_1$$

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_o \mathbf{E}_1 = -\epsilon_o E_1 \mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{n} = \mathbf{u}_y$$

por tanto,

$$\sigma_1 = -\epsilon_o E_1$$

En la placa de la derecha

$$\mathbf{D}_2 = \epsilon_o E_2 \mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{n}' = -\mathbf{u}_y$$

de donde se deduce que,

$$\sigma_2 = -\epsilon_o E_2$$

Sustituyendo los módulos de los campos dados por las ecuaciones (2.26.3), tendremos las densidades de carga respectivas,

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{3} \quad ; \quad \sigma_2 = -\frac{2\sigma}{3}$$

## Capítulo 3

# DIPOLO ELÉCTRICO

## 3.1 INTRODUCCIÓN

### 3.1.1 POTENCIAL Y CAMPO DEBIDO A UN DIPOLO

En este apartado vamos a deducir el potencial y el campo electrostático debido a una distribución particular de dos cargas de signo contrario dispuestas muy próximas entre si, conocida con el nombre de dipolo eléctrico.

Se define el **dipolo eléctrico** como *un sistema formado por dos cargas  $q$  y  $-q$  separadas por una distancia  $d$ , de forma que cuando la distancia  $d$  tiende a cero  $q$  tiende a infinito y el producto  $p = qd$  se mantiene constante. A este sistema de cargas se le asocia una magnitud vectorial denominada **momento dipolar eléctrico**  $\mathbf{p}$ , que es igual al módulo de la carga por el vector que va desde  $-q$  a  $q$ ,  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ .*

En un dipolo la carga neta es nula y sus características vienen determinadas por su momento dipolar  $\mathbf{p}$ .

#### 3.1.1.1 Potencial debido a un dipolo eléctrico

Es el creado por el sistema de cargas descrito anteriormente cuando la distancia del dipolo al punto considerado es mucho mayor que  $d$ . En la figura 3.1 se indican las posiciones y distancias.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (3.1)$$

El potencial también se representa por  $\phi(\mathbf{r})$ .

Si el dipolo está situado en el punto de coordenadas  $\mathbf{r}'$  en lugar del origen de coordenadas, el potencial será:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.2)$$

El campo eléctrico se suele obtener en coordenadas esféricas mediante:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \operatorname{sen} \theta}{r^3} \quad (3.3)$$

En las ecuaciones anteriores se ha supuesto el dipolo situado en el origen de coordenadas, si estuviera en el punto  $\mathbf{r}'$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (3.4)$$

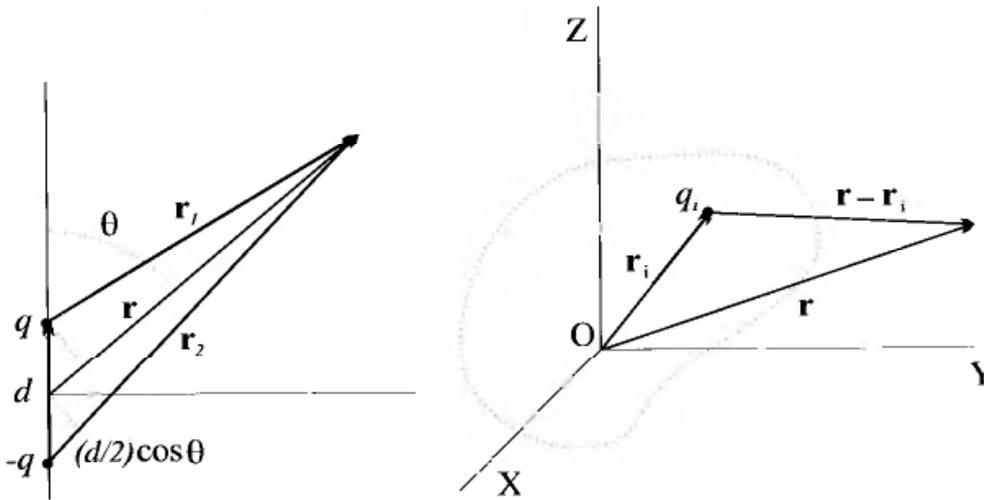


Figura 3.1

Figura 3.2

### 3.1.2 POTENCIAL DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS: MOMENTOS MULTIPOLARES

El potencial debido a una distribución de cargas puntuales como la indicada en la figura 3.2 es,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(r^2 + r_i^2 - 2r r_i \cos \theta_i)^{1/2}}$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i \cos \theta_i +$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^N \frac{q_i r_i^2}{2} (3 \cos^3 \theta_i - 1) + \dots$$

$$V(\mathbf{r}) = V_M(\mathbf{r}) + V_D(\mathbf{r}) + V_Q(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.5)$$

La fórmula (3.5) es complicada de manejar porque en los distintos términos están comprometidas simultáneamente las coordenadas del punto  $\mathbf{r}$  y las de las cargas  $\mathbf{r}_i$ , por ejemplo en  $\cos \theta_i$ . Interesa encontrar expresiones que separen ambas coordenadas. El procedimiento consiste en poner la fórmula anterior de manera que cada término tenga una parte dependiente de la distribución de cargas y otra del punto donde se calcula el potencial. De esta manera se obtienen los llamados términos monopolar, dipolar, cuadrupolar, etc., y los momentos respectivos.

### 3.1.2.1 Término monopolar $V_M(\mathbf{r})$

Este término es de la forma:

$$V_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (3.6)$$

Donde  $Q$  es la carga total del sistema y se conoce como *momento monopolar*.

*Cargas puntuales:*

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i \quad (3.7a)$$

*Distribución continua:*

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (3.7b)$$

### 3.1.2.2 Término dipolar $V_D(\mathbf{r})$

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.8)$$

Donde  $\mathbf{p}$  es el *momento dipolar*.

*Cargas puntuales:*

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \quad (3.9a)$$

*Distribución continua:*

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv' \quad (3.9b)$$

### 3.1.2.3 Término cuadripolar $V_Q(\mathbf{r})$

$$V_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \sum_j \sum_k jk Q_{jk} \quad (j = x, y, z ; k = x, y, z) \quad (3.10)$$

Donde  $Q_{jk}$  es el *momento cuadripolar*.

*Cargas puntuales:*

$$Q_{jk} = \sum_{i=1}^N q_i (3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk}) \quad ; \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (3.11a)$$

*Distribución continua:*

$$Q_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (3j' k' - r'^2 \delta_{jk}) dv' \quad (3.11b)$$

Las componentes del momento cuadripolar forman una matriz simétrica ( $Q_{jk} = Q_{kj}$ ), y además los elementos de la diagonal principal cumplen la relación siguiente:

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0 \quad (3.12)$$

### 3.1.2.4 Cambio de origen

Si trasladamos el origen de coordenadas del punto O al  $O_o$  en la forma definida por el vector  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ , las nuevas coordenadas de posición son:

$$\mathbf{r}_{io} = \mathbf{r}_i - \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'_o = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$$

Este cambio de coordenadas no afecta al momento monopolar  $Q$ , pero si puede afectar a los momentos dipolar, cuadripolar, etc.

El momento dipolar con respecto al nuevo origen es:

$$\mathbf{p}_o = \mathbf{p} - Q \mathbf{a} \quad (3.13)$$

Si  $Q = 0$ ,

$$\mathbf{p}_o = \mathbf{p} \quad (3.14)$$

El momento cuadripolar con respecto al origen  $O_o$ , con  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ , será:

$$Q_{xy}^o = Q_{xy} - 3a_y p_x - 3a_x p_y + 3a_x a_y Q \quad (3.15)$$

Si  $Q = 0$  y  $\mathbf{p} = 0$ ,

$$Q_{jk}^o = Q_{jk}$$

### 4.3 PROBLEMAS

#### P 4.1

En los vértices de un cuadrado de lado  $2L$  se sitúan cuatro cargas como indica la figura P4.1.

$$q_1 = q; \quad q_2 = -q; \quad q_3 = q \quad \text{y} \quad q_4 = -q$$

Calcular los términos y momentos dipolar y cuadripolar de la distribución de cargas puntuales.

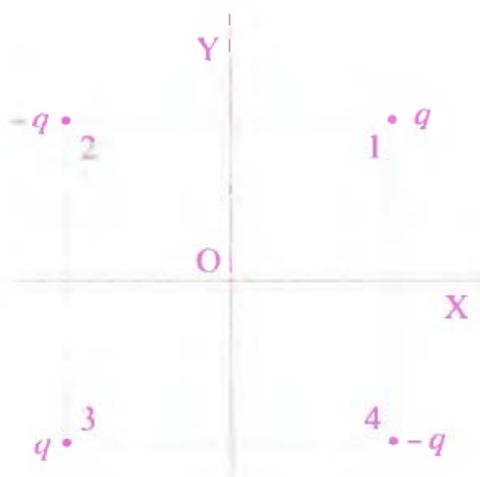


Figura P4.1

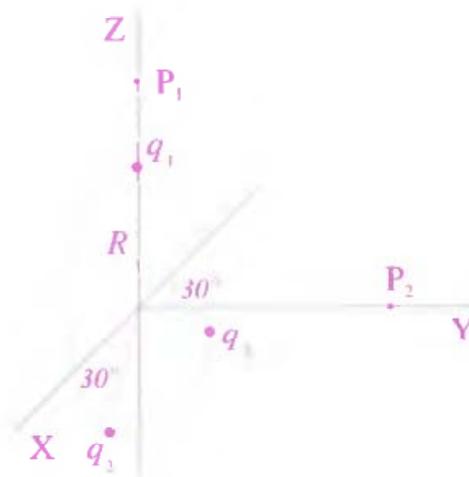


Figura P4.2

#### P 4.2

Dada la distribución de carga indicada en la figura P4.2, donde  $q_1 = q$ ,  $q_2 = q_3 = -q/2$ .

1) Calcular el potencial en los puntos  $P_1$  y  $P_2$  mediante la ecuación (2.6).

$$P_1 = (0, y_o, 0); \quad P_2 = (0, 0, z_o); \quad z_o = y_o = 2R$$

2) Calcular los términos monopolar, dipolar y cuadripolar del potencial. Comparar los resultados obtenidos en 1) con la suma de los tres términos de 2).

#### P 4.3

Consideramos una molécula en forma de hexágono regular como la indicada en la figura P4.3a.

1) Calcular el momento dipolar de la molécula.

2) Sin modificar las distancias  $L$  entre los átomos, comprimimos la molécula en la dirección del eje X de forma que el ángulo  $\alpha$  cambie de  $120^\circ$  a  $120^\circ - \theta$ .

Calcular la variación del momento dipolar en función de  $\theta$ .

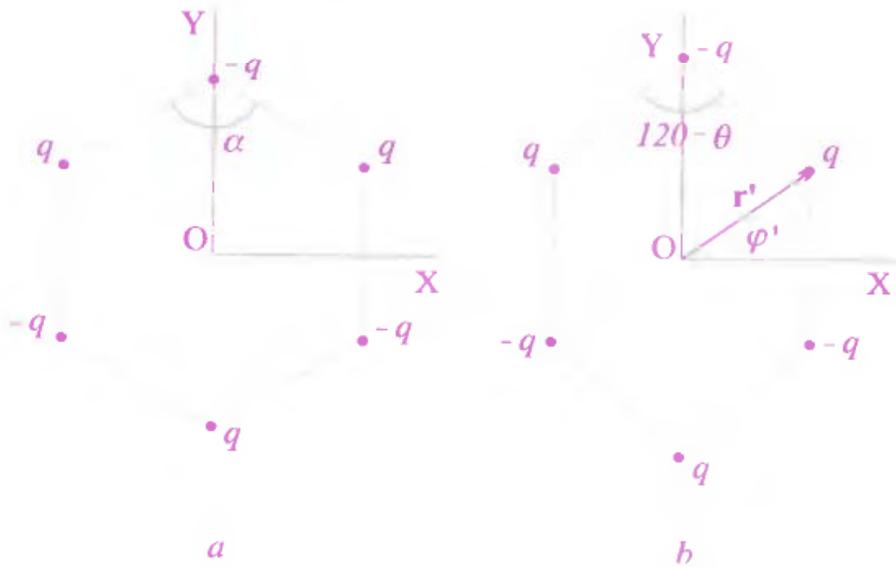


Figura P4.3

**P 4.4**

Calcular los momentos dipolar y cuadripolar de la distribución de cargas indicada en la figura P4.4.

En los puntos  $(d, 0, 0)$ ,  $(-d, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, -d, 0)$ ,  $(0, 0, d)$  y  $(0, 0, -d)$  existe una carga  $-q$ .

En el punto  $(0, 0, \Delta d)$  existe una carga  $4q$ .

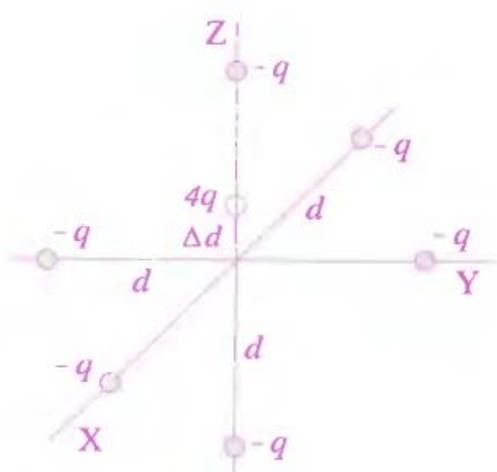


Figura P4.4

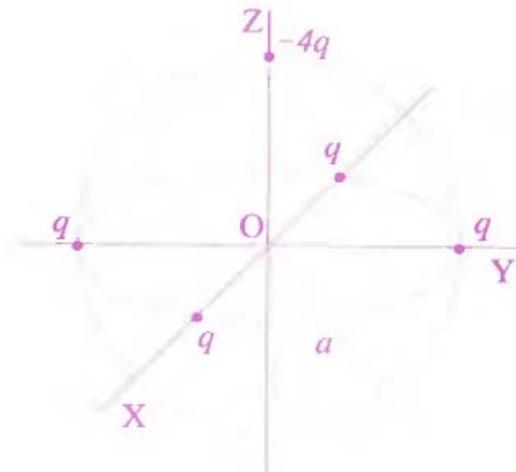


Figura P4.5

**P 4.5**

Dada la distribución de cargas puntuales indicada en la figura P4.5, calcular los términos monopolar, dipolar y cuadripolar del potencial en un punto determinado por el vector de posición  $\mathbf{r}$ .

**P 4.6**

Dada la distribución lineal y uniforme de carga situada entre los puntos  $(0, 0, L/2)$  y  $(0, 0, L/2)$  y densidad  $\lambda(\text{C/cm})$ .  $L = 1 \text{ cm}$ .

- 1) Calcular el potencial en el punto  $(0, y_0, 0)$ .
- 2) Calcular los momentos y términos monopolar, dipolar y cuadripolar.
- 3) Comparar el resultado obtenido en 1) con la suma de los términos calculados en 2) para  $y_0 = 10 \text{ cm}$ .

**P 4.7**

Sobre el eje  $Z$  y entre las coordenadas  $L$  y  $-L$  tenemos una distribución lineal de carga  $\lambda = \lambda_0(z/L)$  (su signo es el de la coordenada  $z$ ).

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar de dicha distribución.

**P 4.8**

Sobre un hilo metálico, cuya sección es despreciable frente a su longitud y dispuesto en forma de circunferencia de radio  $R$  sobre el plano  $XY$ , se distribuye una densidad lineal de carga  $\lambda = \lambda_0(1 - \cos \varphi)$ .

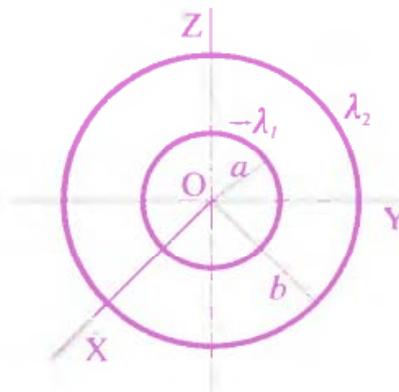
Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar de la distribución de carga.

**P 4.9**

Sobre dos circunferencias, cuyos radios respectivos son  $a$  y  $b$ , se sitúan las distribuciones lineales de carga  $-\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

$$\text{Se cumple la condición } |2\pi a \lambda_1| = |2\pi b \lambda_2|$$

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar.



**Figura P4.9**

**P 4.10**

Dada la distribución de carga lineal  $\lambda = \lambda_0 \cos(\varphi/4)$  sobre la circunferencia de radio  $a$  que muestra la figura P4.10, calcular los momentos monopolar y dipolar, así como el potencial en el punto  $P(0, 0, a)$

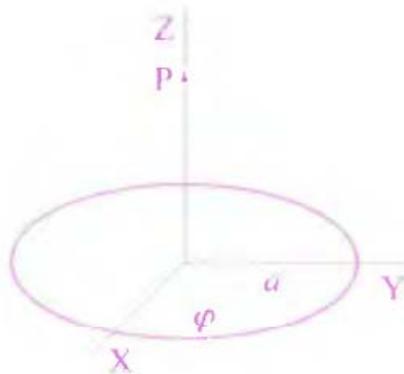


Figura P4.10

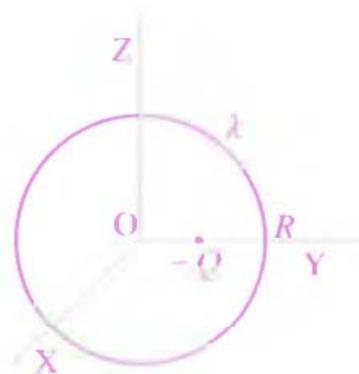


Figura P4.11

**P 4.11**

Sobre una circunferencia de radio  $R$ , situada en el plano  $ZY$ , tenemos una distribución lineal y uniforme de carga  $\lambda$ , que cumple la condición  $2\pi R\lambda = Q$ . Sobre el eje  $Y$ , a una distancia  $d = R/2$ , se sitúa una carga  $-Q$ .

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar con respecto al origen  $O$ .

**P 4.12**

La distribución de carga que se muestra en la figura P4.12 se compone de la siguiente forma: Dos esferas de radio  $a$ , cuyos centros respectivos están en  $y = -a/2$  e  $y = a/2$ , y entre las que se produce una intersección. En la esfera izquierda existe una densidad de carga  $-\rho$ , salvo en la intersección, y la esfera derecha tiene una densidad de carga  $\rho$ , salvo en la intersección.

Calcular los términos monopolar y dipolar del potencial debido a la citada distribución de carga en un punto situado a una distancia  $r$  del origen de coordenadas.

**P 4.13**

Una parte de la molécula de un material dieléctrico está formada por iones distribuidos como indica la figura P4.13.

El momento dipolar de todos los iones es del mismo módulo  $p$  y su dirección y sentido se indica en la figura P4.13.

Calcular la fuerza sobre el ion situado en el origen de coordenadas con carga  $4q$ .

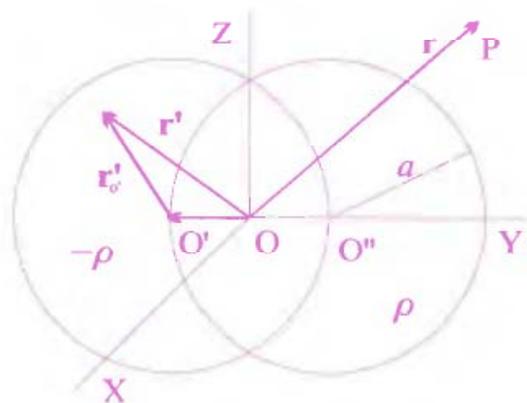


Figura P4.12

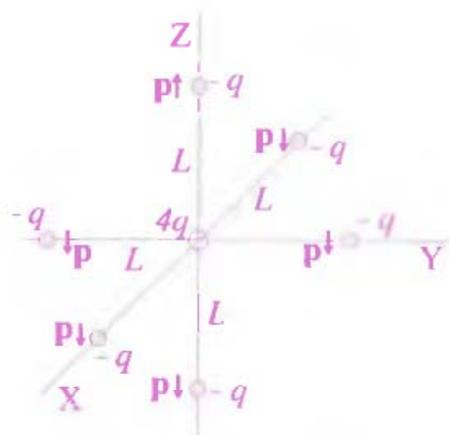


Figura P4.13

## 3.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 3.1

En los vértices de un cuadrado de lado  $2L$  se sitúan cuatro cargas como indica la figura P3.1.

$$q_1 = q; \quad q_2 = -q; \quad q_3 = q \quad \text{y} \quad q_4 = -q$$

Calcular los términos y momentos dipolar y cuadripolar de la distribución de cargas puntuales.

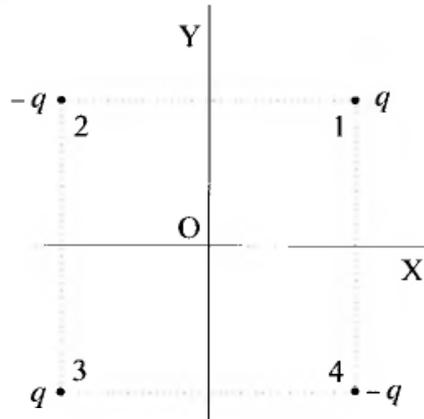


Figura P3.1

#### Solución

##### 1) Cálculo del momento y término dipolar

Para calcular el momento dipolar utilizaremos la ecuación (3.7a), con los siguientes vectores de posición correspondientes a cada carga:

$$r_1 = (L, L, 0); \quad r_2 = (-L, L, 0); \quad r_3 = (-L, -L, 0) \quad \text{y} \quad r_4 = (L, -L, 0)$$

La suma de las cargas es cero, por tanto el momento y término monopolar son nulos, ( $Q = 0$ ). De esta situación, teniendo en cuenta la ecuación (3.14), se deduce que el momento dipolar no depende del origen de coordenadas.

El momento dipolar  $\mathbf{p}$  será:

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i = L (q(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) - q(-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) + q(-\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y) - q(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y))$$

$$\mathbf{p} = 0$$

El término dipolar por tanto será nulo.

$$V_D(\mathbf{r}) = 0$$

##### 2) Cálculo del momento y término cuadripolar

Utilizaremos la ecuación (3.11a), con las coordenadas correspondientes a cada carga especificadas en el apartado anterior.

Dado que la componente  $z$  es nula para todas las cargas, y  $\delta_{jk}$  es nula para  $j$  distinto de  $k$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

El valor de  $Q_{xy}$  se calcula de la forma siguiente,

$$Q_{xy} = (q(3L^2 - 0) - q(-3L^2 - 0) + q(3L^2 - 0) - q(-3L^2 - 0)) = 12qL^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 12qL^2$$

El valor de  $r_i$  es igual para todas las cargas:

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = r_4^2 = 2L^2 \quad \text{y} \quad \delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1$$

$$Q_{xx} = (3L^2 - 2L^2)(q - q + q - q) = 0$$

$$Q_{yy} = (3L^2 - 2L^2)(q - q + q - q) = 0$$

$$Q_{zz} = (0 - 2L^2)(q - q + q - q) = 0$$

En definitiva el momento cuadrupolar queda de la forma:

$$Q_{jk} = 12qL^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El término cuadrupolar se obtiene aplicando la ecuación (3.10), con  $\mathbf{r}(x, y, z)$ ;

$$V_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} (xy Q_{xy} + yx Q_{yx}) = \frac{12L^2 q xy}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

### PROBLEMA 3.2

Dada la distribución de carga indicada en la figura P3.2, donde  $q_1 = q$ ,  $q_2 = q_3 = -q/2$ .

1) Calcular el potencial en los puntos  $P_1$  y  $P_2$  mediante la ecuación (2.6).

$$P_1 = (0, y_o, 0); \quad P_2 = (0, 0, z_o); \quad z_o = y_o = 2R$$

2) Calcular los términos monopolar, dipolar y cuadrupolar.

Comparar los resultados obtenidos en 1) con la suma de los tres términos de 2).

#### Solución

1) *Cálculo del potencial*

Mediante la ecuación (2.6) se calcula el potencial en  $P_1$  y  $P_2$ .

*Potencial en  $P_1$*

Los vectores respectivos son:

$$\mathbf{r} = y_o \mathbf{u}_y = 2R \mathbf{u}_y; \quad \mathbf{r}_1 = R \mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}_2 = R \cos 30^\circ \mathbf{u}_x - R \sin 30^\circ \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r}_3 = -R \cos 30^\circ \mathbf{u}_x - R \sin 30^\circ \mathbf{u}_z$$

La distancia desde cada carga al punto  $P_1$  es:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = R\sqrt{5}$$

Aplicando los datos anteriores y la ecuación (2.6) obtenemos,

$$V(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R\sqrt{5}} \left( q - \frac{q}{2} - \frac{q}{2} \right) = 0$$

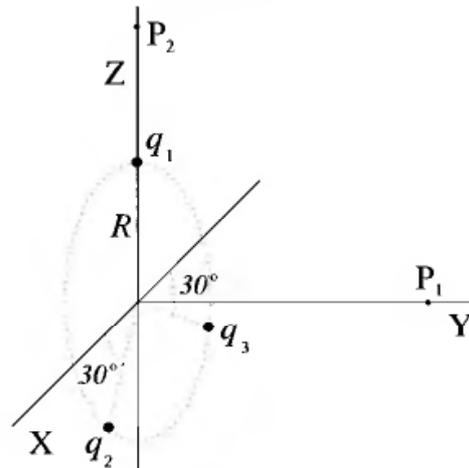


Figura P3.2

*Potencial en  $P_2$*

Procedemos de forma similar al caso anterior. Ahora varía únicamente el vector de posición  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = 2R\mathbf{u}_z$ .

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = R; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = (5R^2 + 4R^2 \sin^2 30^\circ)^{1/2} = R\sqrt{7}$$

$$V(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R} - \frac{q}{2R\sqrt{7}} - \frac{q}{2R\sqrt{7}} \right)$$

Operando resulta,

$$V(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left( 1 - \frac{\sqrt{7}}{7} \right)$$

2) *Cálculo de los términos monopolar, dipolar y cuadripolar*

2a) *Término monopolar  $V_M(\mathbf{r})$*

Se obtiene aplicando las ecuaciones (3.6) y (3.7a). De la segunda se deduce que:

$$Q = q - \frac{q}{2} - \frac{q}{2} = 0$$

por tanto,

$$V_M(\mathbf{r}) = 0$$

2b) *Término dipolar  $V_D(\mathbf{r})$*

Se obtiene aplicando las ecuaciones (3.8) y (3.9a).

*Momento dipolar  $\mathbf{p}$*

Para calcular  $\mathbf{p}$  tomamos los valores de  $q_i$  y  $\mathbf{r}_i$  del apartado anterior, y los llevamos a la ecuación (3.9a).

$$\mathbf{p} = qR \left( \mathbf{u}_z - \frac{1}{2}(\cos 30^\circ \mathbf{u}_x - \text{sen } 30^\circ \mathbf{u}_z) - \frac{1}{2}(-\cos 30^\circ \mathbf{u}_x - \text{sen } 30^\circ \mathbf{u}_z) \right)$$

Realizando operaciones queda,

$$\mathbf{p} = \frac{3}{2}qR \mathbf{u}_z$$

*Cálculo de  $V_D(\mathbf{r})$  en  $P_1$*

Podemos observar que el momento dipolar no depende del punto donde se desea calcular el potencial. Dicho punto se tiene en cuenta a través del valor de  $\mathbf{r}$  que aparece en  $V_D(\mathbf{r})$ , por lo que para calcular el potencial en  $P_1$  utilizamos el valor de  $\mathbf{p}$  obtenido antes y aplicamos la ecuación (3.8), con  $\mathbf{r} = 2R\mathbf{u}_y$  y  $|\mathbf{r}| = 2R$ , por tanto  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0$ , y en consecuencia,

$$V_D(P_1) = 0$$

*Cálculo de  $V_D(\mathbf{r})$  en  $P_2$*

Aplicando la ecuación (3.8) con  $\mathbf{r} = 2R\mathbf{u}_z$ ;  $|\mathbf{r}| = 2R$ , es decir,

$$V_D(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{8R}$$

2c) *Término cuadripolar  $V_Q(\mathbf{r})$*

Calculamos en primer lugar el momento cuadripolar mediante la ecuación (3.11a), y después  $V_Q(\mathbf{r})$  utilizando la ecuación (3.10).

*Momento cuadripolar*

Los valores que utilizamos para calcular  $Q_{jk}$  son los indicados al principio, por tanto,

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = R; \quad x_2 = R \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad y_2 = 0, \quad z_2 = -\frac{R}{2}$$

$$x_3 = -R \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad y_3 = 0, \quad z_3 = -R/2$$

$$Q_{xx} = \sum_1^3 q_i(3x_i^2 - r_i^2) = q(0 - R^2) - 2\frac{q}{2} \left( \frac{9R^2}{4} - R^2 \right) = -\frac{9q}{4}R^2$$

$$Q_{yy} = \sum_1^3 q_i(3y_i^2 - r_i^2) = q(0 - R^2) - 2\frac{q}{2}(0 - R^2) = 0$$

$$Q_{zz} = \sum_1^3 q_i(3z_i^2 - r_i^2) = q(3R^2 - R^2) - 2\frac{q}{2} \left( \frac{3R^2}{4} - R^2 \right) = \frac{9q}{4}R^2$$

$$Q_{xy} = \sum_1^3 q_i(3x_i y_i - 0) = 0 \text{ ya que } y_i = 0 \text{ para todo } i$$

$$Q_{zy} = 0 \text{ ya que } y_i = 0 \text{ para todo } i$$

$$Q_{xz} = q(0 - 0) - \frac{q}{2} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 - 0 \right) - \frac{q}{2} \left( \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 - 0 \right) = 0$$

$$Q_{jk} = \frac{9q}{4} R^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Cálculo de  $V_Q(\mathbf{r})$  en  $P_1$*

Mediante la ecuación (3.10) con  $\mathbf{r} = 2R\mathbf{u}_y = (0, 2R, 0)$ , obtenemos,

$$V_Q(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2R)^5} \frac{1}{2} \frac{9q}{4} R^2 (-xx + zz)$$

como en  $P_1$   $x = 0$ ,  $z = 0$ ,

$$V_Q(P_1) = 0$$

*Cálculo de  $V_Q(\mathbf{r})$  en  $P_2$*

Procedemos de forma similar al caso anterior, pero ahora  $\mathbf{r} = 2R\mathbf{u}_z = (0, 0, 2R)$ , por tanto,

$$V_Q(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2R)^5} \frac{1}{2} \frac{9q}{4} R^2 (-0 + z_0 z_0)$$

como  $z_0 = 2R$ ,

$$V_Q(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2R)^5} \frac{1}{2} \frac{9q}{4} R^2 4R^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{9}{64} \frac{q}{R}$$

3) *Comparación de los resultados obtenidos en 1) con la suma de los obtenidos en 2)*

*Punto  $P_1$*

Tanto los resultados obtenidos en 1) como en 2) son nulos en este punto. Este resultado es el mismo que obtendríamos en cualquier punto del eje Y, lo que significa que el campo eléctrico sobre todos los puntos del eje Y es perpendicular a dicho eje, y el trabajo para desplazarnos sobre él es nulo,  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Es decir, sobre el eje Y el potencial es igual a cero por lo que coincide con el tomado como referencia en el infinito.

*Punto  $P_2$*

El valor obtenido en 1) es:

$$V(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left( 1 - \frac{\sqrt{7}}{7} \right) \simeq 0,622 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

La suma de los valores obtenidos en 2) es:

$$V'(P_2) = V_D(P_2) + V_Q(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left( \frac{3}{8} + \frac{9}{64} \right) \simeq 0,516 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

Comparando los dos resultados vemos que la relación entre ambos valores es 0,829. Esto significa que el error que cometeríamos si sustituyéramos el valor obtenido en 1) por la suma de los obtenidos en 2) sería de un 17%, aproximadamente. La razón principal estriba en que el punto  $P_2$  está a una distancia del mismo orden de magnitud que las dimensiones de la distribución. Para que los dos valores calculados en los apartados 1) y 2) sean prácticamente iguales se requiere tomar puntos donde  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_i|$ .

### PROBLEMA 3.3

Consideramos una molécula en forma de hexágono regular como la indicada en la figura P3.3a.

1) Calcular el momento dipolar de la molécula.

2) Sin modificar las distancias  $L$  entre los átomos, comprimimos la molécula en la dirección del eje X de forma que el ángulo  $\alpha$  cambie de  $120^\circ$  a  $120^\circ - \theta$ .

Calcular la variación del momento dipolar en función de  $\theta$ .

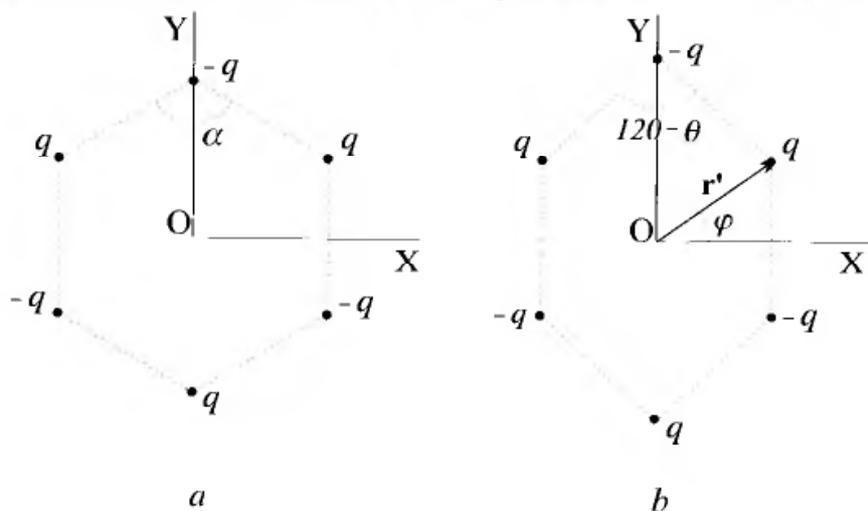


Figura P3.3

### Solución

1) *Momento dipolar p*

Calculamos  $\mathbf{p}$  mediante la ecuación (3.9a), con los valores siguientes para  $q_i$  y  $\mathbf{r}_i$ ,  $L = \text{radio} = R$ .

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q; \quad r_1 = (L \cos 30^\circ, L \sin 30^\circ); \quad q_2 = -q; \quad r_2 = (0, L); \quad q_3 = q \\
 r_3 &= (-L \cos 30^\circ, L \sin 30^\circ); \quad q_4 = -q; \quad r_4 = (-L \cos 30^\circ, -L \sin 30^\circ) \\
 q_5 &= q; \quad r_5 = (0, -L); \quad q_6 = -q; \quad r_6 = (L \cos 30^\circ, -L \sin 30^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= qL (\cos 30^\circ + 0 - \cos 30^\circ - \cos 30^\circ + 0 + \cos 30^\circ) \mathbf{u}_x \\ &\quad + qL (\sin 30^\circ + 1 + \sin 30^\circ - \sin 30^\circ - 1 - \sin 30^\circ) \mathbf{u}_y \\ \mathbf{p} &= 0\end{aligned}$$

2) *Variación del momento dipolar*

La molécula deformada se representa en la figura P3.3b.

En lo que respecta al eje X la simetría de la distribución es la misma que la anterior, dando por tanto una componente nula en esa dirección. El cálculo del momento dipolar  $\mathbf{p}'$ , en su componente Y, se obtiene tomando los siguientes valores de las coordenadas:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= (r' \cos \varphi, r' \sin \varphi); \quad \mathbf{r}_2 = (0, (r' \sin \varphi + L \cos(60^\circ - \theta/2))) \\ \mathbf{r}_3 &= (-r' \cos \varphi, r' \sin \varphi); \quad \mathbf{r}_4 = (-r' \cos \varphi, -r' \sin \varphi) \\ \mathbf{r}_5 &= (0, -(r' \sin \varphi + L \cos(60^\circ - \theta/2))) ; \quad \mathbf{r}_6 = (r' \cos \varphi, -r' \sin \varphi)\end{aligned}$$

El momento dipolar  $\mathbf{p}'$  sólo tiene componente en la dirección del eje Y, que es,

$$\mathbf{p}' = (4qr' \sin \varphi - 2q(r' \sin \varphi + L \cos(60^\circ - \theta/2))) \mathbf{u}_y$$

Dado que la longitud del lado no se modifica,  $r' \sin \varphi = L/2$ , por tanto,

$$\mathbf{p}' = qL (1 - 2 \cos(60^\circ - \theta/2)) \mathbf{u}_y$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(60^\circ - \theta/2) = \cos 60^\circ \cos \frac{\theta}{2} + \sin 60^\circ \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\mathbf{p}' = qL \left( 1 - \left( \cos \frac{\theta}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right) \mathbf{u}_y$$

Los desarrollos en serie de las funciones seno y coseno son:

$$\sin(\theta/2) = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{48}\theta^3 + O(\theta^5)$$

$$\cos(\theta/2) = 1 - \frac{1}{8}\theta^2 + \frac{1}{384}\theta^4 + O(\theta^5)$$

Tomando el primer término del desarrollo en serie de  $\cos \theta/2$  y  $\sin \theta/2$ , la expresión para  $\mathbf{p}'$  queda de la forma,

$$\mathbf{p}' \simeq -qL \left( \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) \theta \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 3.4

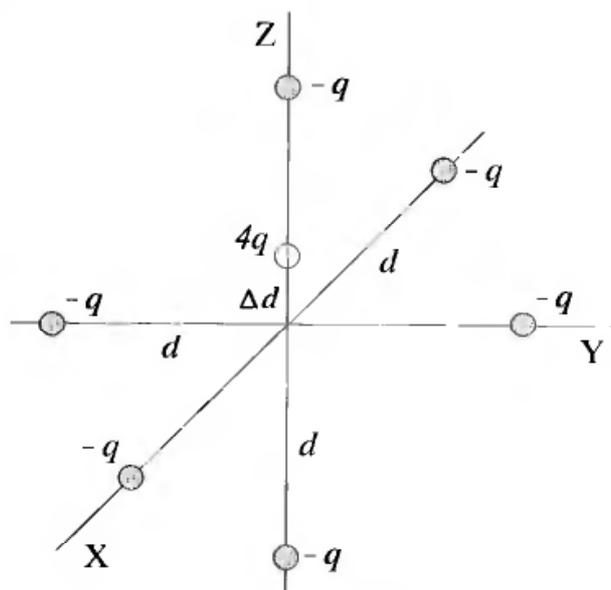
Calcular los momentos dipolar y cuadrupolar de la distribución de cargas indicada en la figura P3.4.

En los puntos  $(d, 0, 0)$ ,  $(-d, 0, 0)$ ,  $(0, d, 0)$ ,  $(0, -d, 0)$ ,  $(0, 0, d)$  y  $(0, 0, -d)$  existe una carga  $-q$ .

En el punto  $(0, 0, \Delta d)$  existe una carga  $4q$ .

### Solución

#### 1) Momento dipolar



**Figura P3.4**

Utilizaremos la ecuación (3.9a) con los valores de las coordenadas arriba indicados.

El sistema de cargas  $-q$  es simétrico con respecto al origen de coordenadas, por tanto su contribución al momento dipolar es nula si se toma dicho origen como referencia para el cálculo de  $\mathbf{p}$ .

El valor de  $\mathbf{p}$  será

$$\mathbf{p} = 4q\Delta d \mathbf{u}_z$$

#### 2) Cálculo del momento cuadrupolar

Usamos la ecuación (3.11a) y los valores de  $q_i$  y  $\mathbf{r}_i$  arriba indicados. Para las cargas

$$-q, r_i^2 = d^2; \text{ para } 4q, r_i^2 = (\Delta d)^2.$$

$$Q_{xx} = -2q(3d^2 - d^2) - 4q(0 - d^2) + 4q(0 - (\Delta d)^2) = -4q(\Delta d)^2$$

$$Q_{yy} = -2q(3d^2 - d^2) - 4q(0 - d^2) + 4q(0 - (\Delta d)^2) = -4q(\Delta d)^2$$

$$Q_{zz} = -2q(3d^2 - d^2) - 4q(0 - d^2) + 4q(3(\Delta d)^2 - (\Delta d)^2) = 8q(\Delta d)^2$$

Vemos que se cumple la ecuación (3.12), es decir, que la suma de los términos de la diagonal es nula.

Los términos  $Q_{jk}$ ,  $j$  distinto de  $k$ , son nulos, ya que  $\delta_{jk} = 0$  y las coordenadas de las cargas tienen todas dos componentes nulas.

$$Q_{jk} = 4q(\Delta d)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### PROBLEMA 3.5

Dada la distribución de cargas puntuales indicada en la figura P3.5, calcular los términos monopolar, dipolar y cuadripolar del potencial en un punto determinado por el vector de posición  $\mathbf{r}$ .

#### Solución

Es necesario calcular antes los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar.

*Momento monopolar*

$$M = \sum_i q_i = q + q + q + q - 4q = 0$$

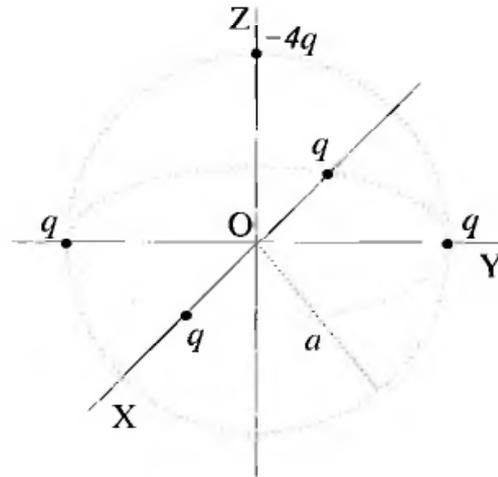


Figura P3.5

*Momento dipolar*

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}_i q_i = q(a\mathbf{u}_x + a\mathbf{u}_y - a\mathbf{u}_x - a\mathbf{u}_y) - 4qa\mathbf{u}_z = -4qa\mathbf{u}_z$$

*Momento cuadripolar*

$$Q_{jk} = \sum_i q_i (3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk})$$

Como todas las cargas están situadas en algún eje, ello significa que su posición viene dada por una sola coordenada, por tanto el término  $3j_i k_i$ , con  $j_i \neq k_i$ , es nulo para todas las cargas. Como por definición  $\delta_{jk} = 0$ ,  $j \neq k$

tenemos,

$$Q_{jk} = 0, \quad j \neq k,$$

lo que significa que  $Q_{jk}$  es un tensor diagonal.

Calculamos ahora  $Q_{zz}$ . La única carga que tiene componente  $z$  es aquella cuyo valor es  $-4q$ , situada en  $au_z$ ,

$$Q_{zz} = q(0-a^2) + q(0-a^2) + q(0-a^2) + q(0-a^2) + (-4q)(3a^2 - a^2) = -12qa^2$$

Dada la disposición simétrica de las cargas en los ejes  $X$  e  $Y$  podemos concluir que  $Q_{xx} = Q_{yy}$ . Por otra parte podemos aprovechar la propiedad de que la suma de los elementos diagonales es 0,  $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$  y deducimos que:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz} = 6qa^2$$

Estamos ante lo que se llama un *cuadripolo lineal* que se caracteriza por tener sólo una componente independiente.

*Cálculo del potencial*

Puesto que el momento monopolar es 0 sólo tenemos componentes dipolar y cuadripolar del potencial. El potencial dipolar es,

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{p}$  tenemos,

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-4qa\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{qa \cos \theta}{\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde  $\cos \theta$  es el coseno director de  $\mathbf{r}$  en la dirección  $z$ .

Para calcular el término cuadripolar podemos aprovechar la simplificación que supone para su cálculo el hecho de tener un cuadripolo lineal. En estas circunstancias el potencial cuadripolar se expresa como:

$$V_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} (6qa^2(x^2 + y^2) - 12qa^2z^2)$$

Si sumamos y restamos  $6qa^2z^2$ , y tenemos en cuenta que  $z = r \cos \theta$  y  $r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$ ,

$$V_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{6qa^2}{r^5} (r^2 - 3r^2 \cos^2 \theta)$$

$$V_Q(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qa^2}{r^2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

El potencial en  $\mathbf{r}$  es la suma de ambos

$$V(\mathbf{r}) = V_D(\mathbf{r}) + V_Q(\mathbf{r})$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{qa}{\pi\epsilon_0 r^2} \left( \cos \theta + \frac{3a}{4r} (3 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

**PROBLEMA 3.6**

Dada la distribución lineal y uniforme de carga situada entre los puntos  $(0, 0, L/2)$  y  $(0, 0, -L/2)$  y densidad  $\lambda(\text{C/cm})$ .  $L = 1 \text{ cm}$ .

- 1) Calcular el potencial en el punto  $(0, y_o, 0)$ .
- 2) Calcular los momentos y términos monopolar, dipolar y cuadripolar.
- 3) Comparar el resultado obtenido en 1) con la suma de los términos calculados en 2) para  $y_o = 10 \text{ cm}$ .

**Solución**

1) *Potencial en punto  $(0, y_o, 0)$*

Calculamos  $V(y_o)$  mediante la ecuación (2.9), con los siguientes valores para  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ :

$$\mathbf{r} = y_o \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}' = z \mathbf{u}_z ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = y_o^2 + z^2$$

$$V(y_o) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dz}{(y_o^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left[ \ln \left( z + (y_o^2 + z^2)^{1/2} \right) \right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$V(y_o) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left( \ln \left( L + (4y_o^2 + L^2)^{1/2} \right) - \ln \left( -L + (4y_o^2 + L^2)^{1/2} \right) \right)$$

Si ponemos esta expresión en forma de logaritmo de un cociente y multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, es decir, por el numerador, después de simplificar queda,

$$V(y_o) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \left( \frac{1}{2y_o} \left( L + (4y_o^2 + L^2)^{1/2} \right) \right)$$

2) *Términos y momentos multipolares*

2a) *Término y momento monopolar*

*Momento monopolar  $Q$*

Se calcula aplicando la ecuación (3.7b), sustituyendo  $\rho(\mathbf{r}') dv'$  por  $\lambda dz$ .

$$Q = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda dz = \lambda L$$

*Término monopolar  $V_M(y_o)$*

Se calcula mediante la ecuación (3.6) y el valor de  $Q$  obtenido. Con  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = y_o$ ,

$$V_M(y_o) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{L}{y_o}$$

2b) *Término y momento dipolar*

*Momento dipolar  $\mathbf{p}$*

Se calcula utilizando la ecuación (3.9b), sustituyendo  $\rho(\mathbf{r}') dv'$  por  $\lambda dz$ ,  $\mathbf{r}' = z \mathbf{u}_z$ .

$$\mathbf{p} = \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{u}_z \lambda z dz = \lambda \mathbf{u}_z \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{-L/2}^{L/2} = 0$$

*Término dipolar*  $V_D(y_o)$

Se calcula mediante la ecuación (3.8) y con el valor de  $\mathbf{p}$  obtenido anteriormente,

$$V_D(y_o) = 0$$

2c) *Término y momento cuadrípolar*

*Momento cuadrípolar*  $Q_{jk}$

Obtenemos dicho momento mediante la ecuación (3.11b), sustituyendo  $\rho(\mathbf{r}')dv'$  por  $\lambda dz$ ;  $\mathbf{r}' = z\mathbf{u}_z = (0, 0, z)$ ;  $r'^2 = z^2$ .

Las componentes  $Q_{jk}$  ( $j \neq k$ ) son nulas, por que  $\mathbf{r}'$  tiene dos componentes nulas ( $x = 0$  e  $y = 0$ ).

$$Q_{jk} = 0 \quad \text{para } (j \neq k)$$

$$Q_{xx} = \int_{-L/2}^{L/2} (0 - z^2) \lambda dz = -\lambda \frac{L^3}{12} ; \quad Q_{yy} = \int_{-L/2}^{L/2} (0 - z^2) \lambda dz = -\lambda \frac{L^3}{12}$$

$$Q_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} (3z^2 - z^2) \lambda dz = 2\lambda \frac{L^3}{12}$$

Podemos observar que cumple la ecuación (3.12).

La matriz de  $Q_{jk}$  es:

$$Q_{jk} = \lambda \frac{L^3}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Término cuadrípolar*  $V_Q(y_o)$

Se obtiene mediante la ecuación (3.10) y el valor de  $Q_{jk}$  anterior,

$$V_Q(y_o) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \lambda \frac{L^3}{12} (-xx - yy + 2zz)$$

Teniendo en cuenta que en el punto considerado  $r = y = y_o$ ,  $x = z = 0$ ,

$$V_Q(y_o) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{L^3}{24} \frac{1}{y_o^3}$$

3) *Comparación de los resultados en el punto*  $y_o = 10$  cm.

Sustituyendo los datos,  $L = 1$  cm  $y_o = 10$  cm, en la ecuación obtenida en 1),

$$V(y_o) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} 2 \ln \left( \frac{1}{2 \times 10^{-1}} \left( 10^{-2} + (4 \times 10^{-2} + 10^{-4})^{1/2} \right) \right)$$

$$V(y_o) \simeq \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} 9,9958 \times 10^{-2}$$

Llevando los datos a la ecuaciones de  $V_M(y_o)$ ,  $V_Q(y_o)$  y sumando obtenemos:

$$V'(y_o) = V_M(y_o) + V_Q(y_o) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{L}{y_o} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{L^3}{24 y_o^3}$$

$$V'(y_o) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left( 10^{-1} - \frac{10^{-6}}{24 \times 10^{-3}} \right)$$

$$V'(y_o) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} 9,9958 \times 10^{-2}$$

Podemos observar que los resultados obtenidos por ambos procedimientos son prácticamente iguales, ya que las diferencias se manifiestan de la quinta cifra decimal en adelante. Esta circunstancia es la que motiva la utilización de los momentos multipolares para el cálculo del potencial, dado que se simplifican las operaciones al separar las coordenadas  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  en el cálculo del potencial en un punto. Es decir, una vez obtenidos los momentos multipolares, el cálculo del potencial sólo depende del punto en donde se desea obtener.

### PROBLEMA 3.7

Sobre el eje  $Z$  y entre las coordenadas  $L$  y  $-L$  tenemos una distribución lineal de carga  $\lambda = \lambda_o(z/L)$  (su signo es el de la coordenada  $z$ ).

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar de dicha distribución.

#### Solución

##### 1) Momento monopolar $Q$

Calculamos dicho momento mediante la ecuación (3.7b), en la que sustituimos  $\rho(\mathbf{r}')dv'$  por  $\lambda_o(z/L)dz$ .  $\mathbf{r}' = z \mathbf{u}_z = (0, 0, z)$ .

$$Q = \int_{-L}^L \lambda_o(z/L)dz = \frac{\lambda_o}{L} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{-L}^L = 0$$

El momento monopolar es nulo, dado que la carga total es cero.

##### 2) Momento dipolar $\mathbf{p}$

Hacemos uso de la ecuación (3.9b) para calcular dicho momento. Se toman los mismos valores de  $\rho(\mathbf{r}')dv'$  y  $\mathbf{r}'$  que en el apartado anterior.

$$\mathbf{p} = \int_{-L}^L \mathbf{u}_z z \lambda_o\left(\frac{z}{L}\right)dz = \mathbf{u}_z \frac{\lambda_o}{L} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-L}^L$$

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \lambda_0 L^2 \mathbf{u}_z$$

3) *Momento cuadrupolar*  $Q_{jk}$

En este caso la ecuación (3.11b) será la que usemos para el cálculo de  $Q_{jk}$ . También son iguales los valores que utilizamos para  $\rho(\mathbf{r}')dv'$  y  $\mathbf{r}'$  ( $r'^2 = z^2$ ).

Como en este caso  $\mathbf{r}'$  tiene las componentes  $x$  e  $y$  nulas, son nulos todos los  $Q_{jk}$  para  $j \neq k$ , ya que lo son los productos  $j k$  y  $\delta_{jk}$ . Es decir,

$$Q_{jk} = 0 \quad \text{para } j \neq k$$

$$Q_{xx} = \int_{-L}^L (0 - z^2) \lambda_0 \left(\frac{z}{L}\right) dz = -\frac{\lambda_0}{L} \left[\frac{z^4}{4}\right]_{-L}^L = 0$$

El cálculo de  $Q_{yy}$  es similar y produce el mismo resultado.

$$Q_{yy} = \int_{-L}^L (0 - z^2) \lambda_0 \left(\frac{z}{L}\right) dz = -\frac{\lambda_0}{L} \left[\frac{z^4}{4}\right]_{-L}^L = 0$$

La determinación de  $Q_{zz}$  se hace de forma análoga, siendo,

$$Q_{zz} = \int_{-L}^L (3z^2 - z^2) \lambda_0 \left(\frac{z}{L}\right) dz = -\frac{\lambda_0}{L} 2 \left[\frac{z^4}{4}\right]_{-L}^L = 0$$

De los cálculos anteriores se deduce que,

$$Q_{jk} = 0 \quad \text{para todo } j, k$$

### PROBLEMA 3.8

Sobre un hilo metálico, cuya sección es despreciable frente a su longitud y dispuesto en forma de circunferencia de radio  $R$  sobre el plano  $XY$ , se distribuye una densidad lineal de carga  $\lambda = \lambda_0(1 - \cos \varphi)$ .

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadrupolar de la distribución de carga.

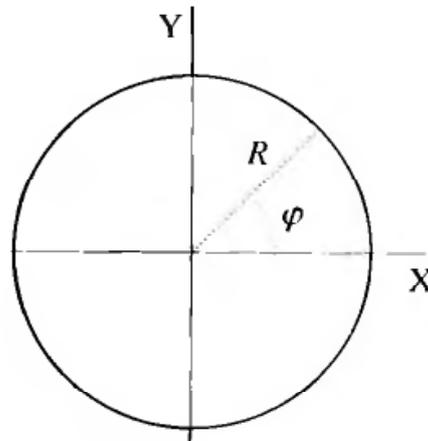


Figura P3.8

**Solución**1) *Momento monopolar*  $Q$ 

Utilizaremos la ecuación (3.7a), sustituyendo:

$\rho(\mathbf{r}')dv'$  por,  $\lambda_o(1 - \cos \varphi)Rd\varphi$ ;  $\mathbf{r}' = R\cos \varphi \mathbf{u}_x + R\sen \varphi \mathbf{u}_y$ ;  $|\mathbf{r}'| = R$   
Véase la figura P3.8.

$$Q = \int_0^{2\pi} \lambda_o(1 - \cos \varphi)Rd\varphi = \lambda_oR [\varphi - \sen \varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q = 2\pi R\lambda_o$$

2) *Momento dipolar*  $\mathbf{p}$ 

Con los valores indicados antes para  $\rho(\mathbf{r}')dv'$ ,  $\mathbf{r}'$  y la ecuación (3.9b) calculamos  $\mathbf{p}$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'\lambda_o(1 - \cos \varphi)Rd\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \lambda_o(R\cos \varphi \mathbf{u}_x + R\sen \varphi \mathbf{u}_y)(1 - \cos \varphi)Rd\varphi \\ \mathbf{p} &= \lambda_oR^2 \left( \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_x(\cos \varphi - \cos^2 \varphi)d\varphi + \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_y(\sen \varphi - \sen \varphi \cos \varphi)d\varphi \right) \\ \mathbf{p} &= \lambda_oR^2 \left[ \sen \varphi - \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\sen 2\varphi}{4} \right) \right]_0^{2\pi} \mathbf{u}_x + \lambda_oR^2 \left[ -\cos \varphi - \frac{1}{2}\sen^2 \varphi \right]_0^{2\pi} \mathbf{u}_y \end{aligned}$$

Realizando operaciones queda,

$$\mathbf{p} = -\pi R^2 \lambda_o \mathbf{u}_x$$

3) *Momento cuadripolar*  $Q_{jk}$ 

Ahora usamos la ecuación (3.11b), con los valores de  $\rho(\mathbf{r}') dv$  y  $\mathbf{r}'$  del apartado anterior.  $r'^2 = R^2$ .

Dado que la componente  $z'$  de  $\mathbf{r}'$  es cero, todos los términos  $Q_{jk}$  ( $j \neq k$ ) que tienen dicha componente en el producto son nulos, por tanto

$$Q_{xz} = Q_{zx} = 0; \quad Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

$$Q_{zz} = \int_0^{2\pi} (0 - R^2)\lambda_o(1 - \cos \varphi)Rd\varphi = -\lambda_oR^3 [\varphi - \sen \varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q_{zz} = -2\pi R^3 \lambda_o$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_0^{2\pi} (3R^2 \cos^2 \varphi - R^2)\lambda_o(1 - \cos \varphi)Rd\varphi \\ &= R^3 \lambda_o \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \varphi - 3 \cos^3 \varphi + \cos \varphi - 1)d\varphi \end{aligned}$$

$$Q_{xx} = R^3 \lambda_o \left[ \frac{3}{2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} \varphi - \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi \right]_0^{2\pi}$$

$$Q_{xx} = \pi R^3 \lambda_o$$

Aplicando la condición de que la suma de los elementos de la diagonal es nula, como expresa la ecuación (3.12):

$$Q_{yy} = 2\pi R^3 \lambda_o - \pi R^3 \lambda_o = \pi R^3 \lambda_o$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \int_0^{2\pi} (3R^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - 0) \lambda_o (1 - \cos \varphi) R d\varphi$$

$$Q_{xy} = \lambda_o R^3 \int_0^{2\pi} (3(\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) - 3(\operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi)) d\varphi$$

$$Q_{xy} = \lambda_o R^3 \left[ \left( \cos^3 \varphi - \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right) \right]_0^{2\pi} = 0$$

La matriz del momento cuadripolar queda de la forma,

$$Q_{jk} = \pi R^3 \lambda_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

### PROBLEMA 3.9

Sobre dos circunferencias, cuyos radios respectivos son  $a$  y  $b$ , se sitúan las distribuciones lineales de carga  $-\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

Se cumple la condición  $|2\pi a \lambda_1| = |2\pi b \lambda_2|$

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar.

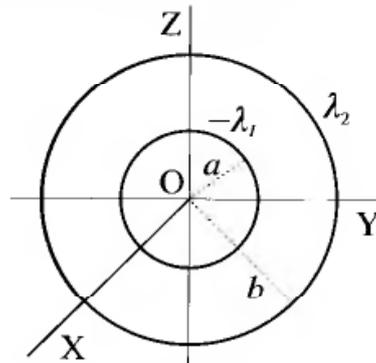


Figura P3.9

### Solución

1) Cálculo del momento monopolar

$$M = \int \lambda dl'$$

Aplicamos la definición a cada una de las circunferencias ( $dl' = a d\theta$ ,  $dl' = b d\theta$  respectivamente en cada circunferencia),

$$M = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1) a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2 b d\theta$$

$$M = -2\pi \lambda_1 a + 2\pi \lambda_2 b$$

Puesto que se verifica  $|2\pi a \lambda_1| = |2\pi b \lambda_2|$ , entonces

$$M = 0$$

2) *Cálculo del momento dipolar*

$$\mathbf{p} = \int \lambda \mathbf{r}' dl'$$

Teniendo en cuenta las dos circunferencias y que  $\mathbf{r}' = r' \mathbf{u}_r$

$$\mathbf{p} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1) a \mathbf{u}_r a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2 b \mathbf{u}_r b d\theta$$

La  $\int_0^{2\pi} \mathbf{u}_r d\theta = 0$ , dado que para cada ángulo  $\theta$   $\mathbf{u}_r$  tiene un vector simétrico de signo contrario en  $\theta + \pi$ . Y como consecuencia el momento dipolar es nulo,

$$\mathbf{p} = 0$$

3) *Cálculo del momento cuadripolar*

$$Q_{ij} = \int \lambda (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dl'$$

Obtenemos cada una de las componentes del tensor cuadripolar

$$Q_{zz} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1)(3z_1'^2 - a^2) a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2 (3z_2'^2 - b^2) b d\theta$$

donde

$$z_1' = a \cos \theta ; \quad z_2' = b \cos \theta$$

Sustituyendo

$$Q_{zz} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1)(3a^2 \cos^2 \theta - a^2) a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2 (3b^2 \cos^2 \theta - b^2) b d\theta$$

$$Q_{zz} = -\lambda_1 a^3 \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta + \lambda_2 b^3 \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta$$

$$Q_{zz} = (-\lambda_1 a^3 + \lambda_2 b^3) \left[ \frac{3}{2} \theta + \frac{\text{sen } 2\theta}{4} - \theta \right]_0^{2\pi}$$

$$Q_{zz} = \pi (-\lambda_1 a^3 + \lambda_2 b^3)$$

Cálculo de  $Q_{yy}$ :

$$Q_{yy} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1)(3y_1'^2 - a^2) a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2 (3y_2'^2 - b^2) b d\theta$$

donde

$$y'_1 = a \operatorname{sen} \theta ; y'_2 = b \operatorname{sen} \theta$$

Sustituyendo

$$Q_{yy} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1)(3a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - a^2) a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2(3b^2 \operatorname{sen}^2 \theta - b^2) b d\theta$$

$$Q_{yy} = -\lambda_1 a^3 \int_0^{2\pi} (3 \operatorname{sen}^2 \theta - 1) d\theta + \lambda_2 b^3 \int_0^{2\pi} (3 \operatorname{sen}^2 \theta - 1) d\theta$$

$$Q_{yy} = (-\lambda_1 a^3 + \lambda_2 b^3) \left[ \frac{1}{2} \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \right]_0^{2\pi}$$

$$Q_{yy} = \pi (-\lambda_1 a^3 + \lambda_2 b^3)$$

Cálculo de  $Q_{xx}$ :

$$Q_{xx} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1)(3 \times 0 - a^2) a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2(3 \times 0 - b^2) b d\theta$$

$$Q_{xx} = \int_0^{2\pi} \lambda_1 a^3 d\theta - \int_0^{2\pi} \lambda_2 b^3 d\theta$$

$$Q_{xx} = -2\pi(-\lambda_1 a^3 + \lambda_2 b^3)$$

El cálculo de  $Q_{xx}$  lo podríamos haber hecho teniendo en cuenta que las componentes diagonales del tensor verifican  $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$ .

A continuación se determinan las componentes cruzadas.

Cálculo de  $Q_{zy}$ :

$$Q_{zy} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1) 3 z'_1 y'_1 a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2 3 z'_2 y'_2 b d\theta$$

con los valores de  $z'_1$ ,  $z'_2$ ,  $y'_1$  e  $y'_2$  indicados antes.

$$Q_{zy} = \int_0^{2\pi} (-\lambda_1) 3 a^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta a d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2 3 b^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta b d\theta$$

$$Q_{zy} = (-3 a^3 \lambda_1 + 3 b^3 \lambda_2) \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Luego

$$Q_{zy} = Q_{yz} = 0$$

Dado que las distribuciones de carga están sobre el plano ZY,  $x' = 0$ , y como consecuencia,

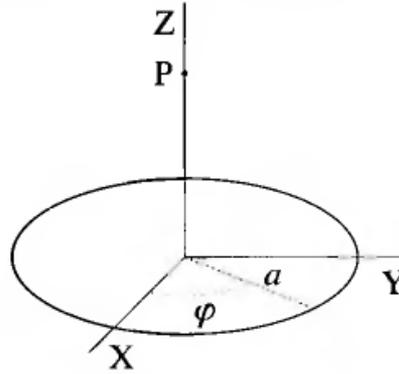
$$Q_{xz} = Q_{zx} = 0 \quad \text{y} \quad Q_{yx} = Q_{xy} = 0$$

Por tanto, el tensor momento cuadrupolar es,

$$Q = \pi(b^3 \lambda_2 - a^3 \lambda_1) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**PROBLEMA 3.10**

Dada la distribución de carga lineal  $\lambda = \lambda_o \cos(\varphi/4)$  sobre la circunferencia de radio  $a$  que muestra la figura P3.10, calcular los momentos monopolar y dipolar, así como el potencial en el punto  $P(0, 0, a)$

**Figura P3.10****Solución**

1) *Momento monopolar*

Viene dado por

$$M = \int_C \lambda dl'$$

con  $dl' = a d\varphi$  y  $\lambda = \lambda_o \cos(\varphi/4)$ . Los límites de integración en el camino  $C$  son 0 y  $2\pi$ .

$$M = \int_0^{2\pi} \lambda_o \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) a d\varphi = \lambda_o a \left[ 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{4}\right) \right]_0^{2\pi} = 4\lambda_o a$$

2) *Momento dipolar*

Se calcula de la forma siguiente,

$$\mathbf{p} = \int_0^{2\pi} \lambda dl \mathbf{r}' = \int_0^{2\pi} \lambda_o \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) \mathbf{r}' a d\varphi$$

con  $\mathbf{r}' = a(\cos \varphi \mathbf{u}_x + \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_y)$ .

Sustituyendo  $\mathbf{r}'$  tenemos

$$\mathbf{p} = \int_0^{2\pi} a^2 \lambda_o \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) (\cos \varphi \mathbf{u}_x + \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_y) d\varphi$$

Es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= a^2 \lambda_o \left( \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_x \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_y \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) \operatorname{sen} \varphi d\varphi \right) \\ \mathbf{p} &= a^2 \lambda_o \left( \left[ \frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{3}{4} \varphi + \frac{2}{5} \operatorname{sen} \frac{5}{4} \varphi \right]_0^{2\pi} \mathbf{u}_x + \left[ -\frac{2}{5} \cos \frac{5}{4} \varphi - \frac{2}{3} \cos \frac{3}{4} \varphi \right]_0^{2\pi} \mathbf{u}_y \right) \\ \mathbf{p} &= a^2 \lambda_o \left( -\frac{4}{15} \mathbf{u}_x + \frac{16}{15} \mathbf{u}_y \right) = \frac{4}{15} a^2 \lambda_o (-\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y) \end{aligned}$$

*Potencial en el punto P*

El potencial en el punto  $P(0, 0, a)$  vendrá dado por las contribuciones monopolar, dipolar, etc.

$$V = V_M + V_p + \dots = \frac{M}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

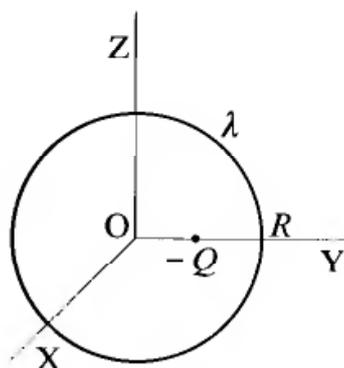
Ahora bien, puesto que en el punto  $P$ , el vector de posición es  $\mathbf{r} = a\mathbf{u}_z$ , el producto escalar  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$  es nulo y en consecuencia, la contribución dipolar al potencial es nula. El potencial en el punto  $P$  aproximadamente sera,

$$V \simeq V_M \simeq \frac{4\lambda_0 a}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0}$$

**PROBLEMA 3.11**

Sobre una circunferencia de radio  $R$ , situada en el plano  $ZY$ , tenemos una distribución lineal y uniforme de carga  $\lambda$  que cumple la condición  $2\pi R\lambda = Q$ . Sobre el eje  $Y$ , a una distancia  $d = R/2$ , se sitúa una carga  $-Q$ .

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar con respecto al origen  $O$ .

**Figura P3.11****Solución***1) Momento monopolar*

Se calcula de la forma siguiente,

$$M = -Q + \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta = -Q + 2\pi R\lambda = 0$$

*2) Momento dipolar*

Para la circunferencia  $\mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r$ , y para la carga  $\mathbf{r}' = (R/2)\mathbf{u}_y$ , con estos datos

$$\mathbf{p} = -\frac{R}{2}Q\mathbf{u}_y + \int_0^{2\pi} (R\mathbf{u}_r)\lambda R d\theta = -\frac{QR}{2}\mathbf{u}_y + \lambda R^2 \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_r d\theta$$

La integral es 0 debido a que las componentes cartesianas de  $\mathbf{u}_r$  se anulan a lo largo de una vuelta completa. Esto es, como  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_y \sin \theta + \mathbf{u}_z \cos \theta$ ,

sustituyendo en la integral

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{u}_y \sen \theta + \mathbf{u}_z \cos \theta) d\theta = \mathbf{u}_y \int_0^{2\pi} \sen \theta d\theta + \mathbf{u}_z \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

Luego

$$\mathbf{p} = -\frac{QR}{2} \mathbf{u}_y$$

### 3) Momento cuadripolar

Separamos las contribuciones de la carga 3.1) y la distribución 3.2) y luego las sumamos.

#### 3.1) Carga $Q$

Para la carga tenemos que

$$Q_{ij} = (-Q) (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})$$

Las componentes cruzadas ( $i \neq j$ ) dan 0 puesto que  $\delta_{ij} = 0$  en ese caso, y además, como dos de las componentes cartesianas de  $Q$  ( $x'$  y  $z'$ ) son 0, entonces  $x'_i x'_j$  también es 0. Es decir,

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

y lo mismo para las simétricas.

Las componentes diagonales serán,

$$Q_{xx} = Q_{zz} = (-Q) \left( 0 - \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right) = \frac{QR^2}{4}$$

$$Q_{yy} = (-Q) \left( 3 \frac{R}{2} \frac{R}{2} - \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right) = -\frac{QR^2}{2}$$

#### 3.2) Distribución $\lambda$

En el caso de la distribución aplicamos

$$Q'_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dq = \lambda R \int_0^{2\pi} (3x'_i x'_j - R^2 \delta_{ij}) d\theta$$

Puesto que la circunferencia descansa sobre el plano YZ, su componente  $x$  es siempre 0; por tanto las componentes cruzadas que impliquen la coordenada  $x$  serán 0 ya que, además,  $\delta_{ij} = 0$ .

$$Q'_{xy} = Q'_{xz} = 0$$

La componente  $Q'_{yz}$  la calculamos mediante la fórmula general poniendo  $y' = R \sen \theta$  y  $z' = R \cos \theta$

$$Q'_{yz} = \lambda R \int_0^{2\pi} (3R^2 \cos \theta \sen \theta - 0) d\theta = 3\lambda R^3 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sen \theta d\theta$$

La integral vale

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sen \theta d\theta = \left[ \frac{\sen^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

por tanto

$$Q'_{yz} = 0$$

Ahora calculamos las componentes diagonales

$$Q'_{xx} = \lambda R \int_0^{2\pi} (0 - R^2) d\theta = -2\pi\lambda R^2 = -QR^2$$

$$Q'_{zz} = \lambda R \int_0^{2\pi} (3R^2 \cos^2 \theta - R^2) d\theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta$$

La integral la resolvemos aplicando  $\cos^2 \theta = (1/2)(1 + \cos 2\theta)$

$$\int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{3 \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \pi$$

Luego,

$$Q'_{zz} = \pi\lambda R^3 = \frac{QR^2}{2}$$

De igual forma obtenemos  $Q'_{yy}$

$$Q'_{yy} = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} (3 \operatorname{sen}^2 \theta - 1) d\theta$$

y la integral se resuelve con  $\operatorname{sen}^2 \theta = (1/2)(1 - \cos 2\theta)$

$$\int_0^{2\pi} (3 \operatorname{sen}^2 \theta - 1) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{3 \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \pi$$

Es decir,

$$Q'_{yy} = \pi\lambda R^3 = \frac{QR^2}{2}$$

Teniendo en cuenta que

$$Q'_{xx} + Q'_{yy} + Q'_{zz} = 0$$

$$Q'_{xx} = -2 \frac{QR^2}{2} = -QR^2$$

### Momento cuadrupolar del sistema

Sumamos ahora las dos contribuciones y obtenemos el resultado final

$$Q_{xx}^T = Q_{xx} + Q'_{xx} = \frac{QR^2}{4} - QR^2 = -\frac{3}{4}QR^2$$

$$Q_{yy}^T = Q_{yy} + Q'_{yy} = -\frac{QR^2}{2} + \frac{QR^2}{2} = 0$$

$$Q_{zz}^T = Q_{zz} + Q'_{zz} = \frac{QR^2}{4} + \frac{QR^2}{2} = \frac{3}{4}QR^2$$

y además todos los términos no diagonales son nulos.

En forma matricial,

$$Q_{jk}^T = QR^2 \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

### PROBLEMA 3.12

La distribución de carga que se muestra en la figura P3.12 se compone de la siguiente forma: Dos esferas de radio  $a$ , cuyos centros respectivos están en  $y = -a/2$  e  $y = a/2$ , y entre las que se produce una intersección. En la esfera izquierda existe una densidad de carga  $-\rho$ , salvo en la intersección, y la esfera derecha tiene una densidad de carga  $\rho$ , salvo en la intersección.

Calcular los términos monopolar y dipolar del potencial debido a la citada distribución de carga en un punto situado a una distancia  $r$  del origen de coordenadas.

#### Solución

*Momento monopolar*

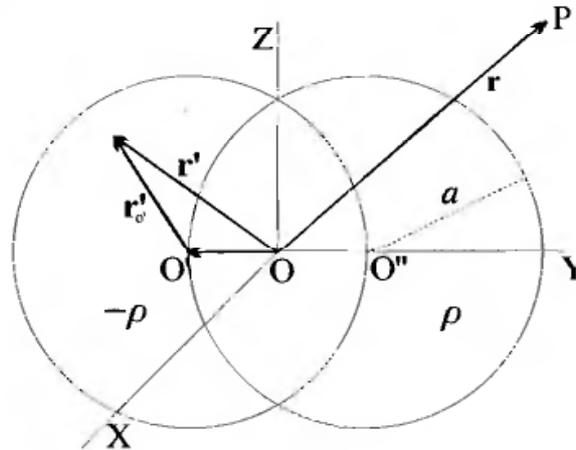


Figura P3.12

Se aplica el principio de superposición, sustituyendo el sistema dado por otro equivalente que consiste en dos esferas cargadas uniformemente con densidades  $-\rho$  y  $\rho$ , y situadas respectivamente en  $y = -a/2$  y  $y = a/2$ .

Calculamos el momento monopolar como la suma de las cargas de cada esfera,

$$Q = Q_1 + Q_2 = 4/3\pi a^3 (-\rho) + 4/3\pi a^3 \rho = 0$$

*Momento dipolar*

Por definición, el momento dipolar de una distribución viene dado por

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}' dv'$$

donde  $\mathbf{r}'$  es el vector de posición de la carga  $dq = \rho(\mathbf{r}')dv'$  respecto al origen en el que se quiere determinar el momento dipolar.

La distribución de cargas indicada en la figura P3.12, aplicando el principio de superposición, se puede asimilar a dos esferas de radio  $a$ , una a la izquierda con densidad de carga  $-\rho$  en todo su volumen, y otra a la derecha con densidad de carga  $\rho$ . Los centros respectivos son  $(0, -a/2, 0)$  y  $(0, a/2, 0)$ .

Para comprender mejor el cálculo de la integral anterior vamos a descomponer la operación en dos partes, una referida a la esfera de centro en  $O'$  y la otra que corresponde a la esfera de centro en  $O''$ .

#### Esfera con centro en $O'$

Si observamos la figura vemos que

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{O'} - \overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}'_{O'} - \frac{a}{2}\mathbf{u}_y$$

Sustituyendo en la expresión anterior vemos que el momento dipolar de la esfera 1 respecto del origen  $O$  es,

$$\mathbf{p}_1 = \int_{V_1} \rho(r')\mathbf{r}'dv' = \int_{V_1} \rho(r')(\mathbf{r}'_{O'} - \frac{a}{2}\mathbf{u}_y)dv'$$

$$\mathbf{p}_1 = \int_{V_1} \rho(r')\mathbf{r}'_{O'}dv' - (\frac{a}{2}\mathbf{u}_y) \int_{V_1} \rho(r')dv'$$

La segunda integral de volumen es la carga  $Q_1$  en la esfera,

$$\mathbf{p}_1 = \int_{V_1} \rho(r')\mathbf{r}'_{O'}dv' - (\frac{a}{2}\mathbf{u}_y) Q_1 = \mathbf{p}'_1 + Q_1 \left(-\frac{a}{2}\right) \mathbf{u}_y$$

Donde  $\mathbf{p}'_1$  representa el momento dipolar respecto al centro  $O'$  de la esfera, es decir, respecto al punto  $(0, -a/2, 0)$ .  $\mathbf{p}'_1$ , por simetría, es igual a cero.

$$\mathbf{p}'_1 = 0$$

Para demostrarlo procedemos de la forma siguiente,

$$\mathbf{p}'_1 = \int_{V_1} \rho \mathbf{r}'_{O'} dv' \quad \text{con} \quad \mathbf{r}'_{O'} = r'_{O'} \mathbf{u}'_r$$

El vector  $\mathbf{u}'_r$  está referido al centro  $O'$ . Para cada volumen elemental dentro de la esfera hay otro simétrico, diametralmente opuesto, donde el vector unitario que corresponde a  $\mathbf{r}'_{O'}$  es  $-\mathbf{u}'_r$ . Al integrar, sumar, cada  $\rho \mathbf{r}'_{O'} dv'$  se anula con su simétrico, y en consecuencia  $\mathbf{p}'_1 = 0$ .

Sustituyendo el valor de  $Q_1$  y  $\mathbf{p}'_1$  resulta,

$$\mathbf{p}_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 (-\rho) \left(-\frac{a}{2}\right) \mathbf{u}_y = \frac{2}{3}\pi a^4 \rho \mathbf{u}_y$$

#### Esfera con centro en $O''$

Procedemos como el caso anterior. Ahora

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{O''} + \overrightarrow{OO''} = \mathbf{r}'_{O''} + \frac{a}{2} \mathbf{u}_y$$

El momento correspondiente es similar al caso anterior, salvo los signos de la carga y coordenada del centro  $O''$ ,

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 + Q_2 \frac{a}{2} \mathbf{u}_y$$

Aplicando el mismo razonamiento que para la esfera con centro en  $O'$ ,  $\mathbf{p}'_2 = 0$ , y por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 &= Q_2 \frac{a}{2} \mathbf{u}_y = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \frac{a}{2} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{2}{3} \pi a^4 \rho \mathbf{u}_y \end{aligned}$$

El momento dipolar total vendrá dado por la suma de las dos contribuciones,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{4}{3} \pi a^4 \rho \mathbf{u}_y$$

Ahora estamos en condiciones de calcular las contribuciones al potencial, en un punto situado a cierta distancia  $r$  del origen. La contribución monopolar es cero, puesto que el momento monopolar es nulo,

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = 0$$

La contribución dipolar viene dada por

$$V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición del punto P, que se expresa por  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ . Desarrollando,

$$V_D = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\rho a^4}{r^2} \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_r = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\rho a^4}{r^2} \cos \phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo formado por  $\mathbf{u}_y$  y  $\mathbf{u}_r$

### PROBLEMA 3.13

Una parte de la molécula de un material dieléctrico está formada por iones distribuidos como indica la figura P3.13.

El momento dipolar de todos los iones es del mismo módulo  $p$  y su dirección y sentido se indica en la figura P3.13.

Calcular la fuerza sobre el ion situado en el origen de coordenadas con carga  $4q$ .

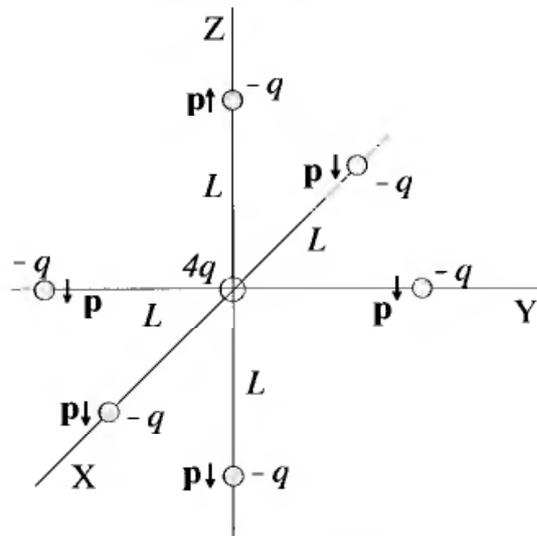
**Solución**

La fuerza sobre el ion es  $\mathbf{F} = 4q\mathbf{E}$ , siendo  $\mathbf{E}$  el campo creado por los dipolos en el origen de coordenadas.

Si observamos la figura P3.13, cada dipolo, según la ecuación (3.4), crea un campo en el origen de coordenadas que depende de la posición y sentido del dipolo.

Si tenemos en cuenta que  $\mathbf{r} = 0$ ;  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = L$  para todos los dipolos, la ecuación (3.4) queda de la forma,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'}{L^5} \mathbf{r}' - \frac{\mathbf{p}}{L^3} \right)$$

**Figura P3.13**

Todos los dipolos que están sobre el plano XY tienen  $\mathbf{r}'$  perpendicular a  $\mathbf{p}$ , por tanto  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' = 0$ , y la ecuación anterior, para los cuatro dipolos que están sobre dicho plano, queda de la forma siguiente en el punto (0,0,0):

Dipolo en  $(L, 0, 0)$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

Dipolo en  $(0, L, 0)$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

Dipolo en  $(-L, 0, 0)$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

Dipolo en  $(0, -L, 0)$

$$\mathbf{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

Las ecuaciones correspondientes a los dipolos que están sobre el eje Z, teniendo en cuenta que  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' = p\mathbf{u}_z \cdot L\mathbf{u}_z$  para el dipolo en  $(0, 0, L)$  y  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' = (-p\mathbf{u}_z) \cdot (-L\mathbf{u}_z)$  para el que está en  $(0, 0, -L)$ , son respectivamente,

Dipolo en  $(0, 0, L)$

$$\mathbf{E}_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3pL}{L^5} L\mathbf{u}_z - \frac{p}{L^3} \mathbf{u}_z \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{E}_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

Dipolo en  $(0, 0, -L)$

$$\mathbf{E}_6 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3pL}{L^5} (-L\mathbf{u}_z) - \frac{p}{L^3} (-\mathbf{u}_z) \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{E}_6 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

La fuerza que actúa sobre el ion situado en  $(0, 0, 0)$  es la siguiente:

$$\mathbf{F} = 4q \sum_1^6 \mathbf{E}_i = 4q \frac{4}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{L^3} \mathbf{u}_z = \frac{4q}{\pi\epsilon_0} \frac{p}{L^3} \mathbf{u}_z$$

La fuerza tiende a desplazar el ion  $4q$  hacia  $z > 0$ .

El ejemplo propuesto es una estructura de iones, seis con carga  $-q$  y uno en el centro con carga  $4q$  que nos permite explicar el fenómeno siguiente.

Inicialmente el ion central produce unos desplazamientos de la nube electrónica de todos los iones hacia el origen de coordenadas. Si por el efecto de una pequeña perturbación el ion de carga  $4q$  se desplaza hacia  $z > 0$ , este provoca un desplazamiento en la dirección del eje Z de la nube electrónica de los iones que están en el plano XY y como consecuencia se genera un momento dipolar como el indicado. Los iones que están sobre el eje Z sufren una ligera modificación del momento que tenían antes de la perturbación, que además, como hemos visto no afecta a la fuerza sobre  $4q$ .

Los dipolos sobre el plano XY ejercen una fuerza sobre la carga  $4q$  que tiende a desplazarla más hacia  $z > 0$ . Es decir, la perturbación provoca unos momentos dipolares que tienden a mantener el desplazamiento, y está da lugar a una polarización del sistema de iones propuesto.

## Capítulo 4

# DIELÉCTRICOS

## 4.1 INTRODUCCIÓN

### 4.1.1 DIELÉCTRICOS: POLARIZACIÓN ELÉCTRICA

Se define un dieléctrico como un material prácticamente no conductor, en el que las cargas están ligadas a los átomos que componen dicho material.

#### 4.1.1.1 Polarización eléctrica

Las moléculas de los materiales dieléctricos son en general de dos tipos: 1) Las que en ausencia de campo eléctrico exterior tienen una distribución de sus átomos tal que poseen un momento dipolar neto. 2) Moléculas que en ausencia de campo no tienen momento dipolar.

Por otra parte todas las moléculas y átomos se polarizan cuando se les pone en presencia de un campo eléctrico; esta polarización, en la mayoría de los materiales, desaparece cuando lo hace el campo eléctrico.

La polarización es una magnitud característica de los dieléctricos, y se define como el momento dipolar por unidad de volumen; en forma matemática:

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (4.1)$$

Donde  $\Delta \mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_m$ , es la suma vectorial de todos los momentos dipolares que existen en el volumen elemental  $\Delta V$ ;  $\mathbf{p}_m$  es el momento dipolar de cada átomo o molécula que existe en  $\Delta V$ .

### 4.1.2 POTENCIAL EN UN MATERIAL POLARIZADO

Un material dieléctrico polarizado se comporta como una distribución

de dipolos que crea un potencial; dicho potencial es función del punto considerado y de la polarización del material.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{V'} \frac{(-\nabla \cdot \mathbf{P})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \oint_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (4.2)$$

Donde  $V'$  representa el volumen ocupado por el material y  $S'$  la superficie que lo limita.

*Densidades de carga de polarización*

A  $\nabla \cdot \mathbf{P}$  se le define como densidad volumétrica de cargas de polarización  $\rho_p$ , y a  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  como densidad superficial de cargas de polarización  $\sigma_p$ :

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.3)$$

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (4.4)$$

El vector  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie considerada.

### 4.1.3 VECTOR DESPLAZAMIENTO

Si aplicamos el teorema de Gauss a un sistema de cargas  $q_i$  situadas en un dieléctrico como indica la figura 4.1, donde el dieléctrico se supone indefinido, la integral de  $\mathbf{E}$  sobre la superficie  $S$  será:

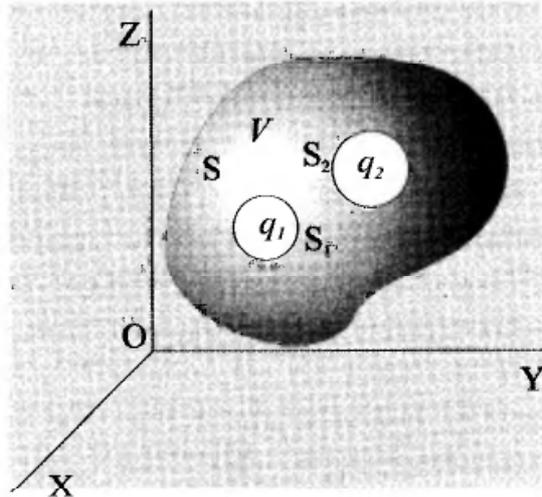


Figura 4.1

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum q_i + Q_p \right)$$

Donde  $Q_p$  es la carga de polarización, cuyo valor es,

$$Q_p = \int_{S_i} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{V'} (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv'$$

En la relación anterior  $S_i$  representa que la integral se hace sobre las superficies que rodean las cargas  $q_i$ , y  $V'$  es el volumen limitado por la superficie  $S$  y las superficies  $S_i$ . Aplicando el teorema de la divergencia en la integral de volumen, la expresión anterior queda reducida a la siguiente,

$$Q_p = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds$$

Si llevamos esta última expresión al teorema de Gauss, queda,

$$\oint_S (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} ds = \sum q_i$$

En la expresión anterior vemos que el flujo del vector  $(\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P})$  a través de la superficie cerrada  $S$  sólo depende de las cargas libres que encierra; por tanto interesa definir un nuevo vector cuyo flujo sobre una superficie cerrada sólo dependa de las cargas libres que están en su interior; este vector se denomina *vector desplazamiento eléctrico*, o simplemente vector desplazamiento y se le representa con la letra  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.5)$$

De esta manera el teorema de Gauss en forma integral se expresa mediante la ecuación:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = \sum q_i \quad (4.6)$$

Si la distribución de cargas fuera continua, con una densidad  $\rho$ , la ecuación anterior quedaría de la siguiente forma:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{V'} \rho dv' \quad (4.7)$$

De la relación anterior se deduce la forma diferencial del teorema de Gauss. Aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie anterior se obtiene la forma diferencial siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.8)$$

#### 4.1.4 SUSCEPTIBILIDAD Y PERMITIVIDAD ELÉCTRICA

Desde un punto de vista macroscópico los materiales dieléctricos se caracterizan por la susceptibilidad y permitividad que tienen. La relación constitutiva entre el vector polarización  $\mathbf{P}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en un punto se hace a través de la *susceptibilidad eléctrica*, la citada relación es:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (4.9)$$

La susceptibilidad  $\chi$  es una magnitud que depende del material considerado, y puede ser o no dependiente del campo, un tensor o una constante que dependa o no del punto. Generalmente tratamos con materiales en los que  $\chi$  es una constante.

Si tenemos en cuenta la definición del vector  $\mathbf{D}$ , ecuación (4.5), y la llevamos a la (4.9), queda la relación:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (4.10)$$

La magnitud  $\epsilon$  se conoce como *permitividad eléctrica*, y lo mismo que la susceptibilidad, depende del material considerado.

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) \quad (4.11)$$

#### 4.1.5 CLASES DE DIELECTRICOS

Los dieléctricos pueden clasificarse atendiendo al comportamiento de la polarización en función del campo eléctrico.

##### *Dieléctricos con polarización permanente*

Son los que presentan polarización de forma espontánea sin que se aplique un campo exterior. Ejemplos de este tipo son los electretes y ferroeléctricos.

##### *Dieléctricos lineales y no lineales*

Dieléctricos no lineales son materiales cuya susceptibilidad y permitividad dependen del campo aplicado. Los ferroeléctricos son materiales que tienen esta propiedad. Cuando  $\chi$  y  $\epsilon$  no dependen de  $\mathbf{E}$  los materiales son lineales.

##### *Dieléctricos isótropos y anisótropos*

Cuando  $\chi$  y  $\epsilon$  no dependen de la dirección y sentido del vector  $\mathbf{E}$  en el punto considerado los materiales reciben el nombre de isótropos, de lo contrario se los llama anisótropos.

##### *Dieléctricos homogéneos*

En el caso de que los valores de  $\chi$  y  $\epsilon$  no dependan del punto considerado, el material es homogéneo.

En general vamos a considerar que los materiales son homogéneos lineales e isótropos. Cuando no ocurra así se indicará de forma explícita.

#### 4.1.6 CONDICIONES EN LOS LÍMITES

##### a) Componentes normales del vector $\mathbf{D}$

Si sobre una caja elemental situada en la superficie de separación de dos medios dieléctricos, véase la figura 4.2a, aplicamos el teorema de Gauss para  $\mathbf{D}$  utilizando la ecuación (4.7), obtenemos la siguiente relación entre las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$  en la superficie de separación de los medios (1) y (2):

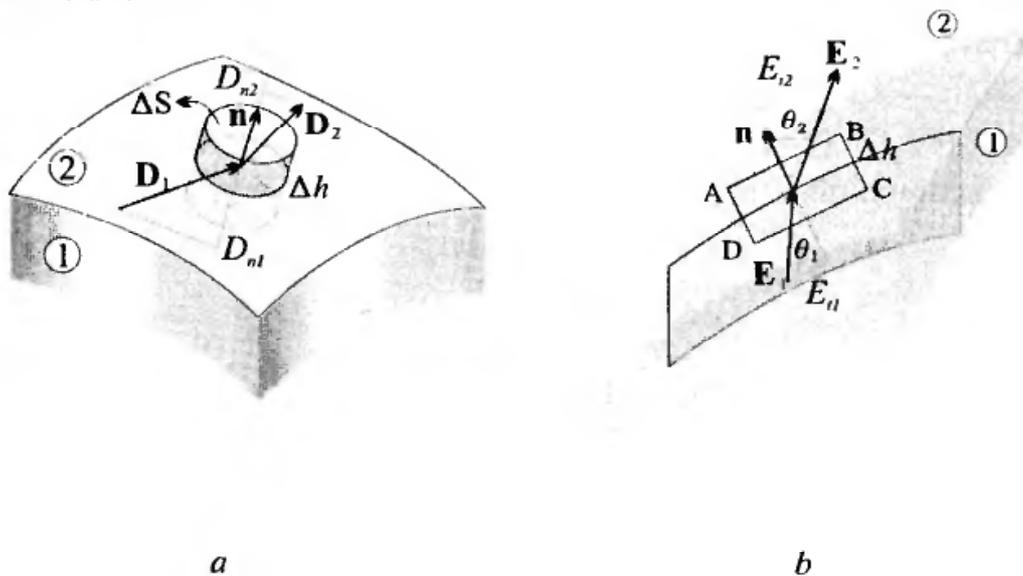


Figura 4.2

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \sigma \rightarrow D_{n1} - D_{n2} = \sigma \quad (4.12)$$

Donde  $\sigma$  representa la densidad superficial de carga libre que existe en la superficie de separación. En el caso de que  $\sigma = 0$ , la relación anterior queda de la forma:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (4.13)$$

b) Componentes tangenciales del vector  $\mathbf{E}$

Para deducir el comportamiento de las componentes tangenciales del vector campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en la superficie de separación de dos medios, utilizamos la condición de campo conservativo, es decir, que  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Aplicándola sobre el contorno ABCD indicado en la figura 4.2b, se deduce la siguiente ecuación para  $\mathbf{E}$ :

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta\mathbf{l} = 0$$

$\Delta l = AB = DC$ , y  $AD = BC$  se anulan cuando estrechamos el contorno ABCD para aproximarnos a la superficie de separación.

De la relación anterior se deduce que,

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (4.14)$$

Relación que expresa las condiciones en los límites para las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$ .

Utilizando la relación entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , podemos encontrar las ecuaciones que ligan, tanto sus componentes normales como las tangenciales en la superficie que limita dos medios.

*c) Componentes normales de  $\mathbf{P}$*

Si tenemos en cuenta la ecuación que relaciona la densidad de carga de polarización  $\rho_p$  y  $\mathbf{P}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_p$ , aplicando el teorema de la divergencia sobre el volumen de la caja elemental indicada en la figura 4.2a obtenemos,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -\sigma_p$$

$$P_{n2} - P_{n1} = -\sigma_p \quad (4.15)$$

Donde  $\sigma_p$  es la densidad superficial de cargas de polarización sobre la superficie de separación, que tiene su origen en la discontinuidad de los valores de la polarización al pasar de un medio a otro.

## 5.8 PROBLEMAS

### P 5.1

Una molécula tiene distribuidos los iones como indica la figura P5.1. Donde  $d = 10^{-8}$  m y  $\Delta d = 10^{-9}$  m.

- 1) Calcular el momento dipolar de la molécula. ( $q = 3,2 \times 10^{-19}$  C).
- 2) Un material se compone de  $10^{19}$  moléculas como la indicada anteriormente por cada  $\text{m}^3$ . Calcular la polarización  $\mathbf{P}$  de dicho material.

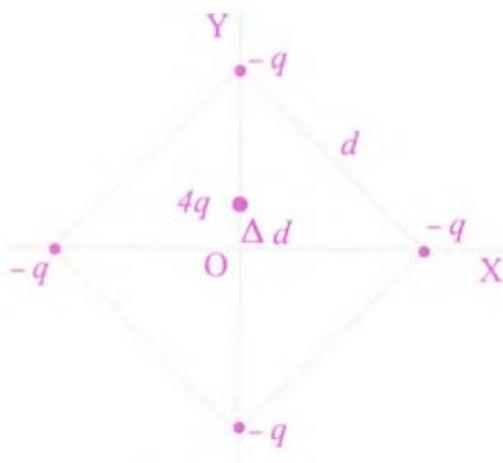


Figura P5.1

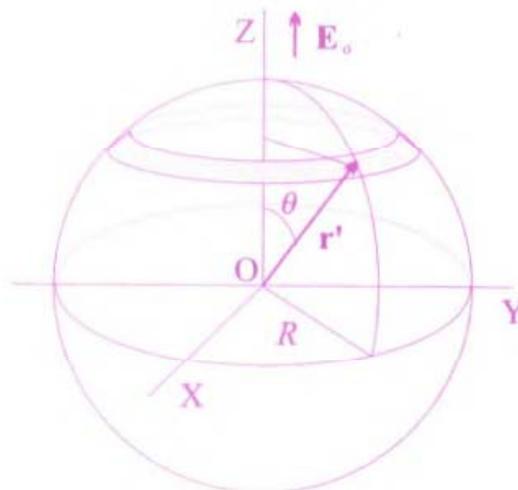


Figura P5.2

### P 5.2

Sobre una esfera conductora, en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}_0$  uniforme, se induce una distribución de carga,  $\sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$ , véase la figura P5.2.

- 1) Calcular el momento dipolar de la distribución de carga.
- 2) Entre las placas de un condensador, de superficie  $S$  y espesor  $d$ , se introducen  $n$  esferas por unidad de volumen. Cuando aplicamos una d.d.p.  $V_0$  entre las placas se inducen distribuciones de carga sobre las esferas conductoras. Suponemos que dicha distribución es de la forma  $\sigma = 3\epsilon_0(V_0/d) \cos \theta$ .

Utilizando el momento dipolar calculado en 1), determinar la permitividad eléctrica equivalente del conjunto de esferas.

### P 5.3

Un disco de dieléctrico, cuyo radio es  $R$  y espesor  $d$ , está uniformemente polarizado en la dirección de su eje  $\mathbf{P} = P\mathbf{u}_z$ .

- 1) Calcular las densidades de carga de polarización.
- 2) Calcular el campo eléctrico en puntos del eje, tanto interiores como exteriores al disco.

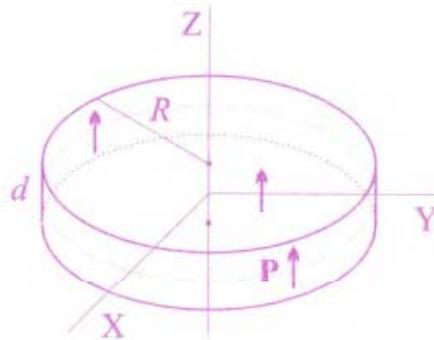


Figura P5.3

**P 5.4**

Dentro de un condensador de placas planoparalelas y de espesor  $d$ , introducimos un dieléctrico de permitividad no uniforme  $\epsilon = \epsilon_0(1 + y/d)$  como indica la figura P5.4.

1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$ , cuando aplicamos una d.d.p.  $V_0$  entre las placas.

2) Calcular las densidades de carga  $\rho_p$  y  $\sigma_p$ .

Se desprecian los efectos de borde.

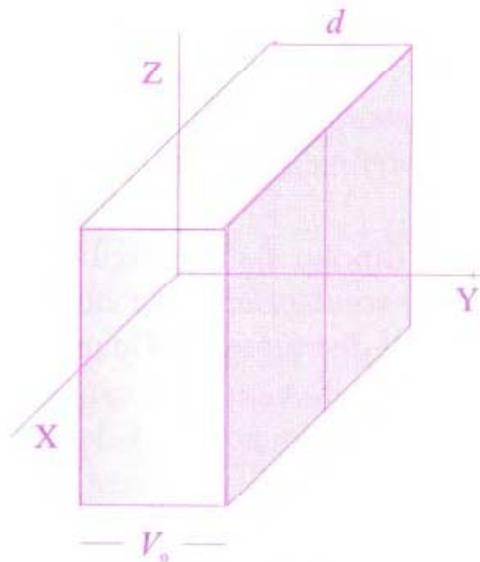


Figura P5.4

**P 5.5**

Disponemos dos condensadores idénticos, de placas planoparalelas cuya superficie es  $S$  y espesor  $d$ , como indica la figura P5.5. Entre las placas existe un dieléctrico de permitividad  $\epsilon = 100\epsilon_0$ .

Una vez cargados a una d.d.p.  $V_0$  y desconectada la batería, en un instante dado se fractura el dieléctrico entre las placas del condensador (1), de forma que se abre una fisura plana y paralela a las placas de espesor  $0,01 d$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en los condensadores (1) y (2) antes y después de la fractura.

¿Se detectará la fractura midiendo la d.d.p. entre las placas del condensador (2)?

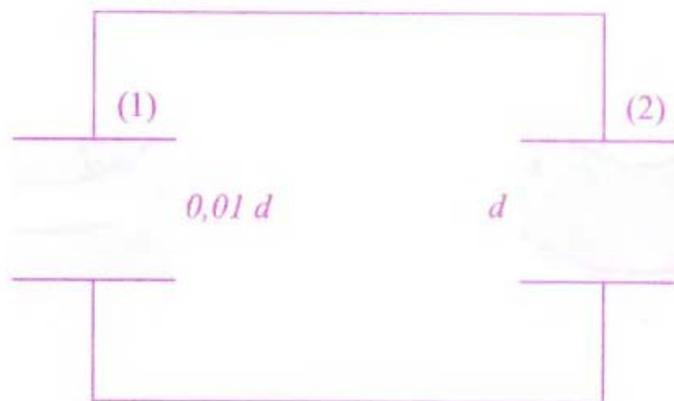


Figura P5.5

**P 5.6**

En un condensador de placas planoparalelas, con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , suponemos que una de ellas se despega del dieléctrico, quedando el condensador como indica la figura P5.6. El espesor  $d_0 = 10^{-4}d$ .

Calcular la permitividad aparente del condensador con la placa despegada, y determinar su valor para permitividades elevadas.

Suponemos despreciables los efectos de borde.

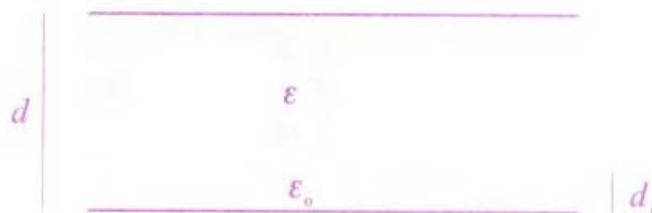


Figura P5.6

**P 5.7**

Dado el sistema formado por dos superficies esféricas conductoras concéntricas, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , véase la figura P5.7. En el espacio entre esferas se introduce un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , de forma que llene la mitad

de dicho espacio. Unimos las esferas a los bornes de una batería de f.e.m.  $V_0$ .

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{P}$  en el espacio entre esferas.
- 2) Obtener las densidades de carga de polarización.

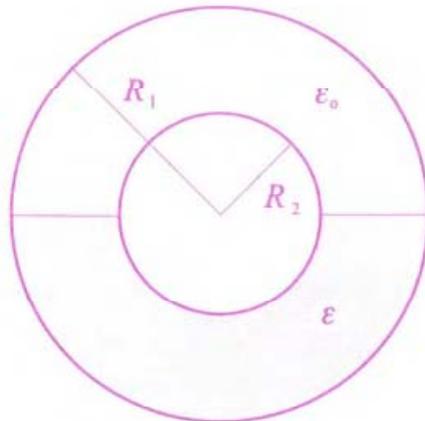


Figura P5.7

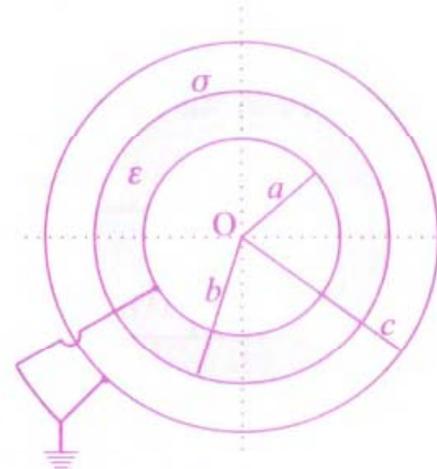


Figura P5.8

### P 5.8

Un sistema está formado por una esfera conductora de radio  $a$ , una capa esférica conductora de radio interior  $c = 2a$  concéntrica con la anterior, y una capa esférica dieléctrica, también concéntrica con las anteriores, cuya permitividad es  $\epsilon$ , siendo su radio interior  $a$  y el exterior  $b = \frac{3}{2}a$ . Los tres elementos están dispuestos como muestra la figura 5.8. Se unen a tierra la esfera y la capa conductora.

En la superficie exterior de la capa dieléctrica (de radio  $b$ ) existe una distribución superficial de carga  $\sigma$ .

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  en la zona cuyo radio  $r$  está comprendido entre  $a$  y  $c$ .
- 2) Obtener las densidades de carga sobre las superficies conductoras de radio  $a$  y  $c$ . Y calcular la densidad de carga de polarización sobre la superficie dieléctrica en contacto con la esfera de radio  $a$ .

### P 5.9

Tenemos una esfera de dieléctrico de radio  $R$  y permitividad  $\epsilon$ . En dicha esfera existe además una distribución uniforme de carga  $\rho = \rho_0$ .

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  dentro y fuera de la esfera.
- 2) Calcular el potencial para  $r = R'$  ( $R' > R$  pero  $R' \simeq R$ ). Obtener el potencial en el centro de la esfera,  $r = 0$ .

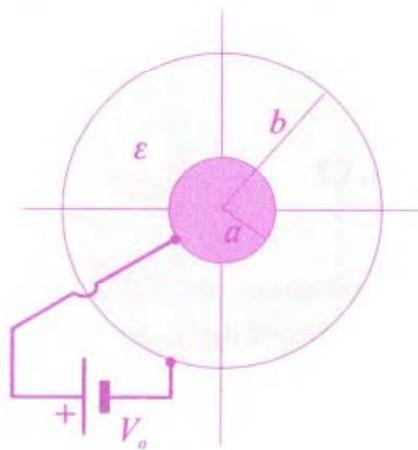
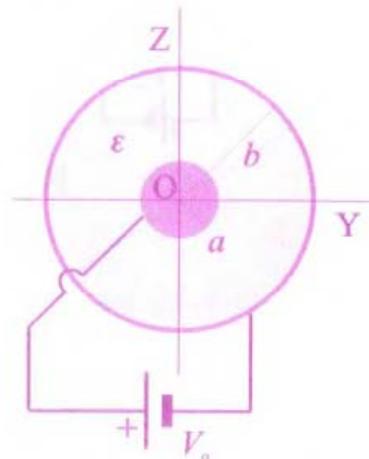
**P 5.10**

Un cable coaxial, cuyos radios interior y exterior son respectivamente  $a$  y  $b$  ( $b = 2a$ ), tiene un dieléctrico en el espacio entre conductores cuya permitividad es,

$$\varepsilon = 6\varepsilon_0 (1 + (\rho/a)^2)^{-1}$$

Se conecta una pila de f.e.m.  $V_0$  entre los conductores como indica la figura P5.10.

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$  en el dieléctrico.
- 2) Obtener las densidades de carga de polarización.

**Figura P5.10****Figura P5.11****P 5.11**

Disponemos de un cable coaxial indefinido, cuyos radios respectivos se muestran en la figura P5.11. En el espacio entre conductores hay un dieléctrico cuya permitividad depende del radio  $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ , con  $\varepsilon(b) = \varepsilon_0$ . Se aplica una pila de f.e.m.  $V_0$  como muestra la citada figura.

- 1) Calcular la forma matemática de  $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ , de manera que el campo eléctrico no varíe con el radio en la zona entre conductores.
- 2) Determinar los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$  en el dieléctrico.

**P 5.12**

Sea un sistema coaxial formado por dos cilindros conductores indefinidos, el interno de radio  $a$  y el externo de radio  $b$ . El espacio entre el conductor interno y el externo está ocupado por un material de permitividad  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\varphi/\pi}$ . Los conductores se encuentran conectados a una batería de manera que la d.d.p. entre ellos es  $V_0$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en el espacio entre conductores y la distribución de carga sobre el conductor de radio  $a$ .

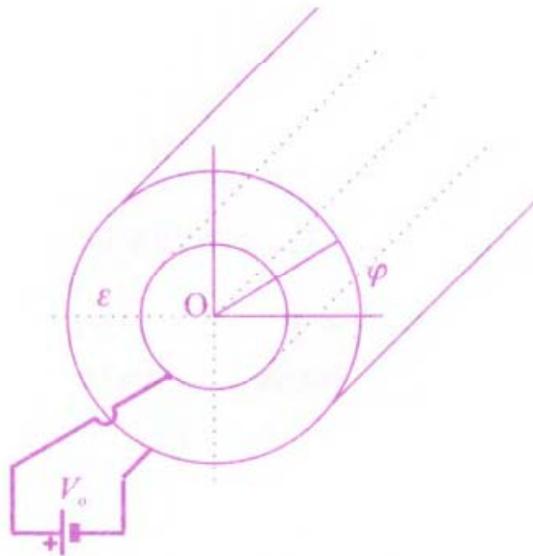


Figura P5.12

**P 5.13**

Sobre un plano coincidente con el XZ tenemos una densidad superficial de carga  $\sigma$ . Pegado a dicha distribución tenemos una placa dieléctrica, también indefinida en las direcciones X y Z, de espesor  $d$  y permitividad  $\epsilon$ , (véase la figura P5.13).

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ , dentro y fuera del dieléctrico.
- 2) Determinar las densidades de carga de polarización.

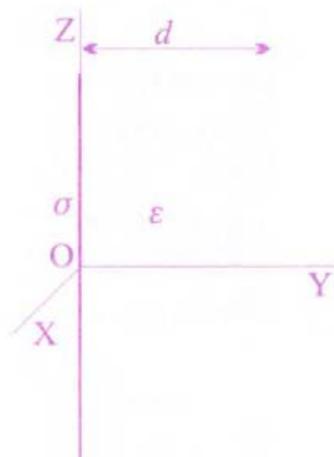


Figura P5.13

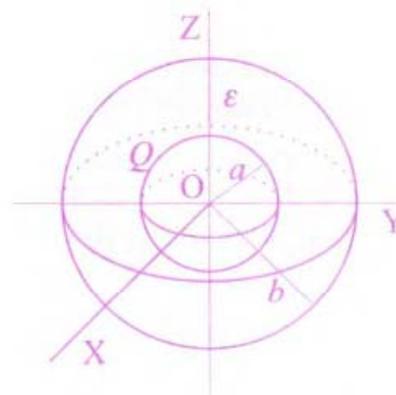


Figura P5.14

**P 5.14**

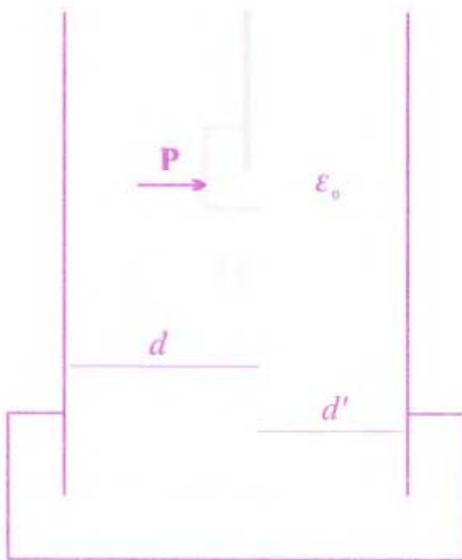
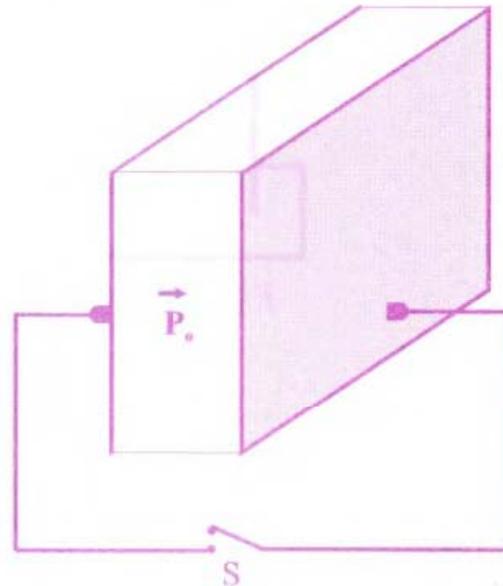
Sobre una esfera conductora de radio  $a$  existe una carga  $Q$ . Alrededor de dicha esfera se sitúa una capa dieléctrica, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , cuya permitividad es  $\epsilon = k/r^2$ .

- 1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  para  $r < b$ .
- 2) Obtener las densidades de carga de polarización cuando  $r = a$  y  $r = b$ .

**P 5.15**

Una placa de dieléctrico, de espesor  $d$  y superficie  $S$ , tiene una polarización uniforme  $\mathbf{P}$ . Disponemos la placa entre dos láminas conductoras unidas entre sí por un conductor como indica la figura P5.15.

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  en los medios entre placas.
- 2) Calcular las densidades de carga en láminas y placa.

**Figura P5.15****Figura P5.16****P 5.16**

Tenemos dos placas conductoras paralelas, separadas por una distancia  $d$ , cuya superficie es  $S$ . Manteniendo cerrado el interruptor  $S$  (véase la figura P5.16) introducimos un material con polarización espontánea  $\mathbf{P}_o$ .

Calcular los vectores de campo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ .

Se desconecta el interruptor  $S$  y a continuación se calienta el material de forma que se anula la polarización espontánea  $\mathbf{P}_o$ , es decir,  $\mathbf{P}_o = 0$ . ¿Cuál es el valor de los vectores de campo ahora?

**P 5.17**

En la figura P5.17 se muestra un dieléctrico entre dos placas conductoras unidas entre sí por un conductor externo. El dieléctrico tiene una

zona de espesor  $d_1$  con una polarización  $\mathbf{P}$ , y otra zona de espesor  $d_2$  cuya polarización es  $-\mathbf{P}$ .

- 1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en las distintas zonas.
- 2) Calcular las densidades de carga reales sobre las placas conductoras.

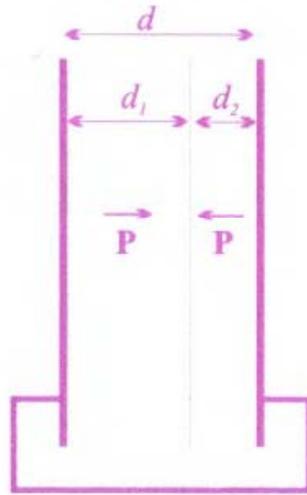


Figura P5.17

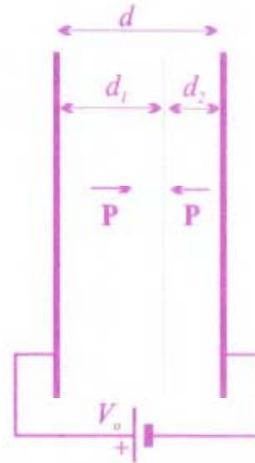


Figura P5.18

### P 5.18

En la figura P5.18 se muestra un dieléctrico entre dos placas conductoras unidas entre sí por una batería externa  $V_o$ . El dieléctrico tiene una zona de espesor  $d_1$  con una polarización  $\mathbf{P}$ , y otra zona de espesor  $d_2$  cuya polarización es  $-\mathbf{P}$ .

- 1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en las distintas zonas.
- 2) Calcular las densidades de carga reales sobre las placas conductoras

### P 5.19

Tenemos una barra dieléctrica de permitividad  $\epsilon = 3\epsilon_o$ , cuya sección transversal se muestra en la figura P5.19.

Aplicando las condiciones en los límites calcular el ángulo de incidencia  $\alpha_1$  del campo en el punto P del medio (1) para que el campo eléctrico en el medio (3) sea paralelo al eje Y.

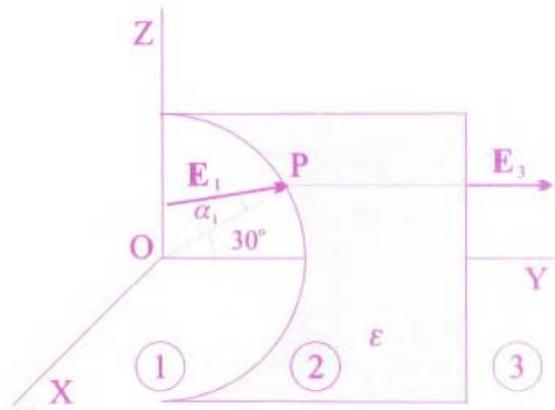


Figura P5.19

## 4.2 PROBLEMAS

## PROBLEMA 4.1

Una molécula tiene distribuidos los iones como indica la figura P4.1. Donde  $d = 10^{-8}$  m y  $\Delta d = 10^{-9}$  m.

- 1) Calcular el momento dipolar de la molécula. ( $q = 3,2 \times 10^{-19}$  C).
- 2) Un material se compone de  $10^{19}$  moléculas como la indicada anteriormente por cada  $\text{m}^3$ . Calcular la máxima polarización  $\mathbf{P}$  de dicho material.

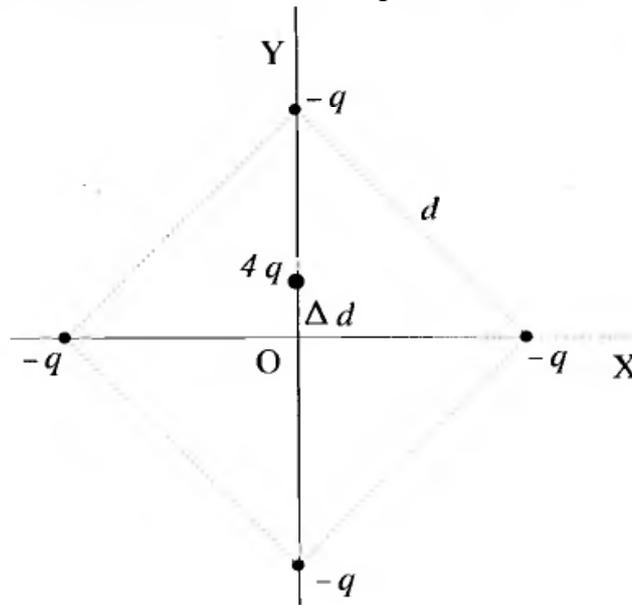


Figura P4.1

**Solución**1) *Momento dipolar*

El momento dipolar de una distribución discreta de cargas es:

$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}'_i$ . En este caso  $\mathbf{p}$  será:

$$\mathbf{p} = (-q x' - q(-x')) \mathbf{u}_x + (-q(-y') - q y') \mathbf{u}_y + 4q \Delta d \mathbf{u}_y$$

Operando queda,

$$\mathbf{p} = 4q \Delta d \mathbf{u}_y$$

El módulo de  $\mathbf{p}$  calculado con los datos numéricos es,

$$|\mathbf{p}| = 12,8 \times 10^{-28} \text{ [C m]}$$

2) *Polarización*

La polarización  $\mathbf{P}$  es el momento dipolar por unidad de volumen, y su relación con los momentos dipolares moleculares viene dada por la ecuación (4.1).

$$\Delta \mathbf{p} = n \mathbf{p} \Delta V$$

$n$  es el número de moléculas por unidad de volumen, en nuestro caso  $n = 10^{19}/\text{m}^3$ . Como,

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = n \mathbf{p}$$

Sustituyendo los valores de  $n$  y  $\mathbf{p}$ , obtenemos,

$$\mathbf{P} = 12,8 \times 10^{-9} \text{ [C/m}^2\text{]}$$

### PROBLEMA 4.2

Sobre una esfera conductora, en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}_0$  uniforme, se induce una distribución de carga,  $\sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$ , véase la figura P4.2.

1) Calcular el momento dipolar de la distribución de carga.

2) Entre las placas de un condensador, de superficie  $S$  y espesor  $d$ , se introducen  $n$  esferas por unidad de volumen. Cuando aplicamos una d.d.p.  $V_0$  entre las placas, se inducen distribuciones de carga sobre las esferas conductoras. Suponemos que dicha distribución es de la forma  $\sigma = 3\epsilon_0(V_0/d) \cos \theta$ .

Utilizando el momento dipolar calculado en 1), determinar la permitividad eléctrica equivalente del conjunto de esferas.

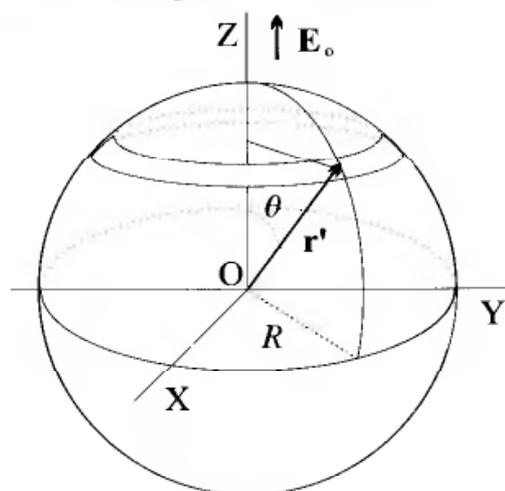


Figura P4.2

### Solución

1) *Momento dipolar*

La distribución tiene simetría cilíndrica con respecto al eje Z, ya que la densidad sólo depende del ángulo  $\theta$  referido al eje Z.

El momento dipolar viene dado por,

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \sigma ds'$$

Teniendo en cuenta dicha simetría, la componente en la dirección del eje Y se anula al sumar los términos simétricos, ya que para cada componente  $R \sin \theta \sigma ds'$  existe una simétrica,  $R \sin(-\theta) \sigma ds'$  en la dirección del eje Y pero con signo opuesto. Lo mismo ocurre con la componente X.

La componente Z se calcula como indicamos a continuación.

$$z' = R \cos \theta ; ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

por tanto,

$$p_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3R^3 \varepsilon_o E_o \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 3R^3 \varepsilon_o E_o 2\pi \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi$$

realizando operaciones queda,

$$\mathbf{p} = 4\pi R^3 \varepsilon_o E_o \mathbf{u}_z$$

### 2) Permittividad

Suponemos que a cada esfera sólo le afecta el campo externo  $E_o = V_o/d$ , con lo que el momento dipolar de cada esfera es el obtenido en el apartado anterior. Sustituyendo  $E_o$  por el valor del campo externo,

$$\mathbf{p} = 4\pi R^3 \varepsilon_o \frac{V_o}{d} \mathbf{u}_z$$

De acuerdo con la definición de polarización expresada por la ecuación (4.1), y teniendo en cuenta que  $\Delta \mathbf{p} = n \mathbf{p} \Delta V$ , obtenemos,

$$\mathbf{P} = n 4\pi R^3 \varepsilon_o \frac{V_o}{d} \mathbf{u}_z$$

Utilizando las relaciones (4.5) y (4.10),  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , queda,

$$\mathbf{D} = \left( \varepsilon_o \frac{V_o}{d} \mathbf{u}_z + n 4\pi R^3 \varepsilon_o \frac{V_o}{d} \mathbf{u}_z \right) = \varepsilon_o \frac{V_o}{d} (1 + n 4\pi R^3) \mathbf{u}_z$$

De la relación anterior y de la ecuación (4.10) se deduce que,

$$\varepsilon = \varepsilon_o (1 + n 4\pi R^3)$$

La permitividad depende del número de esferas por unidad de volumen y del radio de las esferas. Evidentemente  $n$  está limitado por el radio  $R$  de la esfera, ya que cuanto mayor sea  $R$  menor será el número  $n$  para un volumen dado.

### PROBLEMA 4.3

Una esfera de dieléctrico está uniformemente polarizada en la dirección del eje Z, véase la figura P4.3,  $\mathbf{P} = 2 \times 10^6 \mathbf{u}_z$  (C/m<sup>2</sup>).

1) Calcular las densidades de carga de polarización.

2) Calcular el campo eléctrico debido a dichas densidades en el centro de la esfera.

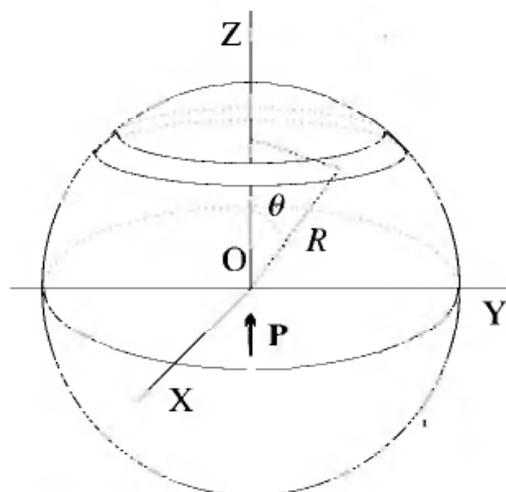


Figura P4.3

**Solución**

## 1) Densidades de carga de polarización

Las densidades de carga de polarización se obtienen mediante las ecuaciones (4.3) y (4.4).

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

Dado que  $\mathbf{P}$  es uniforme, su derivación con respecto a cualquier coordenada es nula.

El vector unitario normal a la superficie es  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$ , por tanto,

$$\sigma_p = P \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r = P \cos \theta$$

## 2) Campo eléctrico

Calculamos el campo eléctrico mediante la ecuación:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sigma_p ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{r} = 0 ; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R ; \quad ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r = R(\sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z)$$

Con estos valores, la ecuación anterior queda de la forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi P \cos \theta (\sin^2 \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin^2 \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y) d\theta \\ &\quad -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathbf{u}_z P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Las integrales que contienen  $\cos \varphi d\varphi$  y  $\sin \varphi d\varphi$  producen los términos  $[\sin \varphi]_0^{2\pi} = 0$  y  $[\cos \varphi]_0^{2\pi} = 0$ , por tanto sólo queda la componente Z, es decir,

$$\mathbf{E}(0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathbf{u}_z P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\mathbf{u}_z \frac{P}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi$$

$$\mathbf{E}(0) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_z$$

Se puede demostrar que el campo en el interior de la esfera es uniforme e igual al valor calculado anteriormente. Dicha demostración se hace de forma sencilla a partir del conocimiento de la función potencial obtenida mediante la solución de la ecuación de Laplace en el caso de una esfera dieléctrica en presencia de un campo uniforme. Dado que este problema se trata en capítulos posteriores, posponemos la demostración al capítulo correspondiente.

#### PROBLEMA 4.4

Un cilindro de dieléctrico, cuyo radio es  $R$  y espesor  $d$ , está uniformemente polarizado en la dirección de su eje  $\mathbf{P} = P\mathbf{u}_z$ .

- 1) Calcular las densidades de carga de polarización.
- 2) Calcular el campo eléctrico en puntos del eje, tanto interiores como exteriores al cilindro.

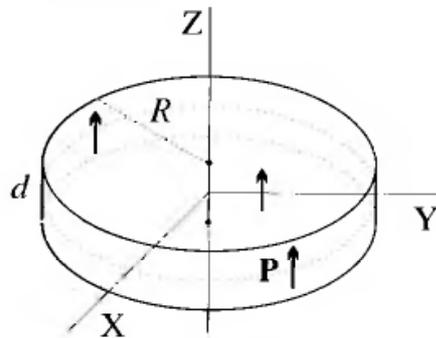


Figura P4.4.1

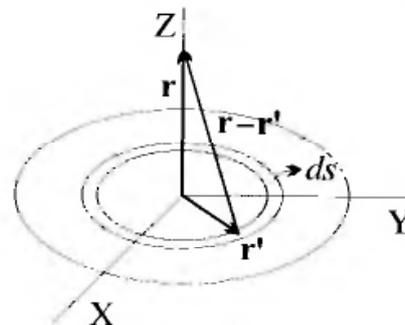


Figura P4.4.2

#### Solución

- 1) Cálculo de  $\rho_p$  y  $\sigma_p$

Para calcular  $\rho_p$  aplicamos la ecuación (4.3),  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

Dado que  $\mathbf{P}$  no depende de ninguna coordenada su divergencia es nula, y como consecuencia,

$$\rho_p = 0$$

Calculamos  $\sigma_p$  mediante la ecuación (4.4). En la cara superior, véase la figura P4.4.1,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$ , y en la inferior  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_z$ .

En la cara superior,

$$\sigma_p = P\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = P$$

En la cara inferior,

$$\sigma_p = P \mathbf{u}_z \cdot (-\mathbf{u}_z) = -P$$

2) *Campo sobre el eje del cilindro*

2.1) *Campo debido a un disco con densidad superficial  $\sigma_p$*

Para realizar el cálculo debemos obtener primero el campo sobre el eje Z debido a un disco de radio  $R$  con densidad superficial  $\sigma_p$ , véase la figura P4.4.2.

La ecuación que nos permite el cálculo es,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\sigma_p ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

En este caso

$$\mathbf{r} = z \mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r}' = \rho' \mathbf{u}_\rho ; \quad ds' = \rho' d\varphi d\rho' \quad \text{y} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + \rho'^2)^{1/2}$$

Para cada elemento de área  $ds'$  existe otra simétrica en la que  $\mathbf{r}'$  es de signo contrario, por tanto al integrar se anulan las aportaciones del término  $\mathbf{r}'\sigma_p ds'$ . De esta forma sólo queda la componente en la dirección del eje Z.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{P z \rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{P}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{z}{(z^2 + \rho'^2)^{1/2}} \right]_0^R$$

$$E_z = \frac{P}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

El  $|z|$  se introduce con el fin de poner de manifiesto que  $E_z$  para una distancia  $z$  tiene el mismo valor tanto por encima como por debajo del disco, siendo el sentido del vector opuesto en ambos casos, es decir,

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{u}_z \quad \text{para puntos por encima del disco}$$

$$\mathbf{E} = -E_z \mathbf{u}_z \quad \text{para puntos por debajo del disco}$$

2.2) *Campo debido al cilindro*

Distinguiremos tres zonas:

$$1^a \begin{cases} z \geq d/2 \\ z > 0 \end{cases} ; \quad 2^a \quad |z| \leq \frac{d}{2} ; \quad 3^a \begin{cases} z \leq -d/2 \\ z < 0 \end{cases}$$

1<sup>a</sup> zona

Corresponde a los puntos que están por encima del cilindro. El campo se debe a las aportaciones de los dos discos, uno situado en  $z = d/2$  con densidad  $\sigma_p$  y otro en  $z = -d/2$  con densidad  $-\sigma_p$ .

$$\mathbf{E}_1 = \frac{P \mathbf{u}_z}{2\epsilon_0} \left\{ \left( 1 - \frac{(z - d/2)}{((z - d/2)^2 + R^2)^{1/2}} \right) - \left( 1 - \frac{(z + d/2)}{((z + d/2)^2 + R^2)^{1/2}} \right) \right\}$$

Realizando operaciones queda,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{P}{2\epsilon_o} \left( \frac{(z + d/2)}{((z + d/2)^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{(z - d/2)}{((z - d/2)^2 + R^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z$$

2ª zona

Es la situada en el interior del cilindro.

$$\mathbf{E}_2 = \frac{P\mathbf{u}_z}{2\epsilon_o} \left\{ \left( \frac{(d/2 - z)}{((d/2 - z)^2 + R^2)^{1/2}} - 1 \right) - \left( 1 - \frac{(z + d/2)}{((z + d/2)^2 + R^2)^{1/2}} \right) \right\}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{P}{2\epsilon_o} \left( -2 + \frac{(z + d/2)}{((z + d/2)^2 + R^2)^{1/2}} + \frac{(d/2 - z)}{(((d/2 - z))^2 + R^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z$$

Cuando la distancia  $d \rightarrow 0$  el campo  $\mathbf{E}_2$  tiende a,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{P}{\epsilon_o} \mathbf{u}_z$$

3ª zona

Es la situada por debajo del cilindro. El campo en esta zona es del mismo módulo y sentido que la zona 1ª, es decir,

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1$$

tomando como positivos los valores de  $z$  que aparecen en la fórmula de  $\mathbf{E}_1$ .

### PROBLEMA 4.5

Dentro de un condensador de placas planoparalelas, de superficie  $S$  y de espesor  $d$ , introducimos un dieléctrico de permitividad no uniforme  $\epsilon = \epsilon_o(1 + y/d)$  como indica la figura P4.5.

1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$ , cuando aplicamos una d.d.p.  $V_o$  entre las placas.

2) Calcular las densidades de carga  $\rho_p$  y  $\sigma_p$ .

Se desprecian los efectos de borde.

#### Solución

1) *Vectores de campo*

Para calcular  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , y  $\mathbf{P}$ , utilizamos la condición de campo conservativo que cumple  $\mathbf{E}$ ,  $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_1 - V_2$ , y la continuidad de las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$  expresadas por la ecuación (4.13); además de las ecuaciones constitutivas (4.5) y (4.10).

La dirección en que se aplica el campo es la del eje  $Y$ . Como suponemos el condensador indefinido en las otras direcciones, el campo dependerá solamente de la coordenada  $y$ . La d.d.p. aplicada es  $V_o$  por tanto,

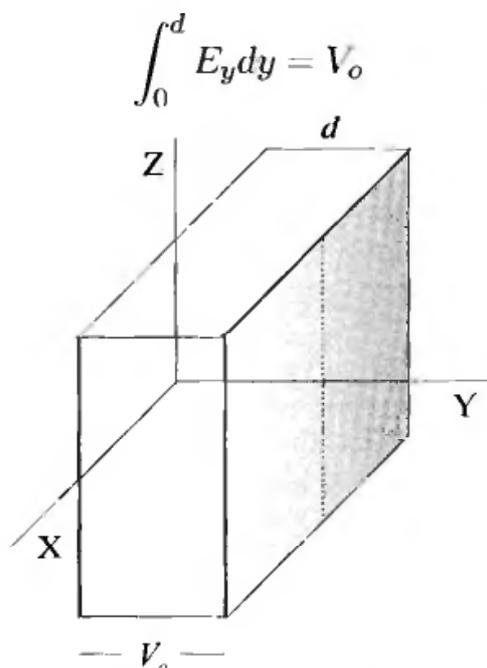


Figura P4.5

Dado que no hay cargas reales  $D_y$  es continua.

Mediante la relación  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  se deduce que,

$$E_y = \frac{D_y}{\epsilon} = \frac{D_y}{\epsilon_o(1 + y/d)}$$

Llevando esta ecuación a la relación entre campo y potencial,

$$V_o = \int_0^d \frac{D_y}{\epsilon_o(1 + y/d)} dy = \frac{D_y}{\epsilon_o} d \left[ \ln\left(1 + \frac{y}{d}\right) \right]_0^d$$

$$V_o = \ln 2 \frac{D_y d}{\epsilon_o}$$

De la relación anterior podemos deducir  $D_y$ , por tanto  $\mathbf{D}$ ,

$$D_y = \epsilon_o \left( \frac{V_o}{d \ln 2} \right) ; \mathbf{D} = D_y \mathbf{u}_y$$

Como  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{\epsilon_o}{\epsilon_o(1 + y/d)} \frac{V_o}{d \ln 2} \mathbf{u}_y = \frac{V_o}{d \ln 2(1 + y/d)} \mathbf{u}_y$$

Aplicando la ecuación(4.5),

$$P_y = D_y - \epsilon_o E_y = \epsilon_o \frac{V_o}{d \ln 2} - \epsilon_o \frac{V_o}{d \ln 2(1 + y/d)}$$

$$P_y = \epsilon_o \frac{V_o}{d \ln 2} \left( 1 - \frac{d}{d + y} \right) = \epsilon_o \left( \frac{V_o}{d \ln 2} \right) \frac{y}{d + y}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_o \left( \frac{V_o}{d \ln 2} \right) \frac{y}{d + y} \mathbf{u}_y$$

## 2) Densidades de carga

Calculamos las densidades de carga de polarización  $\rho_p$  y  $\sigma_p$  mediante las ecuaciones (4.3) y (4.4) y la ecuación obtenida para la polarización  $\mathbf{P}$ .

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\partial P_y}{\partial y} = -\epsilon_o \left( \frac{V_o}{d \ln 2} \right) \frac{d}{(d+y)^2}$$

$$\int \rho_p dv' = S \int_0^d \epsilon_o \left( \frac{V_o}{d \ln 2} \right) \left( \frac{d}{(d+y)^2} \right) dy = -S \frac{1}{2d} \epsilon_o \frac{V_o}{\ln 2}$$

Calculamos  $\sigma_p$  mediante la ecuación (4.4) en cada uno de los planos que limitan el dieléctrico.

Plano  $y = 0$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_y$ ; plano  $y = d$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_y$ .

$$\sigma_p(0) = -\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{P}(0) = 0$$

$$\sigma_p(d) = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{P}(d) = \epsilon_o \frac{V_o}{2d \ln 2}$$

Podemos comprobar que la suma de todas las cargas de polarización es nula.

**PROBLEMA 4.6**

Disponemos dos condensadores idénticos, de placas planoparalelas cuya superficie es  $S$  y espesor  $d$ , como indica la figura P4.6. Entre las placas existe un dieléctrico de permitividad  $\epsilon = 100\epsilon_o$ .

Una vez cargados a una d.d.p.  $V_o$  y desconectada la batería, en un instante dado se fractura el dieléctrico entre las placas del condensador (1), de forma que se abre una fisura plana y paralela a las placas de espesor  $0,01 d$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en los condensadores (1) y (2) antes y después de la fractura.

¿Se detectará la fractura midiendo la d.d.p. entre las placas del condensador (2)?

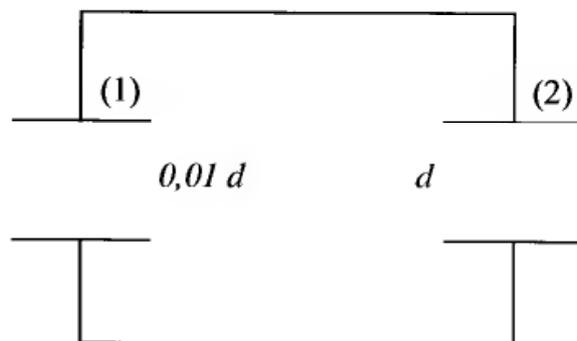
**Solución**

1.1) Antes de la fractura los dos condensadores son iguales y se aplica una d.d.p.  $V_o$ , por tanto, teniendo en cuenta que despreciamos los efectos de borde y que se supone el condensador indefinido en dos direcciones, el campo es uniforme entre las placas e igual a,

$$E = \frac{V_o}{d}$$

Aplicando la relación  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  obtenemos,

$$D = 100\epsilon_o \frac{V_o}{d}$$



**Figura P4.6**

1.2) Cuando se fractura el condensador (1) ocurre lo siguiente: La carga total se conserva dado que se desconectaron los condensadores de la batería.  $Q = 2DS$ .

El espesor del condensador (1) aumenta en  $0,01 d$ .

Las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$  se conservan en las superficies límite.

Denominamos  $E_{v1}$  al campo en la zona de fractura del condensador (1)

Denominamos  $E_{d1}$  al campo en el dieléctrico del condensador (1)

Denominamos  $E_{d2}$  al campo en el dieléctrico del condensador (2)

Aplicando la relación  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V$ , en los dos condensadores,

$$E_{v1}0,01d + E_{d1}d = V$$

Teniendo en cuenta que  $D_{n1} = D_{n2}$ ,

$$\epsilon_o E_{v1} = 100\epsilon_o E_{d1} \rightarrow E_{v1} = 100E_{d1}$$

Llevando esta relación a la ecuación anterior,

$$100E_{d1}0,01d + E_{d1}d = V$$

Despejando  $E_{d1}$

$$E_{d1} = \frac{V}{2d}$$

Teniendo en cuenta la relación entre  $E_{d1}$  y  $E_{v1}$ ,

$$E_{v1} = 50\frac{V}{d}$$

Dado que los dos condensadores siguen unidos,

$$E_{d2}d = V \rightarrow E_{d2} = \frac{V}{d}$$

De las dos relaciones anteriores deducimos que,

$$E_{d1} = \frac{1}{2}E_{d2}$$

$$D_1 = 50\epsilon_o\frac{V}{d} ; D_2 = 100\epsilon_o\frac{V}{d}$$

La carga total se conserva, por tanto,

$$Q = D_1 S + D_2 S = \epsilon_o \frac{V}{d} S (100 + 50) = 2 \times 100 \epsilon_o S \frac{V_o}{d}$$

De donde se deduce que,

$$V = \frac{200}{150} V_o = \frac{4}{3} V_o \quad (4.6.1)$$

Con la relación anterior y las obtenidas para  $E_{d1}$ ,  $E_{d2}$ ,  $D_1$  y  $D_2$  después de la fractura, tenemos la siguiente valores para los módulos de los vectores de campo,

$$E_{d1} = \frac{V}{2d} = \frac{4 V_o}{3 \cdot 2d} = \frac{2 V_o}{3 d} ; \quad E_{v1} = \frac{100 V_o}{3 d}$$

$$E_{d2} = 2E_{d1} = \frac{4 V_o}{3 d}$$

$$D_1 = \epsilon_o \frac{200 V_o}{3 d} ; \quad D_2 = \epsilon_o \frac{400 V_o}{3 d}$$

En las ecuaciones obtenidas podemos observar lo que ocurre en cada condensador después de la fractura. En el condensador (2), aumentan campo y vector desplazamiento, por tanto la carga y el potencial.

En el condensador (1) disminuye el vector desplazamiento y por tanto también la carga almacenada en la misma proporción que aumenta en el otro condensador. El campo disminuye en el dieléctrico pero aumenta considerablemente en la zona fracturada.

2) Para deducir si se detecta o no la fractura midiendo el potencial, nos basta con tener en cuenta la ecuación (4.6.1).

$$V - V_o = \frac{1}{3} V_o$$

Vemos que el potencial aumenta con respecto del potencial que aplicamos inicialmente para cargar los condensadores, con lo cual se puede detectar fácilmente la fractura midiendo la diferencia de potencial entre las placas de uno de los condensadores.

#### PROBLEMA 4.7

En un condensador de placas planoparalelas, con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , suponemos que una de ellas se despega del dieléctrico, quedando el condensador como indica la figura P4.7. El espesor  $d_o = 10^{-1} d$ .

Calcular la permitividad aparente del condensador con la placa despegada, y determinar su valor para permitividades elevadas.

Suponemos despreciables los efectos de borde.

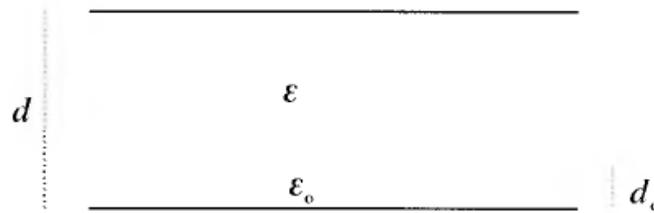


Figura P4.7

**Solución**

Este problema se resuelve partiendo de la definición de capacidad de un condensador plano, y teniendo en cuenta la continuidad de las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$ .

$E_d$  = vector campo en el dieléctrico.  $E_v$  = vector campo en el vacío.

$\varepsilon_a$  = permitividad aparente.  $V$  = d.d.p. entre placas.

$Q$  = carga del condensador.  $S$  = superficie de las placas.

$$C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_a \frac{S}{d}$$

Teniendo en cuenta  $V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , y que  $D_{n1} = D_{n2}$ ,

$$V = E_d(d - d_o) + E_v d_o ; \varepsilon E_d = \varepsilon_o E_v$$

Como

$$D = \varepsilon E_d = \varepsilon_o E_v = \frac{Q}{S}$$

$$V = \frac{Q}{\varepsilon S}(d - d_o) + \frac{Q}{\varepsilon_o S} d_o = \frac{Q}{S} \left( \frac{d - d_o}{\varepsilon} + \frac{d_o}{\varepsilon_o} \right)$$

Realizando operaciones y sacando factor común  $d$  queda,

$$V = \frac{Q}{S} d \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{d_o}{d} \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon \varepsilon_o} \right)$$

Comparando esta expresión con la establecida al principio para la capacidad, obtenemos la permitividad aparente  $\varepsilon_a$ ,

$$\varepsilon_a = \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{d_o}{d} \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon \varepsilon_o} \right)^{-1}$$

operando tenemos,

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_o \varepsilon}{\varepsilon_o + (d_o/d)(\varepsilon - \varepsilon_o)}$$

El cálculo de  $\varepsilon_a$  para valores elevados de  $\varepsilon$  se obtiene mediante el límite de la expresión de  $\varepsilon_a$  cuando  $\varepsilon$  tiende a infinito,

$$\varepsilon'_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_o \varepsilon}{\varepsilon_o + (d_o/d)(\varepsilon - \varepsilon_o)} = \varepsilon_o \frac{d}{d_o}$$

En nuestro ejemplo,

$$\epsilon'_a = 10^4 \epsilon_o$$

Las expresiones anteriores muestran que la permitividad aparente, cuando la permitividad del dieléctrico es elevada, depende fundamentalmente de la relación  $d/d_o$  entre el espesor del dieléctrico y la zona vacía.

### PROBLEMA 4.8

Dado el sistema formado por dos superficies esféricas conductoras concéntricas, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , véase la figura P4.8. En el espacio entre esferas se introduce un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , de forma que llene la mitad de dicho espacio. Unimos las esferas a los bornes de una batería de f.c.m.  $V_o$ .

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{P}$  en el espacio entre esferas.
- 2) Obtener las densidades de carga de polarización.

### Solución

- 1) *Vectores de campo*

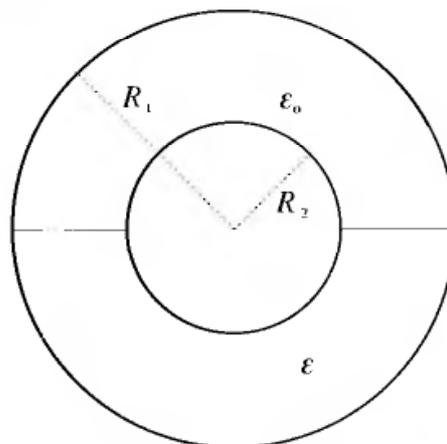


Figura P4.8

En el cálculo de los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ , aplicamos el teorema de Gauss y la continuidad de las componentes tangenciales del vector  $\mathbf{E}$  en la superficie de separación entre dos medios.

Dada la simetría esférica del sistema, las componentes de los vectores indicados son radiales.

$D_v$  = vector desplazamiento en el vacío.

$D_d$  = vector desplazamiento en el dieléctrico.

Aplicando el teorema de Gauss sobre la superficie esférica de radio  $r$  obtenemos,

$$D_v 2\pi r^2 + D_d 2\pi r^2 = Q$$

La continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  sobre la superficie que limita dieléctrico y vacío nos lleva a que,

$$E_d = E_v$$

sobre toda la corona circular comprendida entre  $r = R_1$  y  $r = R_2$ . De esto se deduce que,

$$\frac{D_v}{\epsilon_o} = \frac{D_d}{\epsilon}$$

Con esta expresión y la primera deducimos los valores de  $D_v$  y  $D_d$  en función de  $Q$  y  $r$ .

$$D_v + \frac{\epsilon}{\epsilon_o} D_v = \frac{Q}{2\pi r^2}$$

$$D_v = \frac{\epsilon_o}{\epsilon + \epsilon_o} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

$D_d$  será,

$$D_d = \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_o} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

A partir de la expresión anterior calculamos  $E_v$ , que como hemos visto es igual a  $E_d$ .

$$E_v = E_d = \frac{1}{\epsilon + \epsilon_o} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

Nos queda por determinar  $Q$  en función de la d.d.p. aplicada. Suponemos que la esfera de radio  $R_1$  está a potencial cero y la otra a potencial  $V_o$ .

Para esto tenemos en cuenta que,

$$V_o = \int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_2}^{R_1} E_v dr = \frac{Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_o)} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_o = \frac{Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_o)} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_o)} \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

De la relación anterior se deduce  $Q$ ,

$$Q = 2\pi(\epsilon + \epsilon_o) V_o \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

Si llevamos el valor de  $Q$  calculado a las expresiones obtenidas para el campo y vector desplazamiento, y las ponemos en forma vectorial,

$$\mathbf{E} = V_o \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{D}_v = \epsilon_o V_o \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r ; \quad \mathbf{D}_d = \epsilon V_o \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$$

El vector polarización se calcula mediante la ecuación (4.5). En el vacío la polarización es nula, y en el dieléctrico  $\mathbf{P}$  es,

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o) V_o \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$$

2) *Densidades de carga de polarización*

Las cargas de polarización se obtienen mediante las ecuaciones (4.3) y (4.4).

En la zona donde no existe dieléctrico  $\mathbf{P} = 0$  por lo tanto las densidades de carga  $\rho_p$  y  $\sigma_p$  son nulas. Dentro del dieléctrico,  $\mathbf{P} = P_r \mathbf{u}_r$ ; donde  $P_r$  es el módulo del vector  $\mathbf{P}$  obtenido antes.

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0$$

ya que  $(r^2 P_r)$  no depende del radio.

$\sigma_p$  en la corona circular comprendida entre  $R_2$  y  $R_1$ , que limita dieléctrico y vacío, es nula, dado que  $\mathbf{n}$  es perpendicular a  $\mathbf{u}_r$  y por tanto a  $\mathbf{P}$ .

$\sigma_p$  en la zona donde no hay dieléctrico es nula, ya que  $\mathbf{P} = 0$ .

Calculamos  $\sigma_p$  en las superficie esférica de radio  $R_2$ , donde existe dieléctrico, de la forma siguiente,

$$\sigma_p = (-\mathbf{u}_r) \cdot \mathbf{P}(R_2) = -(\varepsilon - \varepsilon_o) V_o \frac{R_1}{R_1 - R_2} \frac{1}{R_2}$$

El cálculo sobre la superficie esférica de radio  $R_1$ , y en la zona del dieléctrico, se realiza de forma similar,

$$\sigma_p = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{P}(R_1) = (\varepsilon - \varepsilon_o) V_o \frac{R_1}{R_1 - R_2} \frac{1}{R_1}$$

3) *Capacidad del sistema*

Por definición  $C = Q/V_o$ . Si utilizamos el valor de  $Q$  calculado anteriormente y lo dividimos por  $V_o$ , obtendremos la capacidad  $C$ ,

$$C = 2\pi(\varepsilon + \varepsilon_o) \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

#### PROBLEMA 4.9

Un sistema está formado por una esfera conductora de radio  $a$ , una capa esférica conductora de radio interior  $c = 2a$  concéntrica con la anterior, y una capa esférica dieléctrica, también concéntrica con las anteriores, cuya permitividad es  $\varepsilon$ , siendo su radio interior  $a$  y el exterior  $b = \frac{3}{2}a$ . Los tres elementos están dispuestos como muestra la figura 4.9. Se unen a tierra la esfera y la capa conductora.

En la superficie exterior de la capa dieléctrica (de radio  $b$ ) existe una distribución superficial de carga  $\sigma$ .

1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  en la zona cuyo radio  $r$  está comprendido entre  $a$  y  $c$ .

2) Obtener las densidades de carga sobre las superficies conductoras de radio  $a$  y  $c$ . Y calcular la densidad de carga de polarización sobre la superficie dieléctrica en contacto con la esfera de radio  $a$ .

### Solución

#### 1) Cálculo de los vectores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$

La solución se obtiene mediante la aplicación del teorema de Gauss y considerando que la esfera de radio  $a$  y la capa esférica conductora de radio  $c$  están al mismo potencial, es decir,  $\int_a^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

Teniendo en cuenta lo anterior, tenemos:

Para  $r > c$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum Q_i = (Q_a + Q_c) + Q_b = 0$$

Donde  $Q_b = 4\pi b^2 \sigma$  es la carga sobre la superficie del dieléctrico.

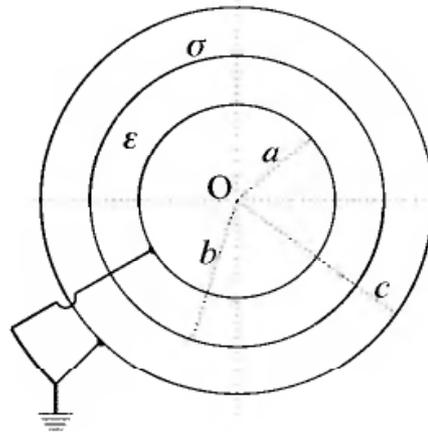


Figura P4.9

Las cargas inducidas en las esferas de radio  $a$  y  $c$ , son de signo opuesto a  $Q_b$  dado que las dos esferas están unidas a tierra y la carga inducida es de signo contrario a la inductora. Así pues,

$$Q_a = 4\pi a^2 \sigma_a \quad \text{y} \quad Q_c = 4\pi c^2 \sigma_c$$

De lo anterior se deduce que

$$Q_b = -(Q_a + Q_c) \rightarrow b^2 \sigma = -(a^2 \sigma_a + c^2 \sigma_c) \quad (4.9.1)$$

Para  $a < r \leq b$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D_{r1} \cdot 4\pi r^2 = Q_a$$

Dada la simetría radial del sistema

$$D_{r1} = \varepsilon E_{r1} = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \rightarrow E_{r1} = \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon r^2}$$

Para  $b < r \leq c$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D_{r2} \cdot 4\pi r^2 = Q_b + Q_a$$

Igual que antes

$$D_{r2} = \varepsilon_o E_{r2} = \frac{Q_b + Q_a}{4\pi r^2} \rightarrow E_{r2} = \frac{Q_b + Q_a}{4\pi \varepsilon_o} \frac{1}{r^2}$$

Ahora podemos aplicar la condición  $\int_a^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

$$\begin{aligned} \int_a^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon} \frac{dr}{r^2} + \int_b^c \frac{Q_b + Q_a}{4\pi \varepsilon_o} \frac{dr}{r^2} \\ \int_a^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_b + Q_a}{4\pi \varepsilon_o} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = 0 \\ \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon} \left( \frac{b-a}{ba} \right) + \frac{Q_b + Q_a}{4\pi \varepsilon_o} \left( \frac{c-b}{bc} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la relación entre radios  $b = 3/2a$  y  $c = 2a$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon} \frac{1}{3a} + \frac{Q_b + Q_a}{4\pi \varepsilon_o} \frac{1}{6a} &= 0 \\ \frac{Q_a}{4\pi a} \left( \frac{1}{3\varepsilon} + \frac{1}{6\varepsilon_o} \right) + \frac{Q_b}{4\pi a} \frac{1}{6\varepsilon_o} &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos

$$Q_a = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} Q_b \quad (4.9.2)$$

Llevando ésta última relación a la expresión (4.9.1), queda

$$-Q_c = Q_b + Q_a = Q_b - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} Q_b = \left( \frac{2\varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \right) Q_b$$

De donde se deduce que

$$Q_c = -\left( \frac{2\varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \right) Q_b$$

A partir del valor obtenido para  $Q_a$ , podemos calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ .

**Zona**  $a < r \leq b$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \frac{Q_a}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} Q_b \frac{1}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{D}_1 &= -\frac{\varepsilon Q_b}{4\pi(\varepsilon + 2\varepsilon_o)} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon} = -\frac{Q_b}{4\pi(\varepsilon + 2\varepsilon_o)} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

Zona  $b < r \leq c$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{Q_b + Q_a}{4\pi} \frac{\mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{Q_b}{4\pi} \frac{2\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{\epsilon_0} = \frac{2Q_b}{4\pi(\epsilon + 2\epsilon_0)} \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$$

2) Densidades de carga

A continuación calculamos las densidades de carga sobre las superficies conductoras teniendo en cuenta que  $\sigma = \sigma_b$ .

Para  $r = a$

$$4\pi a^2 \sigma_a = Q_a \rightarrow \sigma_a = -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0} Q_b$$

por tanto

$$\sigma_a = -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0} 4\pi b^2 \sigma_b \rightarrow \sigma_a = -\frac{b^2}{a^2} \frac{\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0} \sigma$$

Para  $r = c$

$$4\pi c^2 \sigma_c = Q_c \rightarrow \sigma_c = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{2\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} Q_b$$

de donde

$$\sigma_c = -\frac{b^2}{c^2} \frac{2\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \sigma$$

**Densidad de carga de polarización**

Por último, la densidad de carga de polarización en  $r = a$  se calcula obteniendo primero el vector polarización  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1 = -\frac{Q_b}{4\pi} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r}{r^2} = -\frac{\sigma b^2 (\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r}{r^2}$$

Para  $r = a$

$$\mathbf{P}(a) = -\sigma \frac{b^2 (\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r}{a^2}$$

Y entonces

$$\sigma_p(a) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot (-\mathbf{u}_r) = \frac{b^2 (\epsilon - \epsilon_0)}{a^2 (\epsilon + 2\epsilon_0)} \sigma$$

#### PROBLEMA 4.10

Tenemos una esfera de dieléctrico de radio  $R$  y permitividad  $\epsilon$ . En dicha esfera existe además una distribución uniforme de carga  $\rho = \rho_0$ .

1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  dentro y fuera de la esfera.

2) Calcular el potencial para  $r = R'$  ( $R' > R$  pero  $R' \simeq R$ ). Obtener el potencial en el centro de la esfera,  $r = 0$ .

**Solución**1) *Cálculo de los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$* 

Aplicamos el teorema de Gauss a una superficie esférica contenida en la esfera,

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$

Como  $\mathbf{D}$  es radial (por la simetría del problema) escogemos  $d\mathbf{s} = r^2 d\Omega \mathbf{u}_r$  ( $d\Omega$  es el ángulo sólido elemental). Entonces,

$$\int \mathbf{D}_i \cdot d\mathbf{s} = D_i 4\pi r^2 \quad ; \quad Q = \rho_o \frac{4}{3} \pi r^3$$

Por tanto, si de la igualdad despejamos  $D_i$ ,

$$D_i = \frac{\rho_o r}{3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}_i = \frac{\rho_o r}{3} \mathbf{u}_r$$

Aplicando  $\mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{E}_i(r) = \frac{\rho_o r}{3\varepsilon} \mathbf{u}_r$$

De forma similar, aplicamos el teorema de Gauss a una superficie esférica exterior. Ahora  $Q = \rho_o (4/3) \pi R^3$ . Luego,

$$D_e 4\pi r^2 = \rho_o \frac{4}{3} \pi R^3$$

despejando, y teniendo en cuenta que en el vacío  $\mathbf{E} = \varepsilon_o \mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D}_e(r) = \frac{\rho_o R^3}{3 r^2} \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{E}_e(r) = \frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o r^2} \mathbf{u}_r$$

Se comprueba que la componente normal de  $\mathbf{D}$  en la superficie de separación de los dos medios se conserva, esto es,

$$\mathbf{D}_i(R) = \mathbf{D}_e(R)$$

2) *Calcular el potencial para  $r = R'$* 

Calculamos el potencial en  $R' \geq R$ , por lo que tenemos que integrar  $\mathbf{E}_e$ . Tomamos  $V(\infty) = 0$ .

$$V(R') = - \int_{\infty}^{R'} \mathbf{E}_e(r) \cdot \mathbf{u}_r dr = - \frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o} \int_{\infty}^{R'} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o R'}$$

En el límite  $R' \rightarrow R$ ,

$$V(R) = \frac{\rho_o R^2}{3\varepsilon_o}$$

Como sabemos  $V(R)$ , calculamos  $V(R) - V(0)$  de forma similar (con  $\mathbf{E}_i$  ahora).

$$V(R) - V(0) = - \int_0^R \mathbf{E}_i(r) \cdot \mathbf{u}_r dr$$

Sustituyendo  $V(R)$ ,

$$\frac{\rho_o R^2}{3\epsilon_o} - V(0) = -\frac{\rho_o}{3\epsilon} \int_0^R r dr = -\frac{\rho_o R^2}{6\epsilon}$$

Despejando  $V(0)$ ,

$$V(0) = \frac{\rho_o R^2}{3} \left( \frac{1}{\epsilon_o} + \frac{1}{2\epsilon} \right) = \frac{\rho_o R^2}{3} \frac{2\epsilon + \epsilon_o}{2\epsilon\epsilon_o}$$

### PROBLEMA 4.11

Un cable coaxial, cuyos radios interior y exterior son respectivamente  $a$  y  $b$  ( $b = 2a$ ), tiene un dieléctrico en el espacio entre conductores cuya permitividad es,

$$\epsilon = 6\epsilon_o (1 + (\rho/a)^2)^{-1}$$

Se conecta una pila de f.e.m.  $V_o$  entre los conductores como indica la figura P4.11.

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$  en el dieléctrico.
- 2) Obtener las densidades de carga de polarización.

### Solución

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$

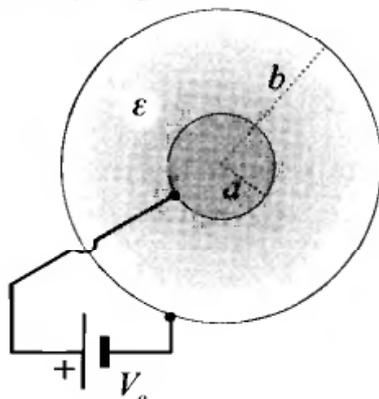


Figura P4.11

La batería suministra carga libre  $Q$  a la superficie interior; ésta se calcula mediante el teorema de Gauss para el vector desplazamiento  $\mathbf{D}$  aplicado a una superficie cilíndrica de radio  $a < \rho < b$  y altura  $h$ :

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D 2\pi\rho h = Q$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi h \rho} \mathbf{u}_\rho$$

El objetivo ahora es determinar  $Q/h$  en función de  $V_o$ , que es el dato que conocemos. Para ello obtenemos la expresión del campo eléctrico mediante la relación  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} = \frac{1}{6\varepsilon_o(1 + (\rho/a)^2)^{-1}} \frac{Q}{2\pi h \rho} \mathbf{u}_\rho = \frac{a^2 + \rho^2}{6\varepsilon_o a^2} \frac{Q}{2\pi h \rho} \mathbf{u}_\rho$$

Ahora, la integral de línea del campo entre los puntos  $a$  y  $b$  tiene que ser igual al potencial  $V_o$

$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\rho} = V_b - V_a = -V_o$$

Calculamos la integral, considerando que  $b = 2a$ :

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{Q}{12\pi h \varepsilon_o a^2} \int_a^{2a} \frac{a^2 + \rho^2}{\rho} d\rho = \frac{Q}{12\pi h \varepsilon_o a^2} \left[ a^2 \ln \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \right]_a^{2a}$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{Q}{12\pi h \varepsilon_o} \left( \ln 2 + \frac{3}{2} \right)$$

es decir,

$$V_o = \frac{Q}{12\pi h \varepsilon_o} \left( \ln 2 + \frac{3}{2} \right)$$

de donde se deduce  $Q/h$ ,

$$\frac{Q}{h} = V_o \frac{24\pi \varepsilon_o}{2 \ln 2 + 3}$$

Sustituyendo en las expresiones de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  tenemos,

$$\mathbf{D} = \frac{12\varepsilon_o V_o}{2 \ln 2 + 3} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho ; \quad \mathbf{E} = \frac{2V_o}{2 \ln 2 + 3} \frac{a^2 + \rho^2}{a^2} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

y calculamos  $\mathbf{P}$  mediante la expresión  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_o \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{P} = \frac{2V_o \varepsilon_o}{2 \ln 2 + 3} \frac{5a^2 - \rho^2}{a^2} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

2) *Densidades de carga de polarización*

Las densidad volumétrica de carga de polarización es  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ . Aplicando la expresión de la divergencia en coordenadas cilíndricas y considerando que  $\mathbf{P}$  sólo depende de  $\rho$ , tenemos,

$$\rho_p = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho P_\rho) = \frac{4V_o \varepsilon_o}{2 \ln 2 + 3} \frac{1}{a^2}$$

Las densidades superficiales en la frontera de los medios,  $\rho = a$ ,  $\rho = b$  se calculan mediante

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie de separación. Para  $\rho = a$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_\rho$

$$\sigma_p(a) = \mathbf{P}(\rho = a) \cdot (-\mathbf{u}_\rho) = -\frac{8V_o \varepsilon_o}{2 \ln 2 + 3} \frac{1}{a}$$

para  $\rho = b = 2a$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho$

$$\sigma_p(b) = \mathbf{P}(\rho = 2a) \cdot \mathbf{u}_\rho = \frac{V_o \epsilon_o}{2 \ln 2 + 3} \frac{1}{a}$$

Podemos comprobar que la suma de todas las cargas de polarización es nula.

### PROBLEMA 4.12

Disponemos de un cable coaxial indefinido, cuyos radios respectivos se muestran en la figura P4.12. En el espacio entre conductores hay un dieléctrico cuya permitividad depende del radio  $\epsilon = \epsilon(\rho)$ , con  $\epsilon(b) = \epsilon_o$ . Se aplica un pila de f.e.m.  $V_o$  como muestra la citada figura.

1) Calcular la forma matemática de  $\epsilon = \epsilon(\rho)$ , de manera que el campo eléctrico no varíe con el radio en la zona entre conductores.

2) Determinar los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$  en el dieléctrico.

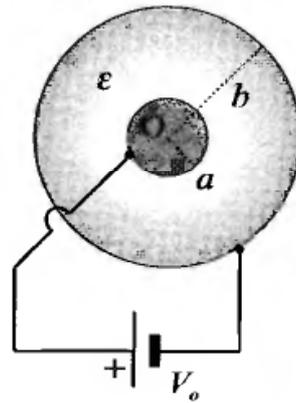


Figura P4.12

### Solución

1) *Permitividad*  $\epsilon = \epsilon(\rho)$

Si el campo eléctrico no debe variar entre conductores, entonces la expresión del potencial es muy fácil de resolver teniendo en cuenta la simetría radial del problema:

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(V_b - V_a) = V_o$$

puesto que  $\mathbf{E}$  es paralelo a  $\mathbf{u}_\rho$  y  $d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{u}_\rho$ ,

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(b - a) = V_o$$

$$\mathbf{E} = \frac{V_o}{b - a} \mathbf{u}_\rho$$

Por otra parte, podemos aplicar la Ley de Gauss para el vector  $\mathbf{D}$ , que depende sólo de la carga libre  $Q_o$  encerrada. Dada la simetría cilíndrica

del sistema, el vector  $\mathbf{D}$  es normal y del mismo módulo sobre los puntos de una superficie cilíndrica cuya superficie elemental es  $ds = L\rho d\varphi \mathbf{u}_\rho$ , con  $a < \rho < b$ ,

$$\int_S \mathbf{D} \cdot ds = 2\pi L\rho D = Q_o$$

$$D \propto \frac{1}{\rho}$$

Por otra parte, se tiene que cumplir que  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ , lo que, combinado con el hecho que  $\mathbf{E}$  debe ser independiente del radio nos da que,

$$\varepsilon = \frac{C}{\rho}$$

donde  $C$  es una constante que se determina con la condición  $\varepsilon(b) = \varepsilon_o$ ,

$$\varepsilon(b) = \frac{C}{b} = \varepsilon_o \rightarrow C = b\varepsilon_o$$

La permitividad será,

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon_o \frac{b}{\rho}$$

### 2) Vectores de campo

El campo eléctrico ya estaba calculado en el apartado anterior:

$$\mathbf{E} = \frac{V_o}{b-a} \mathbf{u}_\rho$$

Se obtiene  $\mathbf{D}$  mediante la expresión  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ . Sustituyendo los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\varepsilon$  obtenidos en el apartado anterior,

$$\mathbf{D} = \left( \frac{\varepsilon_o V_o b}{b-a} \right) \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

Y, finalmente, el vector  $\mathbf{P}$  viene dado por la relación  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_o \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_o V_o}{b-a} \left( \frac{b}{\rho} - 1 \right) \mathbf{u}_\rho$$

### PROBLEMA 4.13

Sea un condensador coaxial formado por dos cilindros indefinidos, el interno de radio  $a$  y el externo de radio  $b$ . El espacio entre el conductor interno y el externo está ocupado por un material de permitividad  $\varepsilon = \varepsilon_o e^{\varphi/\pi}$ . Los conductores se encuentran conectados a una batería de manera que la d.d.p. entre ellos es  $V_o$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en el espacio entre conductores y la distribución de carga sobre el conductor de radio  $a$ .

### Solución

#### 1) Cálculo de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$

Para el cálculo de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  aplicamos la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico y de las componentes normales del vector desplazamiento eléctrico.

De la primera condición se deduce que el campo eléctrico no depende de la coordenada  $\varphi$  y solo depende de la coordenada  $\rho$  en la forma:  $E_\rho \propto 1/\rho$ .

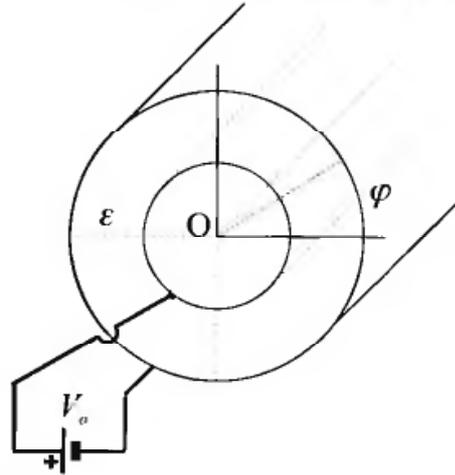


Figura P4.13

Aplicamos la expresión

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o$$

suponiendo  $E_\rho = K/\rho$  donde  $K$  es una constante a determinar.

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{K}{\rho} d\rho = V_o \rightarrow K \ln(b/a) = V_o$$

por tanto,

$$K = \frac{V_o}{\ln(b/a)}$$

El campo eléctrico es,

$$\mathbf{E} = \frac{V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

El vector desplazamiento eléctrico será entonces

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_o e^{\varphi/\pi} \frac{V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

## 2) Distribución de carga

La distribución de carga sobre la superficie interior se determina teniendo en cuenta las condiciones en los límites para el vector desplazamiento eléctrico.

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

Puesto que en el interior del conductor  $D_{n1} = 0$ , y el vector desplazamiento eléctrico es normal a la superficie interior del cable coaxial, tenemos,

$$\sigma = \mathbf{D}(a) \cdot \mathbf{u}_\rho = \frac{V_0 \varepsilon_0 e^{\varphi/\pi}}{a \ln(b/a)}$$

La densidad de carga  $\sigma$  depende del ángulo  $\varphi$ .

#### PROBLEMA 4.14

Sobre un plano coincidente con el XZ tenemos una densidad superficial de carga  $\sigma$ . Pegado a dicha distribución tenemos una placa dieléctrica, también indefinida en las direcciones X y Z, de espesor  $d$  y permitividad  $\varepsilon$ , (véase la figura P4.14a).

- 1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ , dentro y fuera del dieléctrico.
- 2) Determinar las densidades de carga de polarización.

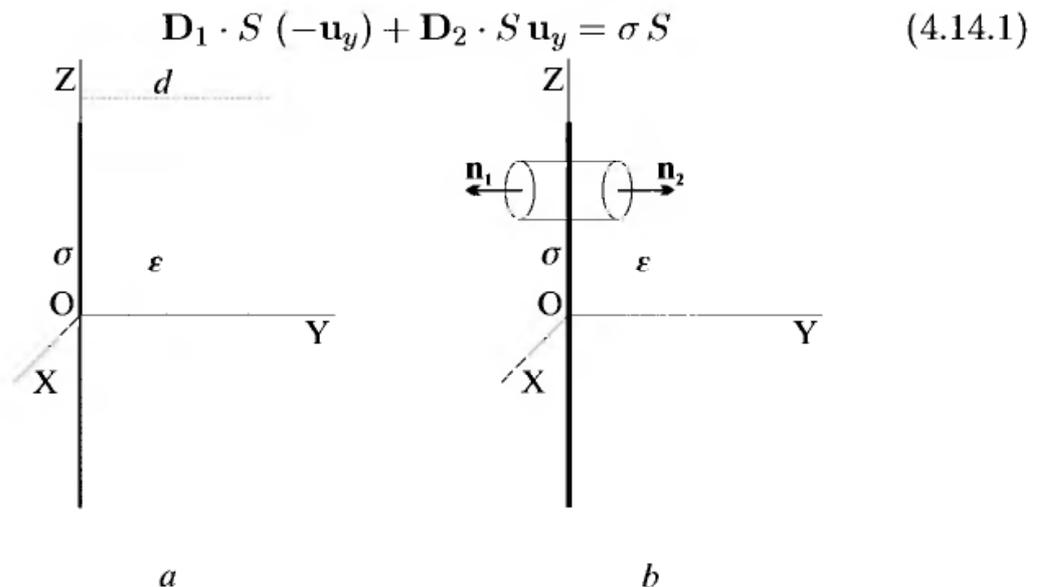
#### Solución

##### 1) Vectores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$

Dividimos el problema en tres regiones:

$$(1) y < 0, \quad (2) 0 < y < d, \quad (3) y > d$$

Las regiones (2) y (3) son idénticas desde el punto de vista del vector desplazamiento, que sólo depende de la carga libre. Aplicando el teorema de Gauss para el vector desplazamiento sobre una caja cilíndrica como la indicada en la figura P1.2b tenemos,



**Figura P4.14**

Además como se debe cumplir la continuidad de las componentes normales, y por su simetría con respecto al plano  $y = 0$ , tenemos que  $-\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_3$ , por tanto resolviendo (4.14.1),

$$\mathbf{D}_1 = -\frac{\sigma}{2}\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_3 = \frac{\sigma}{2}\mathbf{u}_y$$

Para el campo eléctrico sí que necesitamos distinguir las tres zonas. Aplicamos  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  en cada zona tendremos,

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon}\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{E}_3 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{u}_y \quad (4.14.2)$$

2) *Densidades de carga de polarización*

Calculamos ahora el vector  $\mathbf{P}$ , que existe sólo en la región (2). Para ello utilizamos la relación,  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ .

En la zona (2)

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{D}_2 - \epsilon_0\mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{u}_y$$

Como  $\mathbf{P}$  no depende de ninguna variable espacial,  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ , por tanto no existe densidad volumétrica de carga en el interior del dieléctrico. La densidad superficial en cada pared del dieléctrico se calcula con  $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ .

Para  $y = 0$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_y$

$$\sigma_p = -\frac{\sigma}{2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}$$

Para  $y = d$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_y$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}$$

#### PROBLEMA 4.15

Sobre una esfera conductora de radio  $a$  existe una carga  $Q$ . Alrededor de dicha esfera se sitúa una capa dieléctrica, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , cuya permitividad es  $\epsilon = k/r^2$ .

1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  para  $r < b$ .

2) Obtener las densidades de carga de polarización  $\sigma_p$  en  $r = a$  y  $r = b$ .

**Solución**

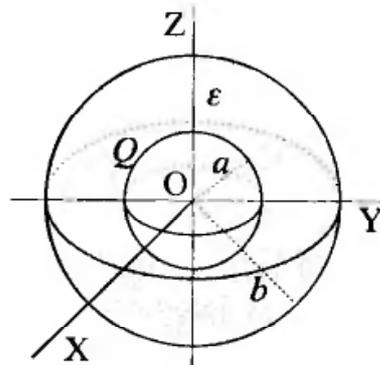


Figura P4.15

1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$

Para calcular los vectores de campo en la región  $a \leq r < b$ , aplicamos el teorema de Gauss para dieléctricos a una esfera de radio  $a \leq r < b$

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$

De donde

$$D 4\pi r^2 = Q \rightarrow \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r$$

Teniendo en cuenta la relación  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{r^2}{k} \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi k} \mathbf{u}_r$$

2) Densidades de carga de polarización

El vector polarización se calcula mediante la relación  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_o \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{P} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r - \epsilon_o \frac{Q}{4\pi k} \mathbf{u}_r = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon_o}{k} \right) \mathbf{u}_r$$

Las densidades de carga de polarización en  $r = a$  y  $r = b$  vienen dadas por,

$$\sigma_a = \mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{n} \quad \text{con} \quad \mathbf{n} = -\mathbf{u}_r$$

$$\sigma_b = \mathbf{P}(b) \cdot \mathbf{n} \quad \text{con} \quad \mathbf{n} = \mathbf{u}_r$$

Sustituyendo

$$\sigma_a = -\frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{\epsilon_o}{k} \right) ; \quad \sigma_b = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{\epsilon_o}{k} \right)$$

#### PROBLEMA 4.16

Una placa de dieléctrico, de espesor  $d$  y superficie  $S$ , tiene una polarización uniforme  $\mathbf{P}$ . Disponemos la placa entre dos láminas conductoras unidas entre sí por un conductor como indica la figura P4.16.

1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  en los medios entre láminas.

2) Calcular las densidades de carga en láminas y placa.

#### Solución

1) Vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$

Calculamos los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  teniendo en cuenta las condiciones que deben cumplir  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ :

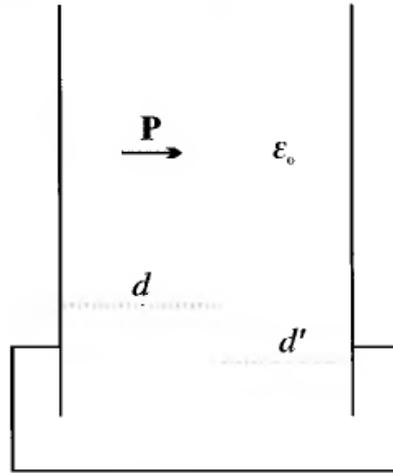
Primera:  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  en el espacio entre láminas.

Segunda: Las componentes normales de  $\mathbf{D}$  son continuas en la superficie límite entre los medios.

Suponemos que el sistema es indefinido en dos direcciones, y como consecuencia los vectores de campo son uniformes y perpendiculares a la placa dieléctrica en cada zona.

$E_d$  = campo en el dieléctrico ;  $E_v$  = campo en el vacío

Designamos por  $D_d$  y  $D_v$  respectivamente a los valores del módulo del vector desplazamiento en dieléctrico y vacío.



**Figura P4.16**

La primera condición da como resultado,

$$E_d d + E_v d' = 0 \rightarrow \mathbf{E}_d = -\mathbf{E}_v \frac{d'}{d} \quad (4.16.1)$$

Utilizando la ecuación (4.5), tendremos:

$$\mathbf{D}_d = \epsilon_0 \mathbf{E}_d + \mathbf{P} ; \quad \mathbf{D}_v = \epsilon_0 \mathbf{E}_v$$

La condición de continuidad para las componentes normales de  $\mathbf{D}$  se traduce en que,

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{D}_d \rightarrow \epsilon_0 \mathbf{E}_v = \epsilon_0 \mathbf{E}_d + \mathbf{P} \quad (4.16.2)$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{E}_d$  de la ecuación (4.16.1) en (4.16.2),

$$\epsilon_0 \mathbf{E}_v = -\epsilon_0 \mathbf{E}_v \frac{d'}{d} + \mathbf{P}$$

despejando  $\mathbf{E}_v$  queda,

$$\mathbf{E}_v = \frac{d}{\epsilon_0(d + d')} \mathbf{P}$$

Utilizando la ecuación (4.16.1) calculamos  $\mathbf{E}_d$ ,

$$\mathbf{E}_d = -\frac{d'}{\epsilon_0(d + d')} \mathbf{P}$$

Como  $\mathbf{D}_v = \epsilon_0 \mathbf{E}_v$ , y  $\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_v$ , los valores de  $\mathbf{D}_d$  y  $\mathbf{D}_v$  serán:

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_v = \frac{d}{d + d'} \mathbf{P}$$

2) Densidades de carga

2.1) Placa dieléctrica

Dado que  $\mathbf{P}$  es uniforme  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \rightarrow \rho_p = 0$ .

Cara izquierda,  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{P}$  tienen sentido contrario:

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = -P$$

Cara derecha,  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{P}$  tienen el mismo sentido:

$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = P$$

2.2) Láminas conductoras

Lámina izquierda,  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{D}_v$  tienen el mismo sentido:

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_v = \frac{d}{d + d'} P$$

Lámina derecha,  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{D}_v$  tienen sentido contrario:

$$\sigma = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_v = -\frac{d}{d + d'} P$$

#### PROBLEMA 4.17

Tenemos dos placas conductoras paralelas, separadas por una distancia  $d$ , cuya superficie es  $S$ . Manteniendo cerrado el interruptor  $S$  (véase la figura P4.17) introducimos un material con polarización espontánea  $\mathbf{P}_o$ .

Calcular los vectores de campo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ .

Se desconecta el interruptor  $S$  y a continuación se calienta el material de forma que se anula la polarización espontánea  $\mathbf{P}_o$ , es decir,  $\mathbf{P}_o = 0$ . ¿Cual es el valor de los vectores de campo ahora?

#### Solución

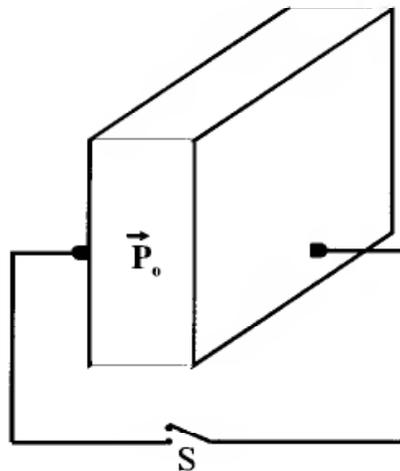


Figura P4.17

1) En este caso tenemos  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_o$ . Además las placas metálicas están unidas externamente, con lo cual la diferencia de potencial es 0. Es decir,

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

donde  $A$  y  $B$  son cada una de las placas metálicas y  $d\mathbf{l}$  cualquier camino que una éstas. Dada la simetría del problema la única solución posible es  $\mathbf{E} = 0$ .

Ahora aplicamos la ecuación que nos relaciona los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Por tanto si  $\mathbf{E} = 0$ ,

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}_o$$

Esto quiere decir que la polarización del material determina inicialmente la aparición de un campo, el cual provoca que los electrones, cargas libres negativas, se desplacen hacia una de las placas metálicas hasta equilibrar las cargas de polarización de signo opuesto en la placa correspondiente. La otra placa metálica queda cargada positivamente y neutraliza la carga de polarización negativa. El resultado final es que se anula el campo entre las placas.

Resumiendo, en este primer caso

$$\mathbf{E} = 0 ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}_o ; \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_o$$

2) Ahora se abre el interruptor, con lo que las cargas libres que se acumularon en el caso anterior permanecen en cada placa conductora, luego  $\mathbf{D} = \mathbf{P}_o$ . En cuanto calentamos y pasamos una cierta temperatura crítica se anula la polarización espontánea, es decir,  $\mathbf{P}_o = 0$ .

En estas circunstancias conocemos los valores de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{D}$ . Podemos deducir el campo  $\mathbf{E}$  mediante la relación  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_o} = \frac{\mathbf{P}_o}{\epsilon_o}$$

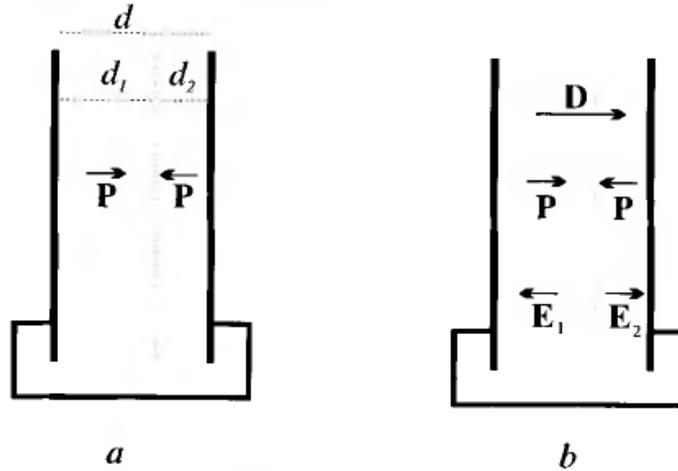
En resumen,

$$\mathbf{P} = 0 ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}_o ; \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_o}{\epsilon_o}$$

#### PROBLEMA 4.18

En la figura P4.18a se muestra un dieléctrico entre dos placas conductoras unidas entre sí por un conductor externo. El dieléctrico tiene una zona de espesor  $d_1$  con una polarización  $\mathbf{P}$ , y otra zona de espesor  $d_2$  cuya polarización es  $-\mathbf{P}$ .

- 1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en las distintas zonas.
- 2) Calcular las densidades de carga reales sobre las placas conductoras.

**Solución**1) *Calcular los vectores de campo***Figura P4.18**

A partir del enunciado del problema se pueden establecer las siguientes conclusiones:

a) Puesto que las placas conductoras están conectadas entre sí, la diferencia de potencial entre ellas es igual a cero. Esta condición se plasma en la siguiente expresión:

$$\int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

b) Dado que no existe densidad de carga libre en la superficie de separación de los dieléctricos, se verifica que las componentes normales del vector desplazamiento eléctrico son continuas. De aquí se desprende que el vector  $\mathbf{D}$  es el mismo en los dos dieléctricos

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{P}_1 = P \mathbf{u}_y$ ,  $\mathbf{P}_2 = -P \mathbf{u}_y$ , y la relación  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , el campo eléctrico en cada uno de los dieléctricos vendrá dado por

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} (D - P) \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P}_2) = \frac{1}{\epsilon_0} (D + P) \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo en la primera expresión, tendremos

$$\int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{d_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{d_1}^d \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$d\mathbf{l} = dy \mathbf{u}_y$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{d_1} (D - P) \mathbf{u}_y \cdot dy \mathbf{u}_y + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{d_1}^d (D + P) \mathbf{u}_y \cdot dy \mathbf{u}_y = 0$$

con  $d = d_1 + d_2$

Como el integrando es constante, operando se obtiene,

$$D(d_1 + d_2) + P(d_2 - d_1) = 0$$

Despejando  $D$ ,

$$D = \frac{d_1 - d_2}{d} P \rightarrow \mathbf{D} = \frac{d_1 - d_2}{d} P \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo el valor de  $D$  en las expresiones para el campo eléctrico, obtenemos

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{2P d_2}{\epsilon_0 d} \mathbf{u}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{2P d_1}{\epsilon_0 d} \mathbf{u}_y$$

La distribución de los vectores de campo se muestra en la figura P4.18b.

De la expresión del vector desplazamiento eléctrico se observa que la dirección de  $\mathbf{D}$  depende de la diferencia entre el espesor de las placas de dieléctrico con polarización opuesta. Si  $d_1 > d_2$ , el vector tendrá dirección  $\mathbf{u}_y$  y en caso contrario dirección  $-\mathbf{u}_y$ .

2) *Densidades de carga*

Las densidades de carga reales sobre las placas conductoras son

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_y \rightarrow \sigma_1 = \frac{d_1 - d_2}{d} P \\ \sigma_2 &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{D} \cdot (-\mathbf{u}_y) \rightarrow \sigma_2 = -\frac{d_1 - d_2}{d} P \end{aligned}$$

#### PROBLEMA 4.19

En la figura P4.19 se muestra un dieléctrico entre dos placas conductoras unidas entre sí por una batería externa  $V_o$ . El dieléctrico tiene una zona de espesor  $d_1$  con una polarización  $\mathbf{P}$ , y otra zona de espesor  $d_2$  cuya polarización es  $-\mathbf{P}$ .

- 1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en las distintas zonas.
- 2) Calcular las densidades de carga reales sobre las placas conductoras.

#### Solución

1) *Vectores de campo*

a) La diferencia de potencial entre ellas es igual a  $V_o$ . Esta condición se expresa de la siguiente forma:

$$\int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o$$

b) Puesto que no existe densidad de carga libre en la superficie de separación de los dieléctricos, se verifica que las componentes normales del vector desplazamiento eléctrico son continuas. De aquí se desprende que el vector  $\mathbf{D}$  es el mismo en los dos dieléctricos,

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{D} = D \mathbf{u}_y$$

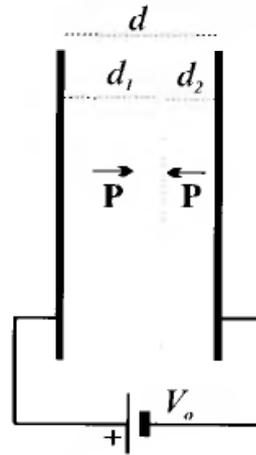


Figura P4.19

Teniendo en cuenta lo anterior, el campo eléctrico en cada uno de los dieléctricos vendrá dado por

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_o} (\mathbf{D} - \mathbf{P}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_o} (\mathbf{D} - \mathbf{P}_2)$$

Como

$$\mathbf{P}_1 = P \mathbf{u}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_2 = -P \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_o} (D - P) \mathbf{u}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_o} (D + P) \mathbf{u}_y$$

La longitud elemental es  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{u}_y$ .

Sustituyendo los campos en la expresión para la diferencia de potencial, tendremos

$$\int_0^{d_1} \frac{1}{\varepsilon_o} (D - P) \mathbf{u}_y \cdot dy \mathbf{u}_y + \int_{d_1}^d \frac{1}{\varepsilon_o} (D + P) \mathbf{u}_y \cdot dy \mathbf{u}_y = V_o$$

con  $d = d_1 + d_2$

Operando se obtiene

$$Dd + P(d_2 - d_1) = \varepsilon_o V_o$$

por tanto

$$D = \frac{1}{d} (\varepsilon_o V_o + P(d_1 - d_2))$$

El vector  $\mathbf{D}$  será,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{d} (\varepsilon_o V_o + P(d_1 - d_2)) \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo el valor de  $D$  en las expresiones para el campo eléctrico, obtenemos

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_o} \mathbf{D} - \mathbf{P}_1 = \frac{1}{d} (\varepsilon_o V_o + P(d_1 - d_2)) \mathbf{u}_y - P \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_o} \mathbf{D} - \mathbf{P}_2 = \frac{1}{d} (\epsilon_o V_o + P(d_1 - d_2)) \mathbf{u}_y + P \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_o d} (\epsilon_o V_o - 2Pd_2) \mathbf{u}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_o d} (\epsilon_o V_o + 2Pd_1) \mathbf{u}_y$$

2) Densidades de carga

Las densidades de carga reales sobre las placas conductoras son,

$$\sigma_1 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_2$$

Donde  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_y$  y  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{u}_y$ .

Sustituyendo los valores del vector desplazamiento y los vectores unitarios normales a las respectivas placas queda,

$$\sigma_1 = \frac{1}{d} (\epsilon_o V_o + P(d_1 - d_2)) \quad ; \quad \sigma_2 = -\frac{1}{d} (\epsilon_o V_o + P(d_1 - d_2))$$

#### PROBLEMA 4.20

La figura P4.20 muestra la sección transversal de un condensador de láminas planoparalelas separadas por una distancia  $4d$  y unidas por un conductor. En su interior se sitúan tres placas, dos de dieléctrico cuya permitividad es  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4\epsilon_o$  y espesor es  $d$ ; y una placa de material con polarización permanente  $\mathbf{P}_o$ , cuyo espesor es  $2d$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  en las tres placas.

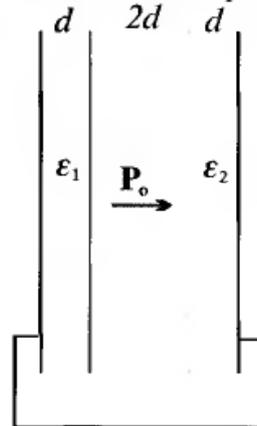


Figura P4.20

#### Solución

La solución de este problema se obtiene aplicando la continuidad de las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$ , la definición de vector desplazamiento  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$  y que el campo es conservativo, es decir,  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

Dada el sistema que tenemos, podemos suponer despreciable el efecto de bordes, y por tanto los vectores de campo son perpendiculares a las placas; es decir, no hay componentes tangenciales en dirección paralela a las placas.

De la condición de continuidad y la relación entre los vectores en cada medio tenemos que,

$$D_1 = D_o = D_2 \rightarrow \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_o E_o + P_o = \varepsilon_2 E_2$$

Aplicando la condición de campo conservativo tenemos que,

$$E_1 d + E_o 2d + E_2 d = 0$$

Con las relaciones anteriores tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 E_2 &= \varepsilon_1 E_1 \\ \varepsilon_1 E_1 &= \varepsilon_o E_o + P_o \\ 0 &= E_1 d + E_o 2d + E_2 d \end{aligned}$$

Para resolverlo tenemos en cuenta que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4\varepsilon_o$ . En consecuencia,

$$E_1 = E_2 \quad \text{y} \quad E_o = -\frac{P_o}{\varepsilon_o} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_o} E_1 = -\frac{P_o}{\varepsilon_o} + 4E_1$$

Llevando estos valores a la tercera ecuación tenemos que,

$$E_1(d + d) + 2d \left( -\frac{P_o}{\varepsilon_o} + 4E_1 \right) = 0 \rightarrow (10d)E_1 - 2d \frac{P_o}{\varepsilon_o} = 0$$

Despejando  $E_1$  queda,

$$E_1 = \frac{2}{10} \frac{P_o}{\varepsilon_o} = 0,2 \frac{P_o}{\varepsilon_o} \rightarrow E_2 = E_1 = 0,2 \frac{P_o}{\varepsilon_o}$$

y el campo en la placa polarizada será,

$$E_o = -\frac{P_o}{\varepsilon_o} + 4 \times 0,2 \frac{P_o}{\varepsilon_o} = -0,2 \frac{P_o}{\varepsilon_o}$$

Podemos comprobar que se cumple que  $D_1 = D_o = D_2$  y  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

Los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  son respectivamente:

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = 4\varepsilon_o \times 0,2 \frac{\mathbf{P}_o}{\varepsilon_o} = 0,8 \mathbf{P}_o$$

$$\mathbf{D}_o = -\varepsilon_o 0,2 \frac{\mathbf{P}_o}{\varepsilon_o} + \mathbf{P}_o = 0,8 \mathbf{P}_o$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = 0,2 \frac{\mathbf{P}_o}{\varepsilon_o} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_o = -0,2 \frac{\mathbf{P}_o}{\varepsilon_o}$$

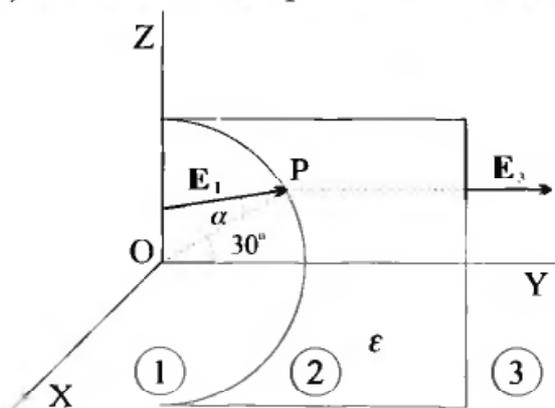
#### PROBLEMA 4.21

Tenemos una barra dieléctrica de permitividad  $\varepsilon = 3\varepsilon_o$ , cuya sección transversal se muestra en la figura P4.21.

Aplicando las condiciones en los límites calcular el ángulo de incidencia  $\alpha_1$  del campo en el punto P del medio (1) para que el campo eléctrico en el medio (3) sea paralelo al eje Y.

**Solución**

Si en la región (3) hemos de obtener un campo sólo en la dirección Y, por la continuidad de las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$  y las tangenciales de  $\mathbf{E}$ , en la región (2) también el campo tiene la dirección Y.

**Figura P4.21**

Entonces, en el punto P, las componente normal a la superficie de separación del vector  $\mathbf{D}$  y la componente tangencial del campo  $\mathbf{E}$  son:

$$D_{2\perp} = D_2 \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} \varepsilon E_2$$

$$E_{2\parallel} = E_2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} E_2$$

Por otro lado, en el mismo punto P pero desde la región (1) tenemos que

$$D_{1\perp} = D_1 \cos \alpha = \varepsilon_0 E_1 \cos \alpha$$

$$E_{1\parallel} = E_1 \sin \alpha$$

Las condiciones de frontera determinan que  $D_{1\perp} = D_{2\perp}$  y  $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$ ; por tanto

$$\varepsilon_0 E_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3} \varepsilon E_2$$

$$E_1 \sin \alpha = \frac{1}{2} E_2$$

Sustituyendo  $\varepsilon = 3\varepsilon_0$  y dividiendo la segunda ecuación por la primera tenemos,

$$\tan \alpha = \frac{1}{9} \sqrt{3} \simeq 0,19$$

El ángulo que forma el campo eléctrico con la normal a la superficie de transición es,

$$\alpha = 10,76^\circ$$

## Capítulo 5

# ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

## 5.1 INTRODUCCIÓN

### 5.1.1 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

La energía potencial debida a la interacción de cargas estáticas recibe el nombre de energía electrostática. Esta energía es el trabajo necesario para situar las cargas en sus posiciones respectivas. Dicho trabajo se hace mediante fuerzas que en cada punto son del mismo módulo y dirección pero sentido contrario al que tiene el campo electrostático.

La energía electrostática considera las posiciones relativas de las cargas, sin tener en cuenta la energía de creación de las propias cargas.

Si tenemos una carga  $q$  en el seno de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , el trabajo del campo para trasladar la carga desde un punto a otro es:

$$W_e = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{l} = -q(V_2 - V_1)$$

El trabajo que realizan las fuerzas contra el campo, sin que varíe la energía cinética de la carga, es de signo contrario al obtenido anteriormente, ya que la fuerza es de signo opuesto en cada punto del recorrido. Este trabajo es la variación de energía electrostática del sistema debida al traslado de la carga desde un punto a otro.

$$W_e = q(V_2 - V_1)$$

Si consideramos el punto 1 situado en el infinito y el origen de potenciales en dicho punto,  $V_1 = 0$ , la energía electrostática de una carga en un punto de potencial  $V_2$  es:

$$W_e = q V_2$$

### 5.1.1.1 Energía de una distribución discreta de cargas

La energía potencial de una distribución de cargas es el trabajo necesario para situar las cargas en sus respectivos puntos. Situar la primera carga no requiere trabajo, ya que suponemos no existe campo debido a otras cargas. Trasladar desde el infinito al punto correspondiente las sucesivas cargas, requiere vencer la fuerza del campo creado por las cargas situadas anteriormente.

Si se trata de un sistema de  $N$  cargas puntuales, la expresión que se obtiene para la energía electrostática es:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N ' \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad (5.1)$$

La comilla que figura en el segundo sumatorio significa que son nulos los términos en que  $j = k$ , es decir, que se excluyen los términos  $j = k$ . En la expresión (5.1) el término,

$$V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{jk}}$$

es el potencial en el punto donde se sitúa la carga  $j$  debido al resto de las cargas. Teniendo en cuenta la relación anterior, la expresión (5.1) queda de la forma:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j \quad (5.2)$$

La ecuación (5.2) expresa la energía electrostática del sistema de cargas puntuales.

### 5.1.1.2 Energía de una distribución continua de cargas

Cuando se trata de una distribución continua de cargas, las cargas puntuales se sustituyen por la carga elemental  $\rho dv'$ , si se trata de distribución volumétrica o  $\sigma ds'$  si es superficial. El potencial en cada punto, como veíamos en la lección dedicada al potencial, es:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

La expresión resultante para la distribución continua se obtiene sustituyendo en la ecuación (5.2) el sumatorio por la integral de volumen o superficie, las cargas puntuales por  $\rho dv'$  o  $\sigma ds'$ , y  $V_j$  por el potencial indicado antes, de forma que la energía electrostática en este caso es:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r})dv + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r})V(\mathbf{r})ds \quad (5.3)$$

### 5.1.1.3 Energía de un sistema de conductores cargados

Un sistema de conductores se puede considerar como un caso particular del anterior, si consideramos que en un conductor toda la carga se distribuye sobre la superficie y dicho conductor es un volumen equipotencial.

Para cada conductor  $j$ ,

$$\frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r})V(\mathbf{r})ds = \frac{1}{2}Q_jV_j$$

Como  $\rho = 0$ , la integral correspondiente es nula. Si se trata de  $N$  conductores,

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N Q_jV_j \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) expresa la energía electrostática de un sistema de conductores.

## 5.1.2 ENERGÍA EN FUNCIÓN DE LOS VECTORES DE CAMPO

Con frecuencia interesa calcular la energía electrostática mediante los vectores de campo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ . Para obtener una expresión de la energía en función de dichos vectores se parte de la ecuación (5.3). Teniendo en cuenta que  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  y  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \sigma$ ; si utilizamos la relación vectorial  $\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V\nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla V$  e integramos la expresión resultante sobre todo volumen o superficie en que exista campo, encontramos que,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}dv \quad (5.5)$$

El volumen de integración, en general ocupa todo el espacio; en las zonas donde los campos se anulan la contribución será nula.

Cuando se aplique la ecuación (5.5) a campos producidos por sistemas de cargas en los que interviene alguna carga puntual, debe restarse la energía propia de la carga, o energía de creación de la carga, que es infinita.

Un ejemplo es el de una carga puntual aislada situada en el origen de coordenadas. El trabajo realizado para trasladar dicha carga desde el infinito es nulo, ya que no existe campo que se oponga al movimiento. Aplicando

la ecuación (5.5) nos da una energía infinita,  $\mathbf{E}$  es infinito para  $r = 0$ , que corresponde a la energía propia de la carga.

Se denomina densidad de energía electrostática al término que aparece en el integrando de la ecuación (5.5),

$$\frac{dW_e}{dv} = w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (5.6)$$

### 5.1.3 FUERZA Y PRESIÓN ELECTROSTÁTICA

#### 5.1.3.1 Sistemas aislados

La fuerza y momento están relacionados con la energía del sistema, ya que el trabajo mecánico es igual a la variación de energía en el sistema con signo negativo,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dW_e$$

lo que es consecuencia de la conservación de energía. De la ecuación anterior se deduce que,

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e \quad (5.7)$$

Si en lugar de un movimiento sobre un camino, se trata de un giro sobre un eje,

$$dW = T d\theta = N d\theta = -dW_e$$

En los sistemas aislados se conserva la carga, por lo que se suelen expresar las componentes de fuerza y par de la siguiente forma:

$$F_x = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q ; F_y = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial y}\right)_Q ; F_z = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial z}\right)_Q \quad (5.8)$$

$$N_i = T_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \theta_i}\right)_Q ; (i = 1, 2, 3) \quad (5.9)$$

#### 5.1.3.2 Sistemas no aislados

Si un sistema de conductores está unido a unas baterías que proporcionan un energía  $dW_b$ , la conservación de la energía requiere que,

$$dW = dW_b - dW_e$$

Se demuestra que la energía que suministran las baterías es  $2dW_e$ , por lo que en este caso,

$$\mathbf{F} = \nabla W_e \quad (5.10)$$

Las componentes de fuerza y par, dado que las baterías mantienen los conductores a potencial constante, son:

$$F_x = \left( \frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_V ; F_y = \left( \frac{\partial W_e}{\partial y} \right)_V ; F_z = \left( \frac{\partial W_e}{\partial z} \right)_V \quad (5.11)$$

$$N_i = T_i = \left( \frac{\partial W_e}{\partial \theta_i} \right)_V ; (i = 1, 2, 3) \quad (5.12)$$

### 5.1.3.3 Presión sobre la superficie de un conductor cargado

Para calcular la fuerza elemental  $\Delta F$  sobre una superficie  $\Delta S$  de un conductor cargado, suponemos que la superficie del conductor se desplaza un distancia  $dx$  en la dirección normal a la citada superficie; como consecuencia de ese desplazamiento la energía disminuye en,

$$dW_e = -\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dx \Delta S$$

ya que dentro del conductor el campo es nulo. Aplicando la primera de las ecuaciones (5.8), suponemos sistema aislado, tendremos que,

$$\Delta F = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \Delta S$$

La presión sobre dicha superficie será:

$$p = \frac{|\Delta F|}{\Delta S} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (5.13)$$

### 5.1.3.4 Presión sobre la superficie que separa dos dieléctricos

Si procedemos de una manera similar a como hemos operado en el apartado anterior, y tenemos en cuenta la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  y la de las normales de  $\mathbf{D}$ , (suponemos  $\sigma = 0$  en la superficie), llegamos a la siguiente relación para la fuerza elemental,

$$\Delta F = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \Delta S$$

La presión será,

$$p = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \quad (5.14)$$

Donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son las respectivas permitividades de los dos medios,  $E_t$  es la componente tangencial de  $\mathbf{E}$  y  $D_n$  la normal de  $\mathbf{D}$ .

## 5.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 5.1

Disponemos cuatro cargas como indica la figura P5.1

- 1) Calcular la energía electrostática de la distribución.
- 2) Desplazamos la carga 3 una distancia  $d/2$  hacia la izquierda, manteniendo fijas las restantes cargas. ¿Es más estable la disposición anterior que esta?

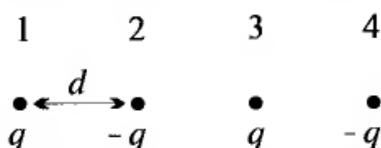


Figura P5.1

#### Solución

No se tiene en cuenta la energía propia de las cargas.

1)

Calculamos la energía electrostática del sistema mediante la ecuación (5.1), que en este caso se expresa de la forma siguiente:

$$W_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( 2 \left( -\frac{q^2}{d} + \frac{q^2}{2d} - \frac{q^2}{3d} \right) + 2 \left( -\frac{q^2}{d} + \frac{q^2}{2d} \right) - 2\frac{q^2}{d} \right)$$

$$W_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{14}{6} \frac{q^2}{d}$$

2)

El desplazamiento de la carga 3 hacia la izquierda supone una modificación de la energía, cuyo valor se calcula utilizando la misma expresión que en el caso anterior:

$$W'_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( -2\frac{q^2}{d} + 2\frac{2q^2}{3d} - 2\frac{q^2}{3d} - 2\frac{2q^2}{d} + 2\frac{q^2}{2d} - 2\frac{2q^2}{3d} \right)$$

$$W'_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{17}{6} \frac{q^2}{d}$$

Comparando los valores de  $W_e$  y  $W'_e$  podemos observar que la segunda distribución tiene una energía más negativa que la primera, por tanto es más estable o se aproxima a un punto más estable.

### PROBLEMA 5.2

Disponemos un sistema de cargas como indica la figura P5.2.

- 1) Calcular la energía electrostática del sistema.

2) Si la carga  $2q$  sufre un desplazamiento  $z = L/2$ , suponiendo que las otras cargas no se mueven, calcular la variación de energía que experimenta el sistema de cargas.

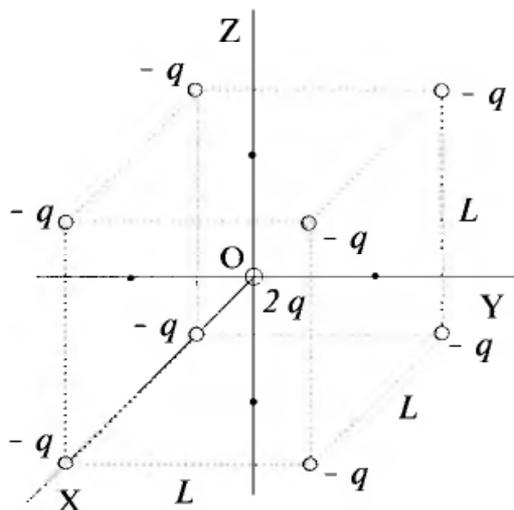


Figura P5.2

**Solución**

1)

La energía del sistema es igual al trabajo necesario para disponer las cargas como están situadas en la figura. No se tiene en cuenta la energía de creación de dichas cargas.

Para calcular la energía del sistema utilizamos la ecuación (5.1). En este caso:

$$W_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( -16 \frac{2q^2}{(1/2)L\sqrt{3}} + 24 \frac{q^2}{L} + 8 \frac{q^2}{L\sqrt{3}} + 24 \frac{q^2}{L\sqrt{2}} \right)$$

$$W_e \simeq 4,32 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L}$$

2)

La variación de energía se debe sólo a la modificación de la posición relativa de la carga  $2q$  con respecto a las cargas que están situadas en los vértices del cubo.

$$\Delta W_e = W'_e - W_e$$

Donde  $W'_e$  es la energía del sistema cuando se desplace la carga  $2q$ .

Para calcular esta energía tenemos en cuenta  $W_e$  ya que el único término que se modifica es el primero que corresponde a la interacción entre la carga  $2q$  y el resto de las cargas dispuestas en los vértices.

$$W'_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( 8 \left( -\frac{2q^2}{(1/2)\sqrt{2}L} - \frac{2q^2}{\sqrt{3}/2L} \right) + 24 \frac{q^2}{L} + 8 \frac{q^2}{L\sqrt{3}} + 24 \frac{q^2}{L\sqrt{2}} \right)$$

por tanto,

$$\Delta W_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \left( 8 \left( -\frac{2q^2}{(1/2)\sqrt{2}L} - \frac{2q^2}{\sqrt{3/2}L} \right) + 16 \frac{2q^2}{(1/2)L\sqrt{3}} \right)$$

$$\Delta W_e \simeq 0,63 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q^2}{L}$$

De la expresión anterior se deduce que la energía del sistema con la carga desplazada es mayor que cuando  $2q$  está en el centro del cubo, por tanto es más estable el sistema en la posición inicial de las cargas.

### PROBLEMA 5.3

Dado el sistema de cargas indicado en la figura P5.3. calcular la energía del sistema cuando la carga  $Q = -4q$  está en las dos posiciones siguientes: 1) en el punto  $(0, 0, a)$ ; 2) en el punto  $(0, 0, 0)$ . ¿Permanecerá estable en alguna de las dos posiciones? Razonar la respuesta.

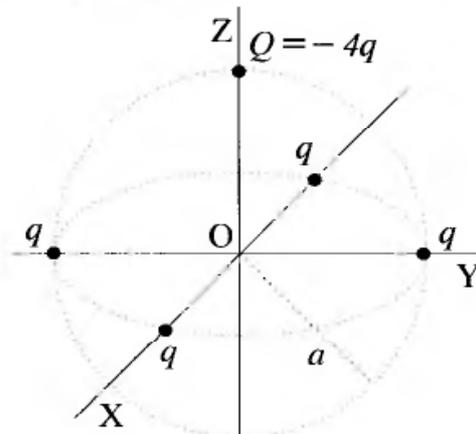


Figura P5.3

#### Solución

1) Punto  $(0, 0, a)$

Calculamos la energía de un sistema de cargas mediante la ecuación (5.1). Obtenemos primero el término que corresponde a las cuatro cargas sobre el plano XY. Vemos que hay dos interacciones según las diagonales y 4 según los lados del cuadrado que forman las cuatro cargas. Entonces tenemos,

$$W_o = \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \left( 8 \frac{q^2}{a\sqrt{2}} + 4 \frac{q^2}{2a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} (2\sqrt{2} + 1) \frac{q^2}{a}$$

Ahora hay que añadir la energía de interacción de la carga  $Q$  con las demás,

$$W_Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \left( 8 \frac{(-4q)q}{a\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} 8\sqrt{2} \frac{q^2}{a}$$

Entonces la energía total es,

$$W(0, 0, a) = W_o + W_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q^2}{a} \left( (2\sqrt{2} + 1) - 8\sqrt{2} \right)$$

$$W(0, 0, a) \simeq -7,485 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q^2}{a}$$

2) Punto (0, 0, 0)

La parte  $W_o$  no cambia y sólo tenemos que volver a calcular  $W_Q$ ,

$$W'_Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \left( 8 \frac{(-4q)q}{a} \right) = -\frac{16}{4\pi\epsilon_o} \frac{q^2}{a}$$

Luego,

$$W(0, 0, 0) = W_o + W'_Q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o a} \left( (2\sqrt{2} + 1) - 16 \right) \simeq -12,172 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q^2}{a}$$

$$W(0, 0, 0) \simeq -12,172 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q^2}{a}$$

Vemos que  $W(0, 0, 0) < W(0, 0, a)$

En cualquier punto del eje Z,

$$W''_Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \left( 8 \frac{(-4q)q}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{16}{\sqrt{1 + z^2}} \frac{q^2}{a}$$

Como  $W''_Q < W'_Q$  se deduce que  $W(0, 0, 0) < W(0, 0, z)$  para cualquier valor  $z \neq 0$ , por lo que el punto (0, 0, 0) es un mínimo de energía y por tanto la partícula con carga  $Q = -4q$  permanecerá estable en ese punto.

#### PROBLEMA 5.4

Calcular el potencial en los puntos A, O y B indicados en la figura P5.4. debido a las distribuciones lineales de carga  $-\lambda$  y  $\lambda$  dispuestas sobre sendas circunferencias de radio  $a$  y centros sobre el eje Y en los puntos A y B respectivamente.

¿En cual de los tres puntos indicados estará una carga puntual  $q$  en una posición más estable? Razonar la respuesta.

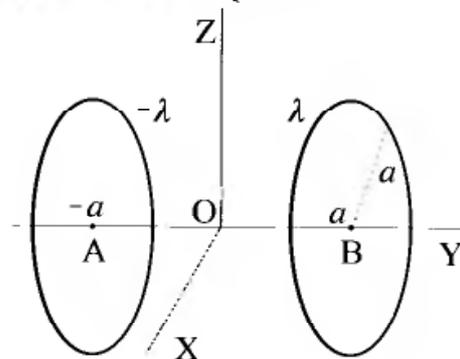


Figura P5.4

**Solución**

Calculamos de manera genérica el potencial en un punto del eje debido a una distribución lineal como la indicada en el problema. Este potencial debido a una de las circunferencias es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\varphi}{\sqrt{y^2 + a^2}} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_o \sqrt{y^2 + a^2}}$$

El potencial en los puntos A O y B será

$$V(A) = V_{-\lambda}(A) + V_{\lambda}(A) = \frac{-\lambda}{2\epsilon_o} + \frac{\lambda a}{2\epsilon_o \sqrt{(a+a)^2 + a^2}} = -\frac{\lambda}{2\epsilon_o} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$V(0) = V_{-\lambda}(0) + V_{\lambda}(0) = \frac{-\lambda\sqrt{2}}{4\epsilon_o} + \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\epsilon_o} = 0$$

$$V(B) = V_{-\lambda}(B) + V_{\lambda}(B) = \frac{-\lambda a}{2\epsilon_o \sqrt{(a+a)^2 + a^2}} + \frac{\lambda}{2\epsilon_o} = \frac{\lambda}{2\epsilon_o} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

La energía de una carga puntual  $q$  en cada uno de estos puntos vendría dada por

$$W = qV$$

Los cálculos realizados muestran que en el punto A la carga tiene una energía potencial menor y por tanto es el punto más estable.

**PROBLEMA 5.5**

Partiendo de una esfera de radio  $a$ , que tiene una carga  $Q$  en la superficie, se inicia la acumulación de carga sobre una superficie esférica de radio  $b$  ( $b > a$ ), concéntrica con la anterior.

1) Calcular el trabajo realizado para acumular sobre la superficie esférica de radio  $b$  una carga  $q = Q/2$ .

2) Comprobar que este trabajo es igual a la variación de energía electrostática calculada mediante la ecuación (5.5).

**Solución**

1)

El trabajo total se obtiene sumando el trabajo realizado para acumular la carga  $Q/2$  sobre una esfera de radio  $b$ , que está a un potencial  $V_1$  debido a la carga  $Q$  sobre la esfera de radio  $a$ , más el trabajo necesario para acumular la carga  $Q/2$  sobre la esfera de radio  $b$ , teniendo en cuenta su propia carga.

$$W_1 = \frac{Q}{2} V_1$$

Trabajo para llevar  $Q/2$  al potencial  $V_1$  debido a la carga  $Q$  sobre la esfera de radio  $a$ .

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{2} V_2$$

Trabajo para llevar  $Q/2$  al potencial  $V_2$  debido a la carga  $Q/2$  sobre la esfera de radio  $b$  cuando suponemos que no existe carga sobre la esfera de radio  $a$ .

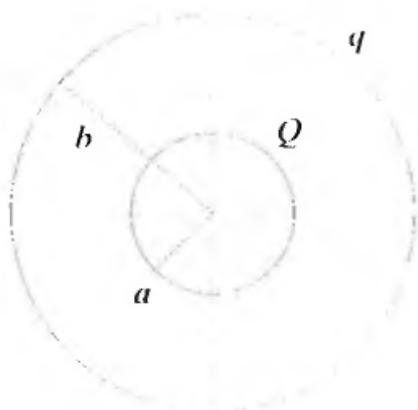


Figura P5.5

Los respectivos potenciales son:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b} \quad ; \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2b}$$

La energía total será,

$$W_r = W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8} \frac{Q^2}{b}$$

$$W_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5}{8} \frac{Q^2}{b}$$

2)

Para calcular la integral que nos proporciona la energía antes y después de acumular la carga, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

a) En la zona  $0 \leq r \leq b$  el campo eléctrico no cambia, ya que sólo depende de la carga  $Q$  sobre la esfera de radio  $a$ ; como consecuencia en esta zona no varía la energía en el proceso de acumulación de carga.

b) Los campos antes y después del proceso de acumulación, obtenidos aplicando el teorema de Gauss, son respectivamente:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{2r^2} \mathbf{u}_r$$

Antes de la acumulación

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon_o \int E^2 dv = \frac{1}{2} \varepsilon_o \int \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o} \int_b^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$W_{e1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q^2}{2b}$$

Después de la acumulación,

$$W_{e2} = \frac{1}{2} \varepsilon_o \int \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{3Q}{2r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{9}{4} \int_b^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$W_{e2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{9Q^2}{8b}$$

$$W'_e = W_{e2} - W_{e1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q^2}{b} \left( \frac{9}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{5Q^2}{8b}$$

Valor que coincide con el calculado para el trabajo realizado en el proceso de acumulación.

### PROBLEMA 5.6

Tenemos un sistema de cargas constituido por una carga  $Q$  distribuida uniformemente sobre una esfera de radio  $R$ , y otra carga  $-Q$  sobre la capa esférica, concéntrica con la esfera, de radio  $R' = 5R$  y espesor despreciable frente a  $R$ .

- 1) Calcular el campo en función del radio  $r$ .
- 2) Calcular la energía electrostática del sistema.
- 3) Si quitamos la mitad de la carga  $-Q$  de la capa esférica, ¿cual será la variación de energía electrostática del sistema?

### Solución

#### 1) Campo eléctrico

Dado que el espesor de la capa es despreciable frente a  $R$ , podemos suponer la carga  $-Q$  concentrada en una superficie esférica de radio  $R' = 5R$ .

#### 1.1) Campo en la zona $0 \leq r \leq R$

Teniendo en cuenta la simetría esférica de la distribución, aplicamos el teorema de Gauss con,

$$\rho = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}$$

Para una superficie de radio  $r < R$ ,

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_o} \frac{Q}{(4/3)\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{R^3} r$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{R^3} r \mathbf{u}_r \quad 0 \leq r \leq R$$

1.2) Campo en la zona  $R \leq r \leq 5R$ 

Procedemos aplicando el teorema de Gauss sobre una superficie esférica de radio  $r > R$  y  $< 5R$ . En este caso la carga encerrada es  $Q$ , luego el campo se calcula de la forma siguiente:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad R \leq r \leq 5R$$

1.3) Campo en la zona  $r \geq 5R$ 

Ahora la carga que se encierra por una superficie esférica de radio  $r > 5R$  es cero, ya que en la capa existe la misma carga que en la esfera de radio  $R$ , por tanto el campo será nulo,

$$\mathbf{E}_3 = 0 \quad r \geq 5R$$

## 2) Energía electrostática

Como el campo para  $r > 5R$  es nulo, los límites de la integral serán 0,  $R$  y  $R$ ,  $5R$ , que son las zonas donde existe campo.

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \int_0^R E_1^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{5R} E_2^2 4\pi r^2 dr \right)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \int_0^R \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{5R} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \right)$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \left[ \frac{r^5}{5R^6} \right]_0^R + \left[ -\frac{1}{r} \right]_R^{5R} \right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{5R} - \frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right)$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

3) Energía después de quitar la carga  $-Q/2$ 

Cuando se quita la carga  $-Q/2$  de la superficie de radio  $5R$ , el campo en las zonas donde  $r \leq 5R$  no varía, por tanto no varía la densidad de energía. Por otra parte, ahora el campo no es nulo para  $r > 5R$ , ya que las cargas de la capa no compensan a las de la esfera de radio  $R$ .

El campo para  $r > 5R$  es:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left( Q - \frac{Q}{2} \right) \rightarrow E_r = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

La variación de energía electrostática es,

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \int_{5R}^{\infty} \epsilon_0 E_3^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \int_{5R}^{\infty} \epsilon_0 \left( \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q}{32\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{5R}^{\infty}$$

$$\Delta W_e = \frac{Q}{160\pi\epsilon_o R}$$

El aumento de energía del sistema  $\Delta W_e$  es el trabajo que se necesita para arrancar la carga  $-Q/2$  de la capa esférica.

### PROBLEMA 5.7

Una carga eléctrica  $Q$  se distribuye sobre una esfera dieléctrica de radio  $R$  y permitividad  $\epsilon$ , de forma que las densidades de carga sean:

$$\rho = \rho_o \left( \frac{R}{r} \right) \text{ para } 0 \leq r \leq R \text{ y } \rho = 0 \text{ para } r > R$$

- 1) Calcular  $\rho_o$  en función de  $Q$  y  $R$ .
- 2) Calcular la energía electrostática de las dos formas siguientes:
  - 1ª Mediante la expresión (5.5).
  - 2ª Mediante la expresión  $W_e = (1/2) \int \rho V(r) dv$ .

### Solución

#### 1) Densidad de carga

El cálculo de  $\rho_o$  se hace de la forma siguiente:

$$Q = \int_V \rho dv = \rho_o R \int_0^R \frac{1}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho_o R^3$$

$$\rho_o = \frac{Q}{2\pi R^3}$$

#### 2) Energía electrostática

2.1) En primer lugar calculamos el campo eléctrico debido a la distribución de carga.

Se distinguen dos zonas, una en la que  $0 \leq r \leq R$  y la otra para  $r > R$ .

Dada la simetría esférica de la distribución aplicamos el teorema de Gauss.

Para  $0 \leq r \leq R$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon} \int_0^r \rho_o \frac{R}{r} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{\epsilon} 2\pi \rho_o R r^2$$

$$E_r = \frac{\rho_o R}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon R^2} \rightarrow \mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon R^2} \mathbf{u}_r$$

Para  $r > R$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_o} Q = \frac{2\pi}{\epsilon_o} \rho_o R^3$$

Despejando  $E_r$  tenemos,

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r^2} \rightarrow \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r^2} \mathbf{u}_r$$

La energía electrostática se calcula de la forma siguiente:

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^R \left( \frac{Q}{4\pi \varepsilon R^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \varepsilon_o \int_R^\infty \left( \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$W_e = \frac{1}{6} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon R} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_o R} = \frac{Q^2}{4\pi R} \left( \frac{1}{6\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon_o} \right)$$

$$W_e = \frac{1}{24\pi} \frac{\varepsilon_o + 3\varepsilon}{\varepsilon \varepsilon_o} \frac{Q^2}{R}$$

2.2) Comenzamos por calcular el potencial debido a la distribución de carga. Utilizaremos el campo calculado en el apartado anterior, y tomamos como referencia de potencial  $V(\infty) = 0$ .

Para  $r > R$

$$V_2(r) - V(\infty) = - \int_\infty^r \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o r}$$

$$V_2(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o r}$$

Para  $0 \leq r \leq R$

Teniendo en cuenta la continuidad del potencial en  $r = R$ , es decir, que.

$$V_1(R) = V_2(R) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o R}$$

$$V_1(r) - V_2(R) = - \int_R^r \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon R^2} (R - r)$$

por tanto,

$$V_1(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o R} + \frac{Q}{4\pi \varepsilon R^2} (R - r)$$

La energía calculada mediante  $\rho$  y  $V$ , en este caso nos permite considerar sólo la zona  $r \leq R$ , ya que para  $r > R$  la densidad de carga  $\rho = 0$ . Poniendo los valores de  $\rho$  y  $V_1(r)$  tenemos que,

$$W'_e = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{Q}{2\pi R^3} \frac{R}{r} \left( \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o R} + \frac{Q}{4\pi \varepsilon R^2} (R - r) \right) 4\pi r^2 dr$$

$$W'_e = \frac{1}{24\pi} \frac{\varepsilon_o + 3\varepsilon}{\varepsilon \varepsilon_o} \frac{Q^2}{R}$$

Podemos comprobar que  $W'_e = W_e$  como cabía esperar.

### PROBLEMA 5.8

Disponemos de un condensador plano, de espesor  $d$  y cuyas caras tienen un lado de longitud  $L$ , figura P5.8. El dieléctrico que existe entre las placas tiene una permitividad  $\varepsilon = \varepsilon_o(1 + y/L)$ . Se aplica al condensador una d.d.p  $V_o$ .

Se desprecian los efectos de borde.

1) Calcular los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ .

2) Calcular la energía almacenada en el condensador.

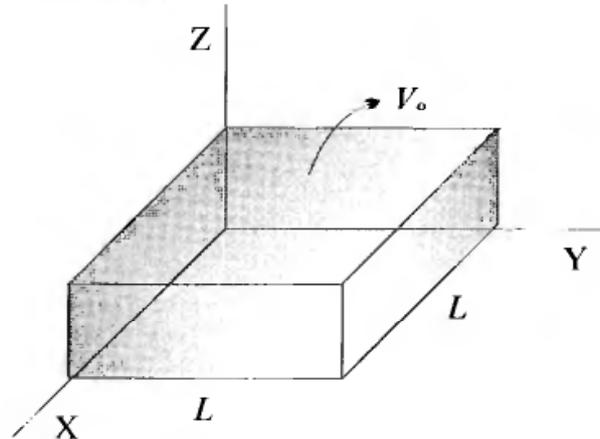
**Solución**

1) *Vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$*

En la solución de este problema debemos tener en cuenta las condiciones que debe cumplir el campo eléctrico, que son:

$$1^a \int_0^d \mathbf{E} \cdot dz \mathbf{u}_z = V_o$$

2<sup>a</sup> Las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  son continuas sobre todos los planos perpendiculares al eje Y.



**Figura P5.8**

De las dos condiciones anteriores se deduce que el campo es uniforme en la zona entre placas e igual a

$$\mathbf{E} = -\frac{V_o}{d} \mathbf{u}_z$$

Utilizando la ecuación constitutiva  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , calculamos  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D} = -\epsilon \frac{V_o}{d} \mathbf{u}_z = -\epsilon_o \left(1 + \frac{y}{L}\right) \frac{V_o}{d} \mathbf{u}_z$$

2) *Energía*

Calculamos la energía mediante la ecuación (5.5) y los valores obtenidos anteriormente para  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ ,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \left(\frac{V_o}{d}\right)^2 \epsilon_o \int_0^L Ld \left(1 + \frac{y}{L}\right) dy$$

$$W_e = \frac{3}{4} \epsilon_o L^2 \frac{V_o^2}{d}$$

### PROBLEMA 5.9

Sea un condensador cilíndrico indefinido de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ . El espacio entre el conductor interno y el externo está ocupado por

un material de permitividad  $\varepsilon = \varepsilon_o(b/r)$ . Los conductores se encuentran conectados a una batería de manera que la d.d.p. entre ellos es  $V_o$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en el espacio entre conductores y la energía electrostática por unidad de longitud.

### Solución

#### 1) Cálculo de los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$

Aplicamos el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de radio  $a < r < b$  y longitud  $L \gg a, b$ .

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D 2\pi r L = Q$$

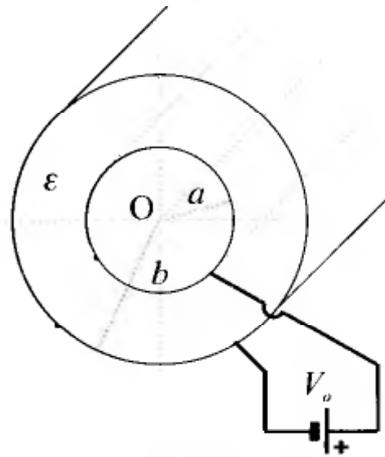


Figura P5.9

La carga libre es la que aporta la batería; por tanto, se distribuye uniformemente por las superficies metálicas, ya que el medio dieléctrico suponemos que no contiene carga libre. En nuestro caso  $Q$  se refiere a la carga encerrada por una superficie gaussiana en cuyo interior está el electrodo cilíndrico de radio  $a$ . Podemos considerar una cierta densidad superficial de carga libre,  $\sigma$ , con lo que  $Q = \sigma 2\pi a L$ . Por tanto,

$$\mathbf{D}(r) = \frac{Q}{2\pi r L} \mathbf{u}_r = \sigma \frac{a}{r} \mathbf{u}_r$$

Mediante la aplicación de  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  obtenemos,

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}(r)}{\varepsilon_o(b/r)} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_o b} \mathbf{u}_r$$

que es constante. Puesto que estamos aplicando una d.d.p., la circulación de  $\mathbf{E}$  a lo largo de cualquier camino entre  $a$  y  $b$  tiene que ser igual a  $V_o$ .

$$\int_a^b \mathbf{E}(r) \cdot \mathbf{u}_r dr = V_o$$

$$V_o = E (b - a) = \frac{\sigma a (b - a)}{\varepsilon_o b}$$

Despejamos  $\sigma$  en función de la tensión  $V_o$

$$\sigma = V_o \varepsilon_o \frac{b}{a(b-a)}$$

Sustituyendo el valor de  $\sigma$  obtenemos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ .

$$\mathbf{D}(r) = \frac{V_o \varepsilon_o}{r} \frac{b}{b-a} \mathbf{u}_r ; \quad \mathbf{E}(r) = \frac{V_o}{b-a} \mathbf{u}_r$$

2) *Energía electrostática*

Calculamos la energía  $W_e$  aplicando la ecuación (5.5)

$$W_e = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv$$

Tomamos  $dv = 2\pi L r dr$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{V_o \varepsilon_o}{r} \frac{b}{b-a} \frac{V_o}{b-a} 2\pi L r dr = \frac{1}{2} \frac{V_o^2}{(b-a)^2} b \varepsilon_o 2\pi L \int_a^b dr$$

$$W_e = \varepsilon_o b \pi \frac{V_o^2}{(b-a)} L$$

La energía por unidad de longitud  $W_e/L$  será.

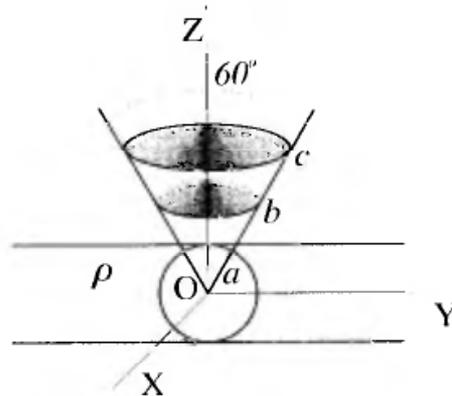
$$\frac{W_e}{L} = \frac{\pi \varepsilon_o b}{b-a} V_o^2$$

### PROBLEMA 5.10

Tenemos una distribución de carga uniforme  $\rho$ , sobre una placa de espesor  $2a$ , menos en el hueco esférico de radio  $a$  que está vacío (véase la figura P5.10). La placa se supone indefinida en las direcciones X e Y.

Calcular la densidad de energía electrostática. Obtener la energía electrostática en el volumen formado por el sector de capa esférica que resulta de la intersección entre el cono de ángulo  $60^\circ$  y las esferas de radio  $b = 2a$  y  $c = 3a$ .

**Solución**



**Figura P5.10**

Calculamos el campo eléctrico para  $z > a$  aplicando el principio de superposición.

El sistema se comporta como una placa de espesor  $2a$  y densidad  $\rho$  más un esfera de centro en O y radio  $a$  con una densidad de carga  $-\rho$ .

En primer lugar calculamos el campo producido por una placa de espesor  $2a$  y densidad de carga  $\rho$ .

Aplicamos el teorema de Gauss a un cilindro de altura  $h > 2a$  y base  $S$

$$\int \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$Q = \rho V = \rho(2a S)$$

$$2E_1 S = \frac{1}{\epsilon_0} \rho 2a S$$

de donde

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \mathbf{u}_z$$

En segundo lugar, calculamos el campo producido por la esfera de radio  $a$  y densidad de carga  $-\rho$ .

Aplicamos el teorema de Gauss a una esfera de radio  $r > a$

$$\int \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} (-\rho) \frac{4}{3} \pi a^3$$

de donde

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

El campo eléctrico en la región  $z > a$  es

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{E}_T = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \mathbf{u}_z - \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

La densidad de energía electrostática viene dada por,

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2$$

En este caso

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

y

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)$$

Sustituyendo los valores de los campos tendremos,

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o \left( \left( \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \right)^2 + \left( \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o r^2} \right)^2 + 2 \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o r^2} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r \right)$$

Dado que  $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r = \cos \theta$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o \left( \left( \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \right)^2 + \left( \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o r^2} \right)^2 + 2 \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o r^2} \cos \theta \right)$$

La energía electrostática viene dada por

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o \int_V \mathbf{E}_T^2 dv = \int_V w_e dv$$

Sustituyendo  $w_e$ , teniendo en cuenta que  $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ , y que los límites de integración para las variables son respectivamente:

$\varphi$  varía entre 0 y  $2\pi$ ,  $r$  varía de  $2a$  a  $3a$  y  $\theta$  entre 0 y  $30^\circ$ .

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{2a}^{3a} \left( \left( \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \right)^2 + \left( \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o r^2} \right)^2 \right) r^2 dr \int_0^{\pi/6} \sin \theta d\theta \right. \\ \left. + \int_{2a}^{3a} 2 \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o r^2} r^2 dr \int_0^{\pi/6} \cos \theta \sin \theta d\theta \right\}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o 2\pi \left\{ \left( \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \right)^2 \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{2a}^{3a} [-\cos \theta]_0^{\pi/6} + \left( \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o} \right)^2 \left[ -\frac{1}{r} \right]_{2a}^{3a} [-\cos \theta]_0^{\pi/6} \right. \\ \left. + \frac{\rho a}{\varepsilon_o} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o} [r]_{2a}^{3a} [\sin^2 \theta]_0^{\pi/6} \right\}$$

$$W_e = \frac{(\rho a)^2}{\varepsilon_o} \pi \left\{ \frac{19a^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{a^4}{9} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{a^2}{3} (a) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}$$

$$W_e = \frac{(\rho a)^2}{\varepsilon_o} \pi a^3 \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{19}{3} + \frac{1}{54}\right) + \frac{1}{12} \right\}$$

Realizando operaciones queda,

$$W_e = \frac{\rho^2 a^5 \pi}{\varepsilon_o} \left( \frac{695}{108} - \frac{343}{108} \sqrt{3} \right)$$

La fracción de la energía del sistema que obtenemos calculando sobre el volumen considerado será:

$$W_e \simeq 2,935 \frac{\rho^2 a^5}{\varepsilon_o}$$

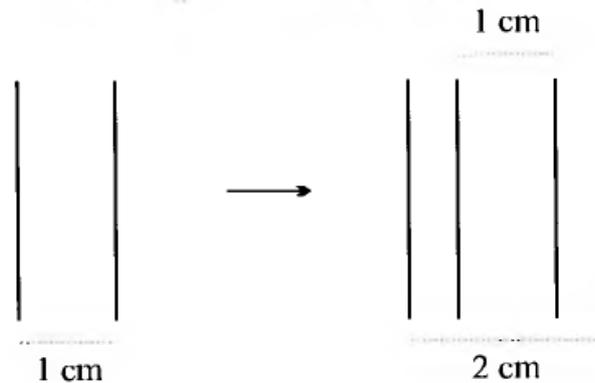
**PROBLEMA 5.11**

Un dieléctrico de permitividad  $\varepsilon = 4\varepsilon_o$  se coloca entre las placas de un condensador de superficie  $S = 1\text{ cm}^2$ , su espesor es  $d = 1\text{ cm}$ , y ocupa todo el espacio entre placas. Cargamos el condensador a una d.d.p.  $V = 1000$  voltios.

Suponemos despreciables los efectos de borde.

1) Calcular la energía electrostática en el condensador.

2) Desconectada la fuente de 1000 V, separamos las placas hasta que su distancia sea 2cm, véase la figura P5.11. ¿Qué d.d.p. existe ahora entre las placas? ¿Cuál ha sido la energía necesaria para realizar el proceso?



**Figura P5.11**

**Solución**

1)

En primer lugar calculamos el campo aplicando la condición que debe cumplir, es decir, aplicando  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o$ .

$$E = \frac{V_o}{d} = \frac{1000}{0,01} = 10^5 \quad [\text{V/m}]$$

La energía será,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

El vector  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = 4\varepsilon_o \mathbf{E}$ . El volumen es  $Sd = 10^{-6} \text{ m}^3$

$$W_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} (Sd) = \frac{1}{2} 4\varepsilon_o (10^5)^2 10^{-6}$$

$$W_e = 2\varepsilon_o 10^4 = 2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^4 \simeq 1,77 \times 10^{-7} \quad [\text{J}]$$

2)

Las placas se desconectan del generador, por lo que en el proceso se conserva la carga  $Q$ , y dadas las condiciones del problema, las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$  son continuas,

$$D = D_{n1} = D_{n2} = \frac{Q}{S}$$

Antes de desconectar la pila y separar las placas, es decir, con el campo obtenido en el apartado anterior, la carga sobre las placas es,

$$\frac{Q}{S} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \epsilon \frac{V_o}{d}$$

por tanto,

$$D = \epsilon \frac{V_o}{d}$$

Ahora el campo en los dos medios será:

$$E_v = \frac{D}{\epsilon_o} = \frac{\epsilon V_o}{\epsilon_o d} = 4 \frac{V_o}{d} = 4 \times 10^5 \text{ [V/m]}$$

$$E_d = \frac{D}{\epsilon} = \frac{V_o}{d} = 10^5 \text{ [V/m]}$$

La d.d.p.  $V$  en la nueva posición de las placas se obtiene de la forma siguiente:

$$V = E_d d + 2E_v \frac{d}{2} = d(E_d + E_v)$$

$$V = 10^{-2} \times 5 \times 10^5 = 5000 \text{ voltios [V]}$$

La energía necesaria para realizar el proceso es la diferencia entre la energía en la segunda posición menos la energía en la primera.

En la segunda posición de las placas,

$$W'_e = \frac{1}{2} \epsilon_o E_v^2 S 2 \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \epsilon E_d^2 S d = \frac{1}{2} S d (\epsilon_o E_v^2 + \epsilon E_d^2)$$

Sustituyendo los valores respectivos obtenemos,

$$W'_e = \frac{1}{2} 10^{-4} \times 10^{-2} \epsilon_o (16 \times 10^{10} + 4 \times 10^{10}) = \epsilon_o 10^5$$

La energía necesaria es,

$$\Delta W_e = W'_e - W_e = (10 - 2) \epsilon_o 10^4 = 8 \epsilon_o 10^4$$

$$\Delta W_e = 8,85 \times 10^{-12} \times 8 \times 10^4 = 7,08 \times 10^{-7}$$

Esta energía es la aportada desde el exterior para separar las placas.

### PROBLEMA 5.12

Un condensador plano de superficie  $S$  y espesor  $d$  se carga mediante una batería a una d.d.p.  $V_o$ . Después de cargado desconectamos la batería. Sin tocar las placas introducimos una lámina metálica de espesor  $d/2$ .

1) Calcular la densidad de energía electrostática antes y después de introducir la lámina metálica.

2) Calcular la energía total en ambos casos. ¿En qué se ha invertido la diferencia entre las dos energías?

Se desprecian los efectos de borde.

### Solución

1)

Para calcular la densidad de energía utilizaremos la ecuación (5.6). Dado que se desprecian los efectos de borde, podemos considerar el condensador como si tuviera las placas indefinidas, lo que se traduce en que el campo es uniforme en el interior del condensador y nulo en exterior.

En primer lugar calculamos los vectores de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ .

Antes de introducir el metal:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o \rightarrow E = \frac{V_o}{d}; \quad y \quad D = \epsilon_o E = \epsilon_o \frac{V_o}{d}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_o \frac{V_o^2}{d^2}$$

Al introducir una lámina metálica, permaneciendo asilado el condensador, la carga del condensador no cambia, por tanto  $\mathbf{D}$  permanece invariable, y lo mismo ocurre con  $\mathbf{E}$  en las zonas comprendidas entre lámina y placas. El campo dentro de la lámina conductora es nulo.

La densidad de energía en las zonas no ocupadas por la lámina será la misma que en el caso anterior.

2) *Energía total*

Antes de introducir la lámina,

$$W_e = \int_V w_e dv$$

$$W_e = w_e S d = \frac{1}{2} \epsilon_o S \frac{V_o^2}{d}$$

Después de introducirla los vectores de campo siguen siendo los mismos, lo único que ha cambiado es el volumen donde existen dichos campos, que se ha reducido en  $Sd/2$ , por tanto:

$$W'_e = w_e S \left(d - \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{4} \epsilon_o S \frac{V_o^2}{d}$$

La variación de energía es:

$$\Delta W_e = W_e - W'_e = \epsilon_o S \frac{V_o^2}{d} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{4} \epsilon_o S \frac{V_o^2}{d}$$

Aunque el campo no cambia, la energía disminuye ya que dentro de la lámina se anula el campo y en consecuencia la energía correspondiente al volumen ocupado. La introducción de la citada lámina lleva aparejada una disminución del potencial entre las placas del condensador,

$$V = E \frac{d}{4} + E \frac{d}{4} = \frac{1}{2} V_0$$

La diferencia de energía se ha invertido en el trabajo realizado por el campo para introducir la lámina entre las placas del condensador.

### PROBLEMA 5.13

Entre dos placas conductoras paralelas, circulares y de radio  $R$ , se introduce un disco de material deformable y permitividad  $\epsilon$ . Las caras del disco permanecen siempre en contacto con las placas conductoras. Inicialmente el disco tiene un radio  $R_0$  y espesor  $d_0$ .

Manteniendo fija la placa inferior, existe una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre la superior (véase la figura P5.13), de tal manera que el espesor de disco decrece y aumenta su sección. Durante el proceso el disco no pierde material, su sección permanece circular y las placas se mantienen a una d.d.p.  $V_0$ .

Calcular la fuerza de naturaleza electrostática sobre las placas conductoras.

Suponemos despreciables los efectos de borde y que la permitividad  $\epsilon$  no varía.

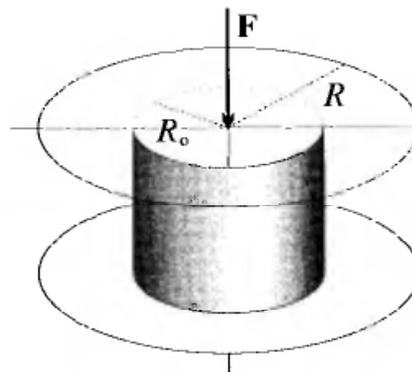


Figura P5.13

### Solución

Calculamos la fuerza electrostática a partir de la energía.

En primer lugar calculamos el campo entre las placas. Dada la estructura del sistema, las componentes tangenciales del vector  $\mathbf{E}$  son continuas en la superficie de separación entre los medios. Por otra parte, como la batería se mantiene unida a las placas, en todo momento,

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o \rightarrow E = \frac{V_o}{d}$$

De la continuidad de las componentes tangenciales se deduce que  $E$  es el valor calculado anteriormente en todos los puntos entre placas. Los valores del vector  $\mathbf{D}$  se obtienen mediante la ecuación constitutiva  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ .

Dentro del material

$$D_1 = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V_o}{d}$$

Fuera del material

$$D_2 = \varepsilon_o E = \varepsilon_o \frac{V_o}{d}$$

La energía electrostática será,

$$W_e = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 \pi r^2 d + \varepsilon_o E^2 \pi (R^2 - r^2) d) = \frac{1}{2} (\pi r^2 d E^2 (\varepsilon - \varepsilon_o) + \pi R^2 d \varepsilon_o E^2)$$

Dado que la cantidad de dieléctrico entre placas no varía,

$$\pi R_o^2 d_o = \pi r^2 d$$

Llevando la relación anterior y el valor de  $E$  a la ecuación de la energía  $W_e$ , obtenemos:

$$W_e = \frac{1}{2} \left( \pi R_o^2 d_o \frac{V_o^2}{d^2} (\varepsilon - \varepsilon_o) + \pi R^2 \frac{V_o^2}{d} \varepsilon_o \right)$$

La fuerza en este caso se calcula mediante la ecuación:

$$F = \left( \frac{\partial W_e}{\partial d} \right)_V$$

$$F = -\frac{1}{2} \left( 2\pi R_o^2 d_o (\varepsilon - \varepsilon_o) \frac{V_o^2}{d^3} + \pi R^2 \varepsilon_o \frac{V_o^2}{d^2} \right)$$

A un aumento de la distancia  $d$  corresponde una disminución de la energía, por tanto  $F$  tiene sentido contrario al aumento de la separación entre placas  $d$ , es decir, tiende a unir las placas.

### PROBLEMA 5.14

Tenemos un sistema formado por dos láminas conductoras, separadas por tres placas de espesor  $d$ . La placa central es metálica y las otras dos de material dieléctrico con permitividad  $\varepsilon = 4\varepsilon_o$ . La superficie de láminas y placas es  $S$ . Unimos láminas y placa conductora a una batería de f.e.m  $V_o$  como indica la figura P5.14.1.

- 1) Calcular la energía del sistema.
  - 2) Calcular la presión que se ejerce sobre las caras de la placa metálica.
- Se desprecian los efectos de borde.

**Nota:** Al separar las placas dieléctrica y metálica queda un espacio vacío entre ellas.

### Solución

#### 1) Energía del sistema

Calculamos la energía mediante la ecuación (5.5). Para ello necesitamos conocer los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ , que en este caso y en las placas dieléctricas son:

$$E = \frac{V_o}{d}; \quad D = \epsilon E = 4\epsilon_o \frac{V_o}{d}$$

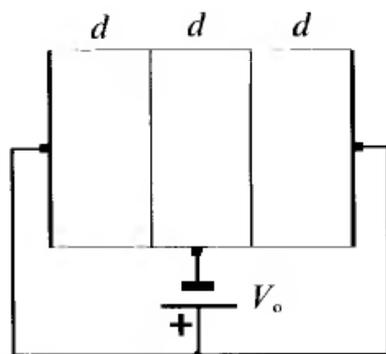


Figura P5.14.1

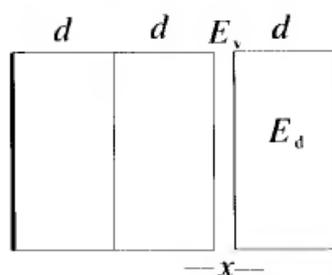


Figura P5.14.2

La energía será,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} 4\epsilon_o \frac{V_o^2}{d^2} S(d+d)$$

$$W_e = 4\epsilon_o S \frac{V_o^2}{d}$$

#### 2) Presión

Calculamos en primer lugar la fuerza sobre una de las caras y después la presión mediante  $p = F/S$ . La fuerza se obtiene mediante la relación entre fuerza y energía. En este caso la batería se mantiene unida a las láminas y placa durante el proceso, por tanto se aplica la ecuación (5.10).

Cuando separamos la placa metálica de la dieléctrica, los campos en dieléctrico y vacío deben cumplir las condiciones siguientes: (véase la figura P5.14.2)

$$D_{n1} = D_{n2} \rightarrow D_v = D_d$$

$$\epsilon_o E_v = \epsilon E_d$$

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o \rightarrow E_v x + E_d d = V_o$$

De las ecuaciones anteriores para las componentes del campo se deduce que,

$$E_v x + \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon} E_v d = V_o$$

$$E_v = \varepsilon \frac{V_o}{\varepsilon x + \varepsilon_o d} ; \quad E_d = \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon} E_v = \varepsilon_o \frac{V_o}{\varepsilon x + \varepsilon_o d}$$

Para calcular la fuerza sobre una de las caras de la placa metálica, suponemos que la parte de la energía del sistema que corresponde a la zona izquierda donde no se modifican las condiciones iniciales no varía y es  $W_o$ . La parte variable corresponde a la zona derecha y su energía es:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_o E_v^2 (S x) + \frac{1}{2} \varepsilon E_d^2 (S d)$$

Sustituyendo los valores de  $\varepsilon E_d$  y  $E_v$  tendremos,

$$W = \frac{1}{2} \left( \frac{V_o}{\varepsilon x + \varepsilon_o d} \right)^2 (\varepsilon_o \varepsilon^2 (S x) + \varepsilon \varepsilon_o^2 (S d))$$

Sustituyendo  $\varepsilon = 4\varepsilon_o$  y realizando operaciones queda:

$$W = 2V_o^2 \varepsilon_o \frac{S}{4x + d}$$

Calculamos la fuerza derivando la expresión anterior con respecto a la variable  $x$ .

$$F = \frac{d}{dx} \left( 2V_o^2 \varepsilon_o \frac{S}{4x + d} \right) = -8V_o^2 \varepsilon_o \frac{S}{(4x + d)^2}$$

Cuando la separación de las placas tiende a cero ( $x \rightarrow 0$ ), la ecuación anterior para la fuerza queda:

$$F = -8V_o^2 \varepsilon_o \frac{S}{d^2}$$

El signo menos significa que la fuerza tiende a reducir la separación  $x$ .

La presión sobre cada cara de la placa metálica central es el módulo de la fuerza dividido por la superficie  $S$  de la placa

$$p = \frac{F}{S} = 8\varepsilon_o \frac{V_o^2}{d^2}$$

### PROBLEMA 5.15

Dos placas conductoras planoparalelas, separadas por una distancia  $d = 0,2$  mm, de altura  $H$  y anchura  $L$ , se introducen en un recipiente con un líquido dieléctrico perpendicularmente a la superficie del líquido como indica la figura P5.15.1. La densidad del líquido es  $\rho_m = 1,02$  g/cm<sup>3</sup>.

Conectamos las placas conductoras a una fuente cuya d.d.p. podemos variar y medir con el voltímetro  $V$ .

Realizamos una serie de medidas de la altura  $h$  alcanzada por el líquido en función de la d.d.p.  $V$ . Los datos obtenidos son los siguientes:

$V(V)$	10	20	40	60	80
$h(\text{mm})$	0,44	1,7	7	16	28,3

1) Representar gráficamente los datos y comprobar si es aplicable la expresión teórica que se deduce para la fuerza sobre una placa dieléctrica. En caso afirmativo calcular la permitividad del líquido.

Suponemos despreciable los efectos de borde, la tensión superficial así como la variación de la permitividad con la densidad  $\rho_m$ .

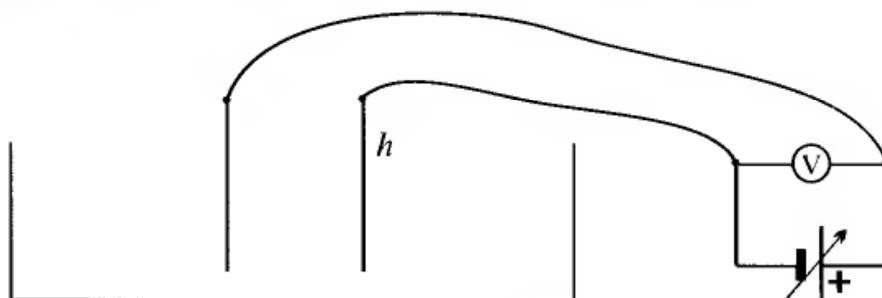


Figura P5.15.1

### Solución

En primer lugar representamos los datos sobre papel milimetrado, el resultado se muestra en la figura P5.15.2a.

La curva obtenida parece una parábola, es decir, se puede expresar analíticamente mediante una ecuación  $h = KV^2$ .

Para asegurarnos más, representamos los datos en papel logarítmico, como muestra la figura P5.15.2b; comprobamos que es prácticamente una recta, con una ordenada en el origen  $h_0$  y una pendiente  $m$  que corresponde a la expresión  $\lg h = \lg K + m \lg V$ , resultante de aplicar logaritmos a la ecuación  $h = KV^m$ .

La pendiente de la recta nos la da el exponente  $m$ . En nuestro caso calculamos  $m$  mediante la gráfica logarítmica, utilizando el triángulo ABC indicado en la figura P5.11.3.

Medimos AB y BC sobre la gráfica con una regla graduada en milímetros.

$$m = \frac{BC}{AB} = 2$$

Aplicando lo expuesto a los datos de la gráfica, deducimos que la relación entre  $h$  y  $V$  es de la forma:

$$h = KV^2 \quad (5.15.1)$$

Para comparar los datos experimentales con los teóricos, se calcula en primer lugar la fuerza sobre una placa dieléctrica de permitividad  $\epsilon$  cuando ésta se introduce entre las placas de un condensador.

En este tipo de problema la continuidad de las componentes tangenciales nos lleva a que  $E_d = E_v = V/d$ .

La energía, aplicando la ecuación (5.5), será:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \frac{V^2}{d^2} L h d + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{d^2} L (H - h) d$$

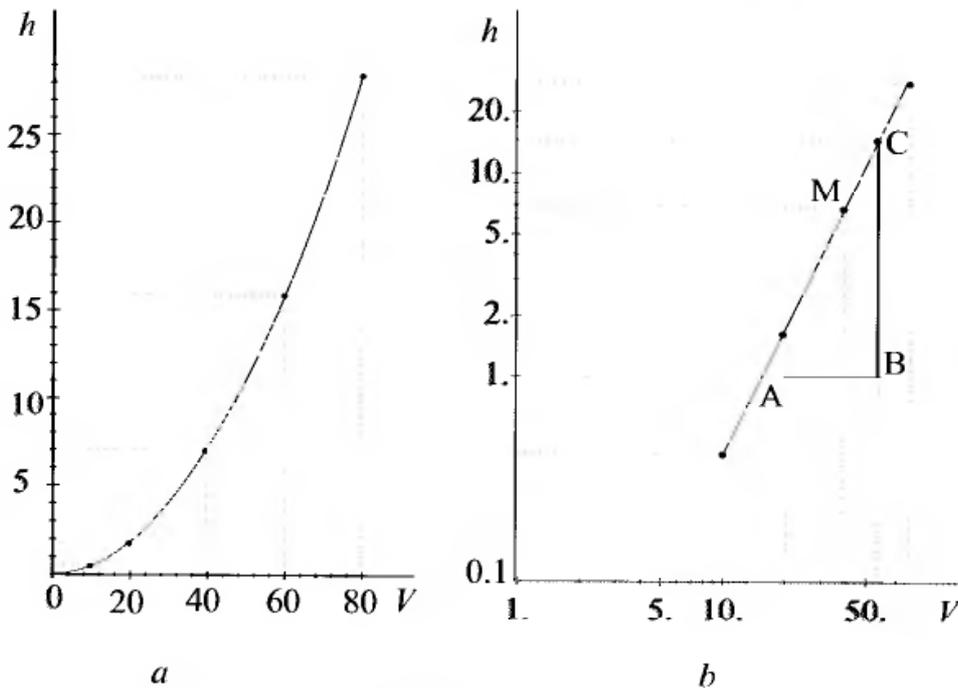


Figura P5.15.2

La fuerza se calcula utilizando la ecuación (5.10), que en nuestro caso se reduce a:

$$F = \frac{dW}{dh} = \frac{1}{2} \frac{V^2}{d} L (\epsilon - \epsilon_0)$$

Esta fuerza es la que equilibra el peso del líquido, que es:

$$P = \rho_m g h d L$$

En el equilibrio  $F = P$ , por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{V^2}{d} L (\epsilon - \epsilon_0) = \rho_m g h d L$$

De esta igualdad se despeja  $h$  y obtenemos,

$$h = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\rho_m g d^2} V^2 \tag{5.15.2}$$

Vemos que la expresión (5.15.2) deducida teóricamente es de la misma forma que la obtenida a partir de los datos experimentales, luego es aplicable la expresión para la fuerza  $F$  obtenida anteriormente.

Podemos concluir que se puede calcular la permitividad  $\varepsilon$  con los datos experimentales proporcionados y la gráfica de la figura P5.15.2b. Comparando las ecuaciones (5.15.1) y (5.15.2) vemos que,

$$K = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\rho_m g d^2}$$

de la ecuación anterior despejamos  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{2K \rho_m g d^2}{\varepsilon_o} \rightarrow \varepsilon_r = 1 + \frac{2K \rho_m g d^2}{\varepsilon_o}$$

Los datos son:

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $d = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\rho_m = 1,02 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12} \text{ (F/m)}$ .

El valor de  $K$  lo calculamos tomando el punto M de la gráfica indicada en la figura P5.11.2b. En dicho punto  $h = 7 \text{ mm} = 7 \times 10^{-3} \text{ m}$  y  $V = 40$  voltios, luego,

$$K = \frac{h}{V^2} = \frac{7 \times 10^{-3}}{1600} \simeq 4,375 \times 10^{-6}$$

Llevando todos los datos a la expresión de  $\varepsilon_r$  calculamos su valor, cuyo resultado es,

$$\varepsilon_r \simeq 396,73$$

### PROBLEMA 5.16

Entre las placas de un condensador de superficie  $S = wh$ . disponemos dos dieléctricos de permitividades  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_o$  y  $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_o$ . Conectamos el condensador a una batería de f.e.m.  $V_o$  como indica la figura P5.16. Manteniendo conectada la batería, tirando del dieléctrico  $\varepsilon_2$  lo separamos una distancia  $y$ .

1) Calcular la energía electrostática del condensador en función de la separación  $y$ .

2) Calcular la fuerza sobre el dieléctrico  $\varepsilon_2$ .

Suponemos despreciables los efectos de borde.

#### Solución

1) *Energía electrostática*

Calculamos la energía electrostática mediante la ecuación (5.5).

Dada la estructura y disposición del condensador, la continuidad de las componentes tangenciales del campo  $\mathbf{E}$  nos lleva a que el campo es el mismo en los tres medios,

$$E_1 = E_v = E_2 = \frac{V_o}{d}$$

La energía será,

$$W_e = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_1 E_1^2 w d \frac{h}{2} + \varepsilon_o E_v^2 w y d + \varepsilon_2 E_2^2 w d \left( \frac{h}{2} - y \right) \right)$$

$$W_e = \frac{1}{2} w \frac{V_o^2}{d} \left( \varepsilon_1 \frac{h}{2} + \varepsilon_o y + \varepsilon_2 \left( \frac{h}{2} - y \right) \right)$$

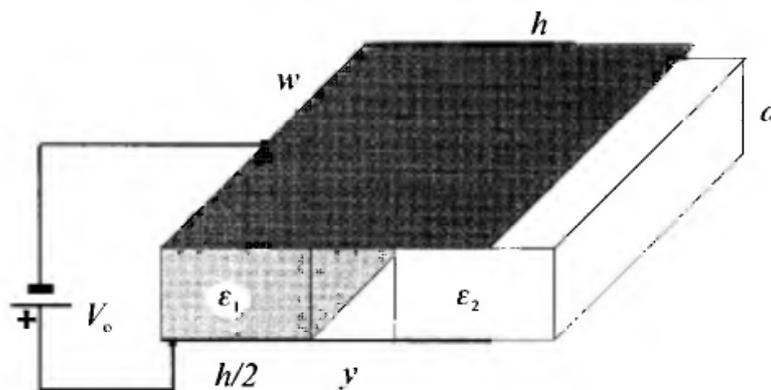


Figura P5.16

## 2) Fuerza

Teniendo en cuenta que la batería permanece conectada, la fuerza se calcula utilizando la ecuación (5.10), que en nuestro caso se reduce a,

$$F = \frac{dW_e}{dy} = \frac{1}{2} w \frac{V_o^2}{d} (\varepsilon_o - \varepsilon_2)$$

Sustituyendo el valor de  $\varepsilon_2$  queda,

$$F = -\frac{3}{2} w \frac{V_o^2}{d} \varepsilon_o$$

Fuerza que tiende a introducir el dieléctrico entre las placas del condensador.

## PROBLEMA 5.17

Dos placas conductoras planoparalelas de superficie  $S$ , están unidas a una batería de f.e.m.  $V_o$  y dispuestas en un recipiente con líquido dieléctrico de permitividad  $\varepsilon$  como indica la figura P5.17. La placa inferior se mantiene fija con respecto al nivel del líquido, y la superior está en el vacío a una distancia  $z$  del líquido.

Calcular la fuerza ejercida sobre la placa superior.

Se desprecian los efectos de borde.

### Solución

Utilizamos la aproximación de placas infinitas para suponer que los campos son uniformes en la región entre las placas. Llamaremos (1) a la región en vacío y (2) a la región ocupada por el líquido.

Dado que en la frontera entre los dos medios dieléctricos no existe carga libre y, además, los campos tienen todos la dirección  $\mathbf{u}_z$  perpendicular a la superficie de separación líquido aire, se cumple la continuidad de las componentes normales del vector desplazamiento  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 \\ \varepsilon_0 E_1 &= \varepsilon E_2 \end{aligned}$$

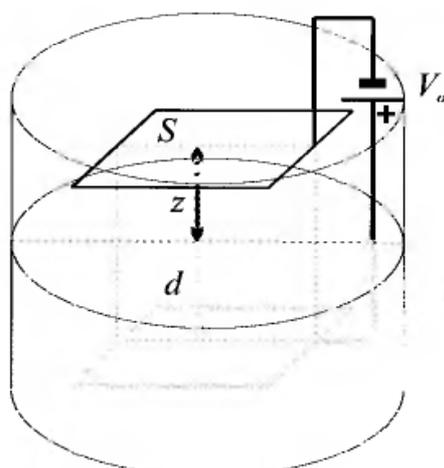


Figura P5.17

La condición para la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de cualquier camino entre las dos placas es  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_0$ . Sobre un camino perpendicular a las placas,

$$E_1 z + E_2 d = V_0$$

Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la anterior,

$$E_1 = V_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 d + \varepsilon z}$$

$$E_2 = V_0 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 d + \varepsilon z}$$

El vector desplazamiento será,

$$D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_1 = V_0 \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\varepsilon_0 d + \varepsilon z}$$

La energía del sistema es,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{V_0 \varepsilon}{\varepsilon_0 d + \varepsilon z} \right)^2 S z + \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{V_0 \varepsilon_0}{\varepsilon_0 d + \varepsilon z} \right)^2 S d$$

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 V_o^2 \frac{S}{\epsilon_0 d + \epsilon z}$$

Aplicando la ecuación (5.10) obtenemos la fuerza. En este caso,

$$F = \frac{dW_e}{dz} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon^2 \frac{V_o^2 S}{(\epsilon_0 d + \epsilon z)^2}$$

La fuerza es negativa, es decir, tiende a unir las placas.

### PROBLEMA 5.18

Un dispositivo está formado por una placa conductora cuadrada de lado  $2d$ . A una distancia  $e$  están situadas dos placas conductoras rectangulares, cuyos lados son respectivamente  $d$  y  $2d$ , ver figura P5.18.

Entre las placas conductoras se introduce un dieléctrico formado por una placa dieléctrica de dimensiones  $2d' \times 2d \times e$  ( $2d' < 2d$ ), cuya permitividad es  $\epsilon$ . Inicialmente el dieléctrico está centrado entre las placas conductoras.

Unimos dos baterías de f.e.m.  $V_1$  y  $V_2$  como indica la figura P5.18.

Calcular la fuerza sobre la placa de dieléctrico al desplazarse en la dirección del eje Y.

### Solución

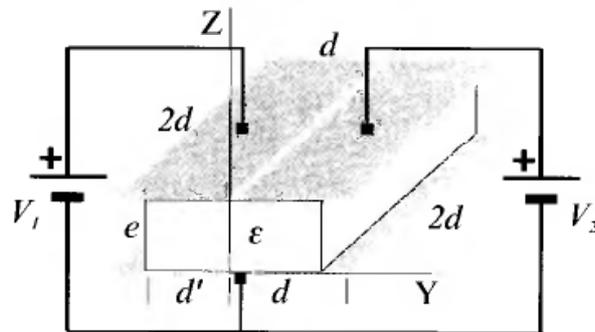


Figura P5.18

Para la resolución de este problema hay que calcular la variación de energía eléctrica cuando se desplaza el dieléctrico en la dirección del eje Y, ya que la fuerza es  $F_y = dW/dy$ .

Calculamos la variación de energía,  $dW$  para un desplazamiento  $dy$  de la placa dieléctrica. Este desplazamiento supone que un mismo volumen  $dv = 2d \times e \times dy$  pasa a estar ocupado en la parte derecha por un dieléctrico y queda vacío en la parte izquierda.

$$dW = dW_1 + dW_2$$

En general  $dW = 1/2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$ .

Analizamos cada zona por separado.

a)

Placa a potencial  $V_1$ . El campo en vacío y con dieléctrico es el mismo,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{V_1}{e} \mathbf{u}_z \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_{1v} = \varepsilon_o \mathbf{E}_1$$

El vector  $\mathbf{D}_{1d}$  en el dieléctrico será:

$$\mathbf{D}_{1d} = \varepsilon \mathbf{E}_1$$

La variación de energía debida al desplazamiento en esa zona es

$$dW_1 = \frac{1}{2} 2d \times e \times dy (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_{1,v} - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_{1,d})$$

$$dW_1 = d \times e \times dy \left( \frac{V_1}{e} \varepsilon_o \frac{V_1}{e} - \frac{V_1}{e} \varepsilon \frac{V_1}{e} \right)$$

$$dW_1 = \frac{d}{e} V_1^2 (\varepsilon_o - \varepsilon) dy$$

b)

Placa a potencial  $V_2$ . Procedemos como antes. Ahora

$$\mathbf{E}_{2v} = \frac{V_2}{e} \mathbf{u}_z \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_{2v} = \varepsilon_o \mathbf{E}_{2v}$$

El vector  $\mathbf{D}_{2d}$  en el dieléctrico será:

$$\mathbf{D}_{2d} = \varepsilon \mathbf{E}_2$$

En esta zona pasa de vacío a tener un dieléctrico en el volumen elemental  $dv$ . La variación de energía debida al desplazamiento en esa zona será:

$$dW_2 = \frac{d}{e} V_2^2 (\varepsilon - \varepsilon_o) dy$$

La variación de energía total

$$dW = \frac{d}{e} V_1^2 (\varepsilon_o - \varepsilon) dy + \frac{d}{e} V_2^2 (\varepsilon - \varepsilon_o) dy$$

Sacando factor común  $(\varepsilon - \varepsilon_o)$  y operando tenemos,

$$dW = \frac{d}{e} (\varepsilon - \varepsilon_o) (V_2^2 - V_1^2) dy$$

y por tanto la fuerza depende de los potenciales de las pilas y es

$$F_y = \frac{dW}{dy} = \frac{d}{e} (\varepsilon - \varepsilon_o) (V_2^2 - V_1^2)$$

## Capítulo 6

# SISTEMAS DE CONDUCTORES

## 6.1 INTRODUCCIÓN

### 6.1.1 CONDUCTORES

De una forma genérica, podemos definir un conductor como un material sobre el que las cargas eléctricas se pueden mover libremente bajo la influencia de un campo eléctrico. Los casos más comunes son los metales como el cobre, plata, oro, aluminio etc.

En condiciones estáticas el campo eléctrico dentro de un conductor es nulo, de lo contrario se estarían moviendo las cargas. Si el campo es nulo, la integral de línea a lo largo de cualquier camino será nula, por lo que el conductor es un volumen que está a un potencial, y la superficie que lo limita es por tanto una superficie equipotencial. En resumen, en el interior de un conductor,

$$\mathbf{E} = 0 ; V = \text{constante} \quad (6.1)$$

Como consecuencia de ser equipotencial la superficie del conductor, se deriva que el campo eléctrico es normal a dicha superficie en los puntos exteriores muy próximos a ella.

$$E_n \neq 0 ; E_t = 0 \quad (6.2)$$

Cuando un conductor se pone en presencia de un campo eléctrico se produce, en un tiempo muy corto dependiente de su conductividad, una redistribución de las cargas libres del conductor, de forma que al terminar el proceso el campo es nulo en su interior. Estas cargas se sitúan sobre la superficie del conductor, y se las conoce como cargas inducidas. Las cargas

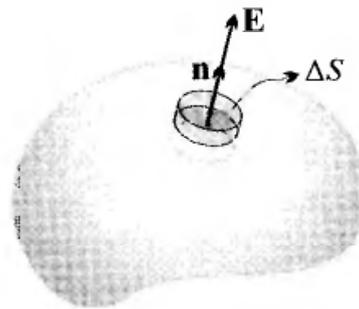
inducidas producen un campo en el interior del conductor que contrarresta el campo exterior, por tanto el campo electrostático en el interior es cero.

Si depositamos una carga  $Q$  sobre un conductor, esta carga se distribuye por la superficie del conductor, siendo nula la carga neta en el interior. Esto se demuestra aplicando el teorema de Gauss sobre una superficie interior pero muy próxima a la del conductor. Dado que el campo es nulo en el interior, será nulo el flujo del campo sobre la citada superficie y por tanto la carga neta en su interior será también nula.

*Campo en la superficie de un conductor cargado*

Sobre la superficie del conductor cargado suponemos una densidad superficial de carga  $\sigma$ . Aplicamos el teorema de Gauss sobre la superficie cerrada por la caja indicada en la figura 6.1, teniendo en cuenta que el campo en el interior del conductor es nulo y que sobre la superficie es normal a ella,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.3)$$



**Figura 6.1**

El sentido del campo depende del signo de  $\sigma$ , siendo hacia el interior del conductor cuando  $\sigma$  negativa y hacia el exterior en el caso de  $\sigma$  positiva. Hemos supuesto que el medio exterior es el vacío.

Cuando un conductor tiene un hueco en su interior, por ejemplo una esfera metálica hueca, la carga sobre dicho conductor se distribuye sobre la superficie exterior, siempre que en el hueco no exista carga. Como consecuencia el campo en el interior del conductor y en el hueco es nulo, por tanto su potencial es constante. Si en el hueco situamos un conductor descargado  $M$ , como indica la figura 6.2, dicho conductor se mantiene al potencial que tenga el conductor que le rodea sin que exista campo en  $M$  que pueda afectarlo. Este fenómeno se conoce como efecto de apantallamiento, que es de gran utilidad ya que si unimos el conductor exterior a tierra, las variaciones externas de campo no afectan al conductor  $M$  situado en el interior.

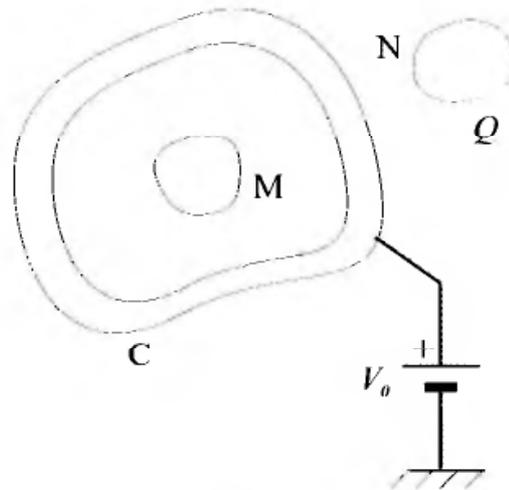


Figura 6.2

### 6.1.2 SISTEMAS DE CONDUCTORES

Vamos a considerar un sistema formado por  $n$  conductores, que soportan respectivamente cargas  $Q_1 \dots Q_n$ ; las densidades respectivas de carga serían  $\sigma_1 \dots \sigma_n$ . El potencial en el conductor  $i$  será,

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\sigma_j ds_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.4)$$

$\mathbf{r}_i$  es el vector de posición sobre el conductor  $i$ ;  $\mathbf{r}_j$  es el correspondiente al conductor  $j$ . También se incluye  $i = j$  que representa la integral sobre el propio conductor  $i$ . La relación (6.4) constituye un sistema de  $n$  ecuaciones que se pueden representar de la forma siguiente:

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.5)$$

La relación (6.5) es un sistema de  $n$  ecuaciones, donde  $p_{ij}$  reciben el nombre de **coeficientes de potencial**. Estos coeficientes dependen de la forma y distribución de los conductores.

Cada coeficiente  $p_{ij}$  representa la relación entre el potencial  $V_i$  sobre el conductor  $i$  debido a una carga  $Q_j$  en el conductor  $j$  cuando no existe carga en el resto de los conductores.

El coeficiente  $p_{ij}$  es simétrico,

$$p_{ij} = p_{ji}$$

Como el potencial debido a una carga  $Q_i$  sobre el propio conductor es mayor que el potencial en el conductor  $j$  debido a la carga  $Q_i$  sobre el conductor  $i$ , se verifica que,

$$p_{ii} \geq p_{ij} > 0$$

La igualdad incluye el caso de un conductor dentro de otro.

### *Coefficiente de capacidad e inducción*

En el sistema de ecuaciones (6.5) podemos despejar las cargas en función de los potenciales, quedando un sistema de la forma:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} V_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.6)$$

Los coeficientes  $c_{ij}$  son factores que dependen de la geometría del sistema como los coeficientes de potencial y reciben las denominaciones siguientes: Los términos  $c_{ii}$  se denominan **coeficientes de capacidad**, y a los  $c_{ij}$  se los conoce como **coeficientes de inducción o influencia**.

El coeficiente  $c_{ij}$  es la relación entre la carga que se induce en el conductor  $i$  cuando el conductor  $j$  está a potencial  $V_j$  y los demás conductores unidos a tierra (potencial cero).

Las propiedades de los coeficientes de influencia son:

Simetría:  $c_{ij} = c_{ji}$

Los coeficientes de influencia  $c_{ij}$  son negativos, ya que la carga inducida sobre un conductor unido a tierra por otro cargado positivamente es negativa. Los coeficientes de capacidad  $c_{ii}$  son positivos, pues la carga de un conductor con potencial positivo es positiva. Resumiendo:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad ; \quad c_{ij} < 0 \quad ; \quad c_{ii} > 0$$

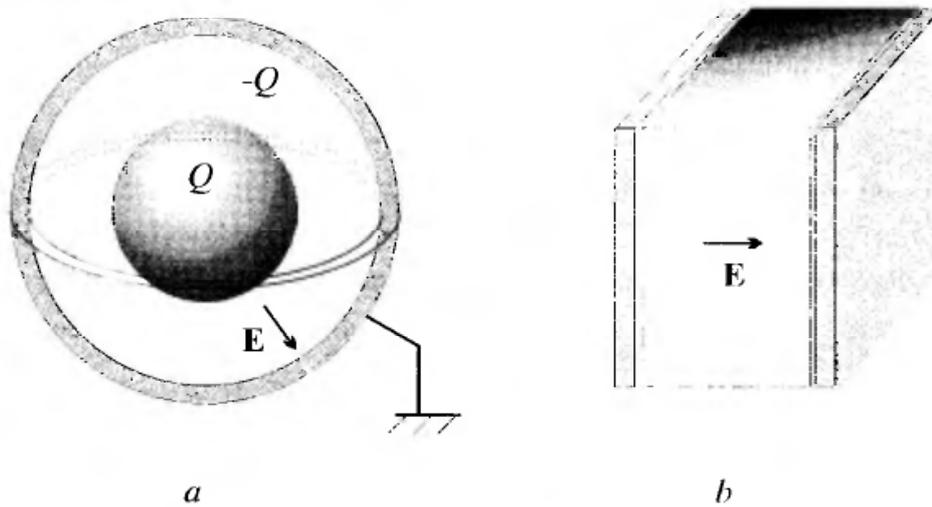
### 6.1.3 CONDENSADORES

A un conductor aislado se le denomina capacitor, por su capacidad de almacenar carga cuando se le aplica un potencial determinado. Se llama capacitancia o capacidad la relación entre la carga que almacena y el potencial aplicado.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (6.7)$$

Hay un caso particular de sistema de conductores caracterizado por que uno de los conductores encierra al otro, de forma que ambos tienen cargas

iguales pero de distinto signo, este sistema recibe el nombre de condensador, debido a que condensa las líneas de campo en la zona comprendida entre los dos conductores.



**Figura 6.3**

Las cargas externas al sistema no afectan a la diferencia de potencial entre ambos conductores ni a la carga del conductor interior; ésta siempre es la misma, en módulo, que la distribuida por la cara interna del conductor externo.

La capacidad de un sistema como el indicado anteriormente es igual al módulo de la carga común dividido por la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los conductores,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_2 - V_1} \quad (6.8)$$

#### *Asociación de condensadores*

Los condensadores se pueden asociar conectándolos en serie o en paralelo. La capacidad equivalente  $C$  de un conjunto de condensadores  $C_i$  asociados en serie está dada por:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \cdots \frac{1}{C_n} \quad (6.9)$$

En el caso de un sistema conectado en paralelo:

$$C = C_1 + C_2 \cdots C_n \quad (6.10)$$

La capacidad depende de las características geométricas del conductor o sistema de conductores. En el caso de un condensador formado por dos

placas conductoras plano paralelas, de superficie  $S$ , separadas por una distancia  $d$  y con un medio de permitividad  $\varepsilon$  entre placas, la capacidad viene dada por:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \quad (6.11)$$

La expresión (6.11) presupone que la superficie es muy grande comparada con la separación entre placas, de forma que se desprecian los efectos de borde. En esta aproximación se supone que el campo en los bordes pasa del valor entre placas a cero, lo que contradice la condición de campo conservativo,  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . En realidad la transición en los bordes se hace de forma que las líneas de campo se curvan, dando lugar a un campo no nulo en las zonas exteriores próximas al borde.

#### 6.1.4 ENERGÍA DE CONDUCTORES CARGADOS

Si se trata de  $N$  conductores, en el capítulo 5 vimos que la energía de un sistema de conductores es de la forma:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i \quad (6.12)$$

Ahora el potencial en cada conductor se debe a las cargas en los otros conductores además de la propia carga. Esto establece la diferencia principal con la energía de un sistema de cargas puntuales.

Como hemos visto en la ecuación (6.5), el potencial  $V_i$  se puede expresar en función de las cargas y los coeficientes de potencial. La energía electrostática en función de cargas y coeficientes de potencial, se obtiene llevando dicha ecuación a la (6.12),

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N p_{ij} Q_i Q_j \quad (6.13)$$

#### *Energía electrostática de un condensador*

La energía de un condensador se obtiene al considerarlo como un sistema de conductores cuya energía se puede calcular mediante la ecuación (6.12). Las cargas y potenciales respectivos de cada placa son:  $Q$ ,  $V_1$ ,  $-Q$ ,  $V_2$ . Aplicando la citada ecuación obtenemos,

$$W_e = \frac{1}{2}(Q V_1 + (-Q) V_2) = \frac{1}{2}Q (V_1 - V_2)$$

La diferencia de potencial entre conductores ( $V_1 - V_2$ ) se suele representar por  $V$ , por tanto la energía electrostática de un condensador se expresa de la forma

$$W_e = \frac{1}{2} Q V \quad (6.14)$$

Considerando la definición de capacidad de un condensador  $C = Q/V$ , la expresión anterior se transforma en

$$W_e = \frac{1}{2} C V^2 \quad (6.15)$$

Las dos ecuaciones anteriores expresan la energía electrostática almacenada por un condensador cargado, es decir, cuando entre sus placas hay una diferencia de potencial  $V$ .

## 6.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 6.1

Dado el sistema constituido por los conductores (1) y (2), formado por una esfera de radio  $a$  y una capa esférica de radio  $b$  ( $b > a$ ), dispuestos como indica la figura P6.1.

El potencial en un punto  $P$  ( $a < r_p < b$ ) es  $V$  cuando la esfera está a un potencial  $V_1$  y la capa a  $V_2$ .

Si colocamos una carga  $q$  en el punto  $P$  y unimos esfera y capa a potencial cero, calcular la relación entre la carga  $q$ , las cargas inducidas  $q_1$  y  $q_2$ , y los potenciales  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V$ .

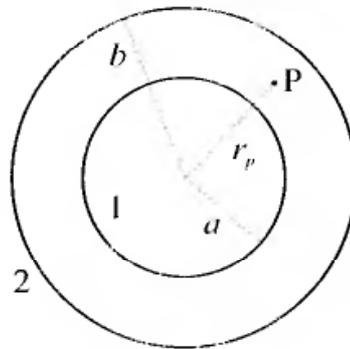


Figura P6.1

### Solución

Encontramos la solución aplicando la ecuación (6.5) y las condiciones particulares de los conductores.

La situación de los conductores, considerando el punto  $P$  como tercer elemento, nos lleva a las siguientes relaciones entre algunos coeficientes de potencial:

Como el conductor 2 apantalla a 1 y 3.

$$p_{22} = p_{21} = p_{12} = p_{23} = p_{32} \quad ; \quad p_{13} = p_{31}$$

El sistema de ecuaciones (6.5) se reduce al siguiente:

$$V_1 = p_{11}q_1 + p_{22}q_2 + p_{13}q_3$$

$$V_2 = p_{22}q_1 + p_{22}q_2 + p_{22}q_3$$

$$V_3 = p_{31}q_1 + p_{22}q_2 + p_{33}q_3$$

Ahora tenemos que aplicar las dos condiciones que nos dan; la primera es que cuando  $q_3 = 0$  los potenciales son respectivamente  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V = V_3$ . Con estas condiciones el sistema anterior se reduce al siguiente:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}q_1 + p_{22}q_2 & V_1 - V_2 &= q_1(p_{11} - p_{22}) \\ V_2 &= p_{22}q_1 + p_{33}q_2 & V_1 - V &= q_1(p_{11} - p_{31}) \\ V &= p_{31}q_1 + p_{22}q_2 & V_2 - V &= q_1(p_{22} - p_{31}) \end{aligned}$$

Puestas las igualdades de otra forma queda,

$$\frac{V_1 - V_2}{(p_{11} - p_{22})} = \frac{V_1 - V}{(p_{11} - p_{31})} = \frac{V_2 - V}{(p_{22} - p_{31})} \quad (6.1.1)$$

La segunda situación se produce cuando  $V_1 = V_2 = 0$  y  $q_3 = q$ .

En el sistema de ecuaciones iniciales se verifica que,

$$\begin{aligned} p_{11}q_1 + p_{22}q_2 + p_{13}q &= 0 \\ p_{22}q_1 + p_{22}q_2 + p_{23}q &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, tomando  $q_1$  y  $q_2$  como incógnitas y siendo los términos independientes  $q p_{13}$  y  $q p_{22}$ , obtenemos,

$$q_1 = q \frac{p_{22} - p_{13}}{p_{11} - p_{22}} \quad ; \quad q_2 = -q \frac{p_{11} - p_{13}}{p_{11} - p_{22}}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (6.1.1), queda,

$$q_1 = q \frac{V_2 - V}{V_1 - V_2} \quad ; \quad q_2 = -q \frac{V_1 - V}{V_1 - V_2}$$

La relación final es,

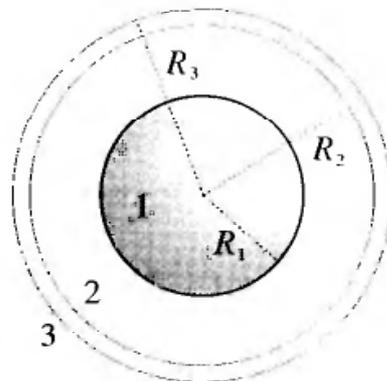
$$\frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q_1}{V_2 - V} = \frac{q_2}{V - V_1}$$

**PROBLEMA 6.2**

Tenemos el sistema de conductores formado por una esfera metálica de radio  $R_1$  y una capa esférica, cuyo radio interior es  $R_2$  y el exterior  $R_3$ , dispuestos como indica la figura P6.2.

Calcular los coeficientes de potencial  $p_{ij}$ , los de capacidad e influencia  $c_{ii}$  y  $c_{ij}$  y la capacidad  $C$  del sistema.

**Solución**



**Figura P6.2**

a) En primer lugar vamos a obtener los coeficientes de potencial que aparecen en la ecuación (6.5), que en este caso queda reducida al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{aligned}$$

La capa esférica apantalla a la esfera de radio  $R_1$ , por tanto  $p_{12} = p_{21} = p_{22}$ . El coeficiente  $p_{22}$  es el potencial que adquiere la capa esférica cuando se le aplica la carga unidad, manteniendo la esfera descargada. Como la carga unidad se distribuirá sobre la superficie de radio  $R_3$ , el potencial de la capa será,

$$\begin{aligned} V_2 = p_{22} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \rightarrow p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \\ p_{22} &= p_{12} = p_{21} \end{aligned}$$

Para calcular el término que nos falta  $p_{11}$ , determinaremos el potencial que adquiere la esfera de radio  $R_1$  cuando se aplica la carga unidad a dicha esfera. El potencial se debe a la carga sobre la propia esfera más el potencial debido a las cargas negativas inducidas sobre la superficie esférica de radio  $R_2$ , más el correspondiente a las cargas positivas distribuidas sobre la esfera de radio  $R_3$ , es decir,  $V_1 = p_{11}$  con,

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

b) Los coeficientes de capacidad e influencia se obtienen despejando la  $Q_i$  en función de  $V_i$  en el sistema de ecuaciones anterior, es decir,

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 \\ Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 \end{aligned}$$

Los valores de  $c_{ij}$  son respectivamente,

$$c_{11} = \frac{p_{22}}{\Delta}; \quad c_{22} = \frac{p_{11}}{\Delta}; \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{p_{21}}{\Delta}$$

$$\Delta = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para  $p_{ij}$  en las relaciones anteriores, tendremos que,

$$\Delta = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{1}{R_1R_3} - \frac{1}{R_2R_3} \right)$$

Con los valores obtenidos para  $p_{ij}$  anteriormente y realizando operaciones calculamos  $c_{ij}$ ,

$$c_{11} = c_{12} = c_{21} = 4\pi\epsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$c_{22} = 4\pi\epsilon_o \left( R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

c) Calculamos la capacidad del sistema teniendo en cuenta que

$$Q_1 = Q \text{ y } Q_2 = -Q$$

Con estas condiciones

$$V_1 - V_2 = Q(p_{11} + p_{22} - 2p_{21})$$

La capacidad  $C$  será,

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{21}}$$

Sustituyendo los valores de  $p_{ij}$  calculados anteriormente, obtenemos:

$$C = 4\pi\epsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

### PROBLEMA 6.3

Calcular los coeficientes de potencial del sistema formado por dos esferas de radio  $R$  situadas a una distancia  $d$ , siendo  $d \gg R$ .

#### Solución

Calculamos los coeficientes de potencial teniendo en cuenta su definición.

En el caso de que  $d \gg R$ , cuando se calcula  $p_{11}$  se desprecia el potencial que sobre la esfera 1 crean las cargas inducidas en la esfera 2.



Figura P6.3

Se procede de forma similar en el caso de la esfera 2.

Cuando se calcula  $p_{12}$  se supone que el potencial sobre 2 debido a 1 es el creado en la posición del centro de la esfera 2.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores,

$$p_{11} = p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R} \quad ; \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{d}$$

### PROBLEMA 6.4

Tenemos un sistema formado por dos esferas conductoras, cuyos radios respectivos son  $R_1$  y  $R_2$ , situadas a una distancia  $d$  mucho mayor que  $R_1$  y  $R_2$  ( $d \gg R_1$  y  $R_1 > R_2$ ).

Inicialmente la esfera de radio  $R_1$  tiene una carga  $Q$  y la otra está descargada. Mediante un hilo conductor muy largo se unen las dos esferas.

Calcular el potencial de las esferas y la carga final sobre cada esfera.

### Solución

Con la condición de que  $d \gg R_1$ , suponemos despreciable la influencia de las cargas inducidas en otra esfera sobre el potencial de la propia esfera. Es decir, que como en el problema 6.3 los coeficientes de potencial respectivos son:

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1}; \quad p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}; \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$$

La solución del problema se obtiene imponiendo la condición de que al final las dos esferas están al mismo potencial  $V$ .

Para determinar este potencial, utilizamos las relaciones entre carga y potencial a través de los coeficientes de capacidad e influencia, e imponiendo la condición del potencial sobre las esferas,

$$Q_1 = c_{11}V + c_{12}V = (c_{11} + c_{12})V$$

$$Q_2 = c_{21}V + c_{22}V = (c_{21} + c_{22})V$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades y teniendo en cuenta que la suma de las cargas debe ser igual a  $Q$ , dado que el sistema en conjunto se mantiene aislado, obtenemos,

$$Q_1 + Q_2 = Q = (c_{11} + c_{22} + 2c_{12})V$$

Para determinar  $V$ , debemos calcular  $c_{ij}$  en función de los valores de  $p_{ij}$  obtenidos al principio.

$$\Delta = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{R_1R_2} - \frac{1}{d^2}\right)$$

$$c_{11} = \frac{p_{22}}{\Delta}; \quad c_{22} = \frac{p_{11}}{\Delta}; \quad c_{12} = -\frac{p_{21}}{\Delta}$$

$$c_{11} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 d^2}{d^2 - R_1 R_2}; \quad c_{22} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 d^2}{d^2 - R_1 R_2}; \quad c_{12} = -4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2 d}{d^2 - R_1 R_2}$$

Dado que  $d \gg R_1$  y  $d \gg R_2$ , se deduce que  $d^2 \gg R_1 R_2$ , por tanto,

$$c_{11} \simeq 4\pi\epsilon_0 R_1; \quad c_{22} \simeq 4\pi\epsilon_0 R_2; \quad c_{12} \simeq -4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d}$$

Ahora podemos obtener  $V$

$$V = \frac{Q}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}} \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2 - 2R_1 R_2/d)}$$

Las cargas finales en las respectivas esferas son:

$$Q_1 = (c_{11} + c_{12})V \rightarrow Q_1 = Q \frac{R_1(1 - R_2/d)}{(R_1 + R_2 - 2R_1 R_2/d)}$$

$$Q_2 = (c_{22} + c_{12})V \rightarrow Q_2 = Q \frac{R_2(1 - R_1/d)}{(R_1 + R_2 - 2R_1R_2/d)}$$

De las ecuaciones anteriores se puede deducir que las cargas se reparten por igual en el caso de que las dos esferas tengan el mismo radio.

### PROBLEMA 6.5

Un sistema está formado por tres esferas metálicas de radio  $R$ , situadas sobre los vértices de un triángulo equilátero de lado  $d$ , siendo  $d \gg R$ , véase la figura P6.5.

Inicialmente las esferas 1 y 3 tienen una carga  $Q$  y la esfera 2 está descargada.

Durante un instante se une la esfera 2 a tierra ( $V_2 = 0$ ). A continuación se hace lo mismo con la esfera 3.

Calcular la carga final sobre la esfera 3.

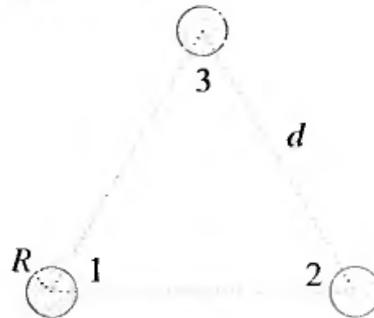


Figura P6.5

### Solución

Con la condición de que  $d \gg R$ , suponemos despreciable la influencia de las cargas inducidas en otra esfera sobre el potencial de la propia esfera.

De forma similar a como operamos en el problema 6.3, obtenemos los coeficientes de potencial en este caso, es decir,

$$p_{ii} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} ; p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Cuando unimos la esfera 2 a tierra,

$$V_2 = 0 = p_{21}Q + p_{22}Q_2 + p_{23}Q$$

de donde se deduce que,

$$Q_2 = -\frac{(p_{21} + p_{23})Q}{p_{22}}$$

Al conectar la esfera 3 a tierra,  $V_3 = 0$ , de donde,

$$V_3 = 0 = p_{31}Q + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3$$

$$Q_3 = -\frac{p_{31}Q + p_{32}Q_2}{p_{33}}$$

Sustituyendo el valor de  $Q_2$  obtenido anteriormente, queda,

$$Q_3 = (p_{32}(p_{21} + p_{23}) - p_{31}p_{22}) \frac{Q}{p_{33}p_{22}}$$

Los valores de  $p_{ii}$  y  $p_{ij}$  calculados anteriormente se llevan a la expresión anterior, con lo que obtenemos el resultado siguiente:

$$Q_3 = Q \frac{R}{d} \left( \frac{2R}{d} - 1 \right)$$

### PROBLEMA 6.6

Dado el sistema de conductores formado por tres capas esféricas conductoras concéntricas, cuyos radios respectivos son  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , y su espesor despreciable frente a los radios, véase la figura P6.6, calcular:

- 1) Los coeficientes de potencial.
- 2) Los coeficientes de capacidad e influencia.

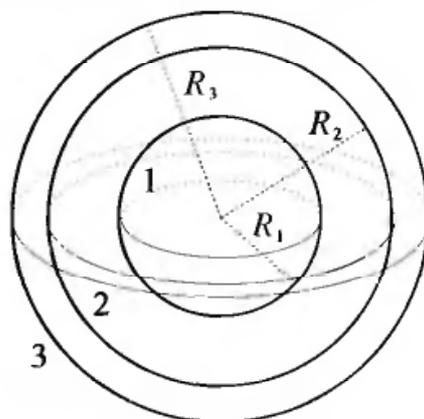


Figura P6.6

### Solución

1) Calculamos los coeficientes de potencial mediante la ecuación (6.5) que expresa la definición de dichos coeficientes.

Con la hipótesis de que el espesor de la capa es despreciable frente a los radios respectivos se simplifica el cálculo de los coeficientes, debido a que, por ejemplo, las cargas inducidas sobre la capa de radio  $R_3$  cuando existe una carga  $Q_2$  en la de radio  $R_2$ , se distribuyen sobre esferas que tienen prácticamente el mismo radio  $R_3$ , siendo la inducida sobre la superficie interior negativa y la exterior positiva, por tanto el potencial que crean las cargas inducidas sobre la esfera 2 es prácticamente nulo.

Lo mismo ocurre con las esferas 1 y 3.

El sistema de ecuaciones deducido de la ecuación (6.5) en este caso es:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 \\ V_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 \\ V_3 &= p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3 \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Debido al apantallamiento que ejerce la esfera 3 sobre la 2 y 1, cuando  $Q_1 = Q_2 = 0$  y  $Q_3 = 1$  C,

$$V_3 = p_{33} = p_{32} = p_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R_3}$$

Procedemos de forma similar en el caso de la esfera 2. Cuando  $Q_3 = Q_1 = 0$  y  $Q_2 = 1$  C,

$$V_2 = p_{22} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R_2}$$

En el caso de que  $Q_3 = Q_2 = 0$  y  $Q_1 = 1$  C,

$$V_1 = p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R_1}$$

Los términos  $p_{ij} = p_{ji}$ , por tanto la matriz  $p_{ij}$  es de la forma,

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \begin{pmatrix} 1/R_1 & 1/R_2 & 1/R_3 \\ 1/R_2 & 1/R_2 & 1/R_3 \\ 1/R_3 & 1/R_3 & 1/R_3 \end{pmatrix}$$

2) Los coeficientes de capacidad e influencia, se calculan a partir del sistema (6.6.1), como indica la ecuación (6.6), donde,

$$\Delta = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \right)^3 \frac{(R_2 - R_1)(R_3 - R_2)}{R_1(R_2R_3)^2}$$

$$c_{11} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = 4\pi\epsilon_o \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

$$c_{12} = c_{21} = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = -4\pi\epsilon_o \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

$c_{13} = 0$  ya que las esferas 1 y 3 están apantalladas por la 2.

$$c_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} = 4\pi\epsilon_o \frac{(R_3 - R_1)R_2^2}{(R_3 - R_2)(R_2 - R_1)}$$

$$c_{23} = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = -4\pi\epsilon_o \frac{R_2R_3}{R_3 - R_2}$$

$$c_{33} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = 4\pi\epsilon_o \frac{R_3^2}{R_3 - R_2}$$

Dado que  $c_{ij} = c_{ji}$ , con los valores obtenidos se conocen todos los coeficientes de capacidad e influencia del sistema.

**PROBLEMA 6.7**

Entre dos cilindros conductores coaxiales, de radios  $a$  y  $b$  ( $b = 2a$ ), se introducen dos capas de dieléctrico que llenan el espacio entre conductores, véase la figura P6.7. El límite de separación entre los dieléctricos es la superficie cilíndrica de radio  $R$  coaxial con los otros dos. Las permitividades respectivas de los dieléctricos son:  $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$  y  $\epsilon_2$ . Entre los conductores se aplica una d.d.p.  $V_0$ .

1) Calcular el valor de  $\epsilon_2$  para que el campo sobre la superficie del cilindro de radio  $a$  sea cuatro veces superior al campo en dieléctrico sobre la superficie de radio  $b$ .

2) Calcular la capacidad por unidad de longitud del sistema con los valores de  $\epsilon_1$  dado y  $\epsilon_2$  calculado anteriormente.

**Solución**

1) Calcular el valor de  $\epsilon_2$

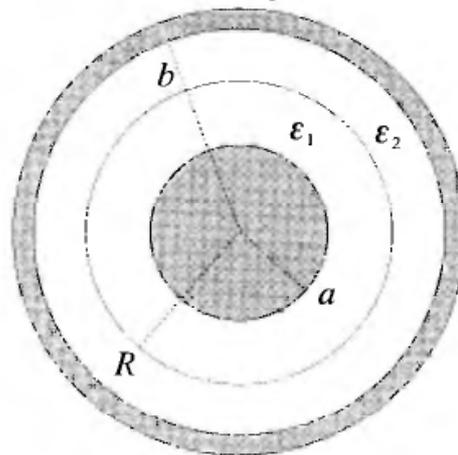
Dada la simetría cilíndrica del sistema, utilizamos el teorema de Gauss para calcular el vector  $\mathbf{D}$  en el espacio entre conductores.

$L$  = longitud del cilindro.  $\sigma$  = densidad de carga sobre la superficie de radio  $a$

$$2\pi r L D_r = 2\pi a L \sigma \rightarrow D_r = \frac{\sigma a}{r}$$

Aplicando la ecuación  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , obtenemos,

$$E_r = \frac{\sigma a}{\epsilon r}$$



**Figura P6.7**

El cálculo de  $D_r$  y  $E_r$  se realiza teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

1 - Continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{D}$  en las superficies de separación entre dieléctricos, y

2 - Que

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o$$

De la primera condición se deduce que,

$$D_{r1} = D_{r2} \rightarrow E_{r1} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_1 r} \quad \text{y} \quad E_{r2} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_2 r}$$

La segunda condición nos lleva a,

$$V_o = \int_a^R \frac{\sigma a}{\varepsilon_1 r} dr + \int_R^b \frac{\sigma a}{\varepsilon_2 r} dr = \sigma a \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{b}{R} \right)$$

Despejando obtenemos el valor de  $\sigma$ ,

$$\sigma = \frac{V_o}{a} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{b}{R} \right)^{-1} \quad (6.7.1)$$

Con este valor de  $\sigma$  podemos calcular  $E_{r1}$  y  $E_{r2}$ ,

$$E_{r1} = \frac{V_o}{\varepsilon_1 r} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{b}{R} \right)^{-1} ; \quad E_{r2} = \frac{V_o}{\varepsilon_2 r} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{b}{R} \right)^{-1}$$

La condición que indica el problema es que,

$$E_{r1}(a) = 4E_{r2}(b)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1 a} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{b}{R} \right) = \frac{4}{\varepsilon_2 b} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{b}{R} \right)$$

La ecuación anterior tiene una solución positiva para  $\varepsilon_2$ , que con  $b = 2a$ ,  $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_o$  es,

$$\varepsilon_2 = \frac{4a}{b} \varepsilon_1 = 8\varepsilon_o$$

2) *Capacidad por unidad de longitud*

La capacidad por unidad de longitud se calcula mediante la relación,

$$\frac{C}{L} = \frac{Q}{LV_o} = \frac{\sigma 2\pi a L}{LV_o} = \frac{\sigma 2\pi a}{V_o}$$

Sustituyendo en la expresión (6.7.1) los valores respectivos de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $b = 2a$  obtenemos  $\sigma$ .

$$\sigma = \frac{V_o}{a} \left( \frac{1}{4\varepsilon_o} \ln \frac{R}{a} + \frac{1}{8\varepsilon_o} \ln \frac{2a}{R} \right)^{-1} = \frac{8V_o\varepsilon_o}{a} \left( \ln \frac{R}{a} + \ln 2 \right)^{-1}$$

Con este valor obtendremos la capacidad por unidad de longitud pedida,

$$\frac{C}{L} = 16\pi\varepsilon_o \left( \ln \frac{R}{a} + \ln 2 \right)^{-1}$$

### PROBLEMA 6.8

El sistema indicado en la figura P6.8 está formado por dos condensadores conectados en serie. La superficie de las placas de ambos condensadores es

$S$  y la distancia inicial entre ellas  $d_o$ ; la permitividad es  $\epsilon_o$ . Mediante un generador ideal suministramos una d.d.p  $V_o$  al sistema.

Aplicando presiones que varían sinusoidalmente, logramos que la distancia entre las placas del condensador  $C_1$  varíen de forma que  $d = d_o + D \text{ sen } \omega t$ , manteniéndose fija la distancia entre placas del condensador  $C_2$ .

1) Calcular las variaciones de potencial entre las placas de  $C_2$ .

2) Determinar la suma de las variaciones de energía electrostática en los dos condensadores.

### Solución

1) *Variaciones de potencial*

En un sistema de condensadores en serie, la carga en las placas de  $C_1$  y  $C_2$  es  $-Q$ ,  $+Q$ ,  $-Q$  y  $+Q$ , ya que la placa del condensador  $C_1$  conectada con la del condensador  $C_2$ , forma un conductor aislado de carga total nula. La suma de las d.d.p. entre las placas respectivas es,

$$V_1 + V_2 = V_o \quad \text{y} \quad Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$$

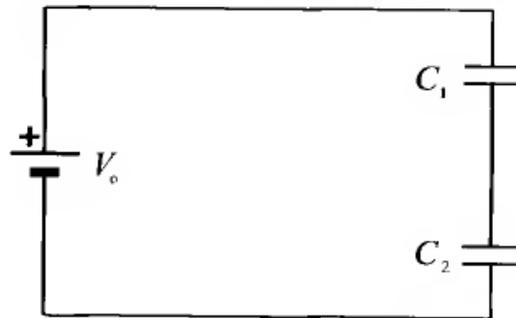


Figura P6.8

Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene  $V_2$ ,

$$V_2 = V_o \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad ; \quad V_1 = V_o - V_2 = V_o \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_2}{C_1} V_2$$

Como

$$C_1 = \epsilon_o \frac{S}{d} = \epsilon_o \frac{S}{d_o + D \text{ sen } \omega t} \quad \text{y} \quad C_2 = \epsilon_o \frac{S}{d_o}$$

Sustituyendo y realizando operaciones tenemos,

$$V_2 = V_o \frac{d_o}{2d_o + D \text{ sen } \omega t}$$

2) *Cálculo de la energía electrostática*

La ecuación (6.15) muestra que para un condensador con carga  $Q$  y d.d.p entre sus placas  $\Delta V$ , la energía electrostática es,

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

En nuestro caso,

$$W = W_1 + W_2$$

Donde

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}C_1\left(\frac{C_2}{C_1}V_2\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{C_2^2}{C_1}V_2^2 ; W_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2$$

$$W = \frac{1}{2}C_2V_2^2\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = \frac{1}{2}C_2V_2^2\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right)$$

Considerando los valores calculados antes obtenemos,

$$W = \frac{1}{2}C_2\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right)\left(V_o\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{C_2C_1}{C_1 + C_2}V_o^2$$

Sustituyendo los valores de  $C_1$  y  $C_2$  tendremos,

$$W = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_o S V_o^2}{2d_o + D \text{sen } \omega t}$$

### PROBLEMA 6.9

Dos condensadores  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma superficie, e inicialmente el mismo espesor  $d$ . su dieléctrico es el aire. Los condensadores se conectan en paralelo.

Al empezar se cargan los dos a una d.d.p.  $V_o$ . desconectando después la batería.

Si mediante un procedimiento mecánico separamos las placas de  $C_1$  a una distancia  $2d$ . manteniendo  $C_1$  y  $C_2$  unidos. ¿cómo varía la d.d.p. entre placas?

#### Solución

La carga total, una vez desconectada la batería, es,

$$Q = C_1V_o + C_2V_o = 2\epsilon_o\frac{S}{d}V_o$$

Esta carga se mantiene constante, dado que el sistema queda aislado al desconectar la batería.

Cuando separamos las placas de  $C_1$ , su capacidad varía,

$$C'_1 = \epsilon_o\frac{S}{2d} = \frac{C_1}{2}$$

En estas condiciones,

$$Q = C'_1V + C_2V = \frac{3}{2}C_1V = \frac{3}{2}\epsilon_o\frac{S}{d}V$$

Donde  $V$  es la nueva d.d.p. entre placas, común a los dos condensadores ya que siguen unidos.

Despejando  $V$ , sustituyendo el valor de  $Q$  inicial y realizando operaciones obtenemos,

$$V = \frac{4}{3}V_o$$

El incremento de la d.d.p. entre placas es,

$$\Delta V = V - V_o = \frac{1}{3}V_o$$

### PROBLEMA 6.10

En el centro de un globo de vidrio de radio  $R_o = 100R$ , tenemos una esfera de mercurio de radio  $R$  con una carga  $Q$ . Mediante un impacto, se divide la esfera en tres esferas del mismo radio, soportando cada una un tercio de la carga  $Q$ . Después de la división, las esferas resultantes se distribuyen sobre los vértices de un triángulo equilátero, inscrito en el globo y en el plano XY (véase la figura P6.10)

Calcular la energía del sistema antes y después de la división utilizando la ecuación (6.13). Despreciar los términos menores al 10% del valor inicial de la energía.

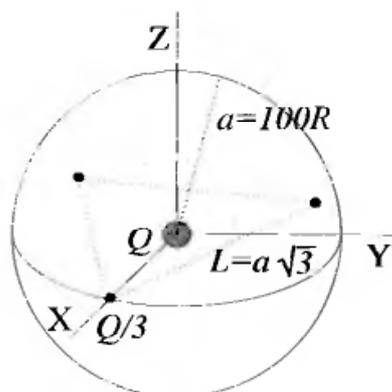


Figura P6.10

### Solución

Calculamos la energía inicial del sistema que tiene un término por tanto sólo un coeficiente de potencial. Para una esfera conductora dicho coeficiente de potencial es la relación entre el potencial de la esfera y la carga sobre ella, es decir,

$$p = \frac{1}{4\pi\epsilon_o R}$$

por tanto la energía es

$$W_o = \frac{1}{8\pi\epsilon_o R} Q^2$$

La energía final es

$$W_F = \frac{1}{2} \sum_i^3 \sum_j^3 p'_{ij} Q'_i Q'_j$$

Para calcularla necesitamos obtener previamente las  $Q'_i$  y el radio de cada esfera en que se ha subdividido la esfera inicial. Como son todas iguales sus radios y cargas serán iguales.

La carga de cada esfera es un tercio de la carga original

$$Q'_i = \frac{1}{3} Q$$

También el volumen de cada esfera es un tercio del de la original  $V' = V/3$ . Dado que la relación entre volúmenes y radios en una esfera es

$$\frac{V}{V'_i} = \frac{R^3}{R'^3_i} = 3$$

se deduce que

$$R'_i = \frac{1}{3^{1/3}} R$$

Los coeficientes de potencial  $p'_{ij}$  para  $i = j$  son todos iguales y de valor

$$p'_{ii} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o R'_i} = \frac{3^{1/3}}{4\pi\epsilon_o R}$$

Podemos separar los términos con  $i = j$  de aquellos con  $i \neq j$  y escribir  $W'$  como

$$W_F = \frac{1}{2} \left( 3 \left( \frac{1}{3} Q \right)^2 \frac{3^{1/3}}{4\pi\epsilon_o R} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{3} \right)^2 \sum_{i \neq j} p'_{ij}$$

Simplificando

$$W_F = \frac{3^{1/3}}{3} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_o R} + \frac{Q^2}{18} \sum_{i \neq j} p'_{ij}$$

Los coeficientes de potencial  $p'_{ij}$  para  $i \neq j$  son iguales puesto que las esferas están situadas todas a la misma distancia  $L$  unas de otras.

El lado en función del radio es,

$$L = a\sqrt{3} = 100R\sqrt{3}$$

por tanto,

$$p'_{ij} = p'_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o L} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o (100R\sqrt{3})}$$

El segundo término de la energía  $W_F$  es:

$$\frac{Q^2}{18} \sum_{i \neq j} p'_{ij} = 6 \frac{Q^2}{18} \frac{1}{4\pi\epsilon_o (100\sqrt{3}R)} = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_o R} \frac{1}{(100\sqrt{3})} = \frac{W_o\sqrt{3}}{450}$$

Es fácil ver que la contribución de estos términos energéticos es  $\simeq 0,38\%$ , muy inferior al 10% del valor inicial de energía  $W_o$ , por tanto los despreciamos. Resumiendo, la energía final aproximadamente es,

$$W_F \simeq \frac{3^{1/3}}{3} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_o R} \simeq 0,48 W_o$$

### PROBLEMA 6.11

La sección transversal de un cable coaxial se muestra en el figura P6.11(1). El radio interior es  $a$ , el exterior  $b$  y el dieléctrico entre los dos cilindros tiene permitividad  $\epsilon = 6\epsilon_o$ , conductividad  $\gamma = 0$  permeabilidad  $\mu$ .

Debido al calor el conductor externo se dilata y despegga del dieléctrico, de manera que el nuevo radio  $b' = b(1 + 0,1)$ , como se muestra en la figura P6.11(2).

1) Si se mantiene aplicada la batería  $V_o$ , calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  antes y después de la dilatación.

2) Calcular la relación entre las capacidades por unidad de longitud antes y después de la dilatación del conductor externo.

### Solución

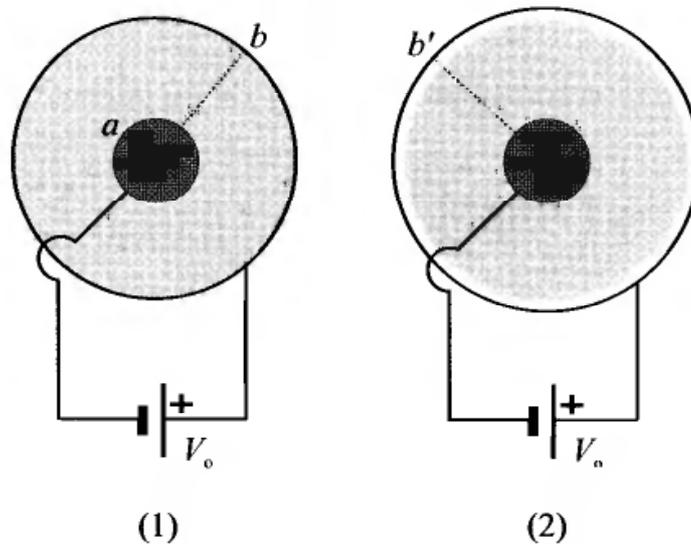


Figura P6.11

1) Cálculo de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ .

1a) Antes de la dilatación

Calculamos los vectores de campo teniendo en cuenta que el dieléctrico llena todo el espacio entre conductores y aplicamos el teorema de Gauss para dieléctricos.

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$

Si consideramos una superficie cilíndrica de altura  $h$  y radio  $\rho$  con  $a < \rho < b$ , tenemos

$$D 2\pi\rho h = Q = \sigma 2\pi a h$$

Luego, el vector desplazamiento eléctrico es

$$\mathbf{D} = \frac{\sigma a}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

Siendo  $\sigma$  la densidad de carga superficial en el conductor interno que debemos determinar. Para ello aplicamos

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\rho d\rho = V_o$$

con  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/6\epsilon_o$

$$V_o = \int_a^b \frac{\sigma a}{6\rho\epsilon_o} d\rho = \frac{\sigma a}{6\epsilon_o} \ln \frac{b}{a}$$

de donde

$$\sigma = \frac{6\epsilon_o V_o}{a \ln(b/a)}$$

Luego los vectores de campo son

$$\mathbf{E} = \frac{V_o}{\ln(b/a)\rho} \mathbf{u}_\rho \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \frac{6\epsilon_o V_o}{\ln(b/a)\rho} \mathbf{u}_\rho$$

1b) Después de la dilatación

En este caso hay que aplicar la continuidad del vector desplazamiento eléctrico para poder determinar su valor.

Igual que en el apartado anterior tenemos que

$$\mathbf{D} = \frac{\sigma' a}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

y

$$\int_a^b \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_\rho d\rho + \int_b^{b'} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_\rho d\rho = V_o$$

Teniendo en cuenta que

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon} \quad \text{y} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_o}$$

Y sustituyendo arriba

$$\int_a^b \frac{\sigma' a}{6\epsilon_o \rho} d\rho + \int_b^{b'} \frac{\sigma' a}{\epsilon_o \rho} d\rho = V_o$$

$$\frac{\sigma' a}{\epsilon_o} \left( \frac{1}{6} \ln(b/a) + \ln(b'/b) \right) = V_o$$

$$\sigma' = \frac{6\epsilon_o V_o}{(\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)) a}$$

El vector  $\mathbf{D}$  será,

$$\mathbf{D} = \frac{6\varepsilon_o V_o}{\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{V_o}{\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{6V_o}{\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

2) *Relación entre las capacidades*

*Antes de la dilatación*

Teniendo en cuenta que la capacidad viene definida por

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{V_o}$$

Tenemos

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \frac{6\varepsilon_o V_o}{\ln(b/a)\rho} \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho L \rho d\varphi = \frac{12\varepsilon_o V_o \pi}{\ln(b/a)} L$$

La capacidad por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{12\varepsilon_o \pi}{\ln(b/a)}$$

*Después de la dilatación*

La capacidad por unidad de longitud será

$$C' = \frac{Q}{V_o} = \frac{\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{V_o}$$

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} L \frac{6\varepsilon_o V_o}{\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)} \frac{1}{\rho} \rho d\varphi = L \frac{12\pi\varepsilon_o V_o}{\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)}$$

$$\frac{C'}{L} = \frac{12\varepsilon_o \pi}{\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)}$$

Vemos que la capacidad se ha modificado de manera que en el denominador aparece el factor  $6 \ln(b'/b)$ , que en nuestro caso vale  $6 \ln(1 + 0,1) = 0,57186$ ; es decir, ha disminuido la capacidad.

Dividiendo  $C$  por  $C'$  tendremos la relación entre las capacidades antes y después de la dilatación,

$$\frac{C}{C'} = \frac{\ln(b/a) + 6 \ln(b'/b)}{\ln(b/a)}$$

## Capítulo 7

# ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON

## 7.1 INTRODUCCIÓN

### 7.1.1 ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE

El comportamiento del campo electrostático queda descrito mediante las dos ecuaciones diferenciales:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (7.2)$$

y las condiciones de los medios materiales que se tienen en cuenta mediante la ecuación:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (7.3)$$

En el caso de que los medios sean lineales, homogéneos e isótropos,  $\varepsilon$  es una constante, por tanto la primera ecuación diferencial queda de la forma,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (7.4)$$

La segunda ecuación es la correspondiente a un campo conservativo, que determina una relación entre el campo y potencial  $V$  de la forma,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (7.5)$$

Llevando la ecuación (7.5) a (7.4), y teniendo en cuenta la relación vectorial  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ ,

$$\Delta V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (7.6)$$

La ecuación (7.6) recibe el nombre de **ecuación de Poisson**.

Cuando consideramos regiones del espacio donde no existen distribuciones de carga  $\rho$ , la ecuación (7.6) se simplifica y queda de la forma,

$$\nabla^2 V = 0 \quad (7.7)$$

Esta ecuación se conoce como **ecuación de Laplace**.

La ecuación (7.7) adopta formas diferentes para los distintos sistemas de coordenadas.

*Coordenadas cartesianas:*

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (7.8)$$

*Coordenadas cilíndricas:*

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (7.9)$$

*Coordenadas esféricas:*

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (7.10)$$

### 7.1.2 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

Un problema electrostático queda resuelto cuando se conoce el campo en los distintos medios. En el caso de distribuciones de carga sencillas el campo se obtiene por integración directa como hemos visto en capítulos anteriores.

Existen distintos procedimientos para resolver los problemas electrostáticos, cada uno adaptado a las condiciones particulares del problema a resolver.

Cuando las distribuciones de carga o conductores es más compleja se recurre a la solución de las ecuaciones diferenciales de Laplace y Poisson, que nos dan el potencial para las condiciones específicas de la distribución de carga. La solución de la ecuación de Poisson requiere la solución previa de la ecuación de Laplace, pues su solución es la correspondiente a la de Laplace más una solución particular que satisfaga la ecuación con segundo miembro no nulo.

Dada esta circunstancia, se comienza por resolver la ecuación de Laplace con unas condiciones para el potencial sobre las superficies de separación entre distintos medios y sobre la superficie de los conductores.

Las condiciones en los límites suelen ser: La continuidad del potencial, el potencial sobre la superficie (condición de Dirichlet), la derivada con respecto a la dirección normal del potencial sobre la superficie ( $\partial V/\partial n$ ) (condición de Neumann), o condiciones mixtas.

#### *Unicidad de la solución*

Al resolver un problema mediante la ecuación de Laplace u otro procedimiento, podemos obtener distintas soluciones,  $V_i$ . Cualquier combinación lineal de dichas soluciones,

$$V = \sum C_i V_i \quad (7.11)$$

es también solución de la ecuación.

El teorema de unicidad establece que dos soluciones de la ecuación de Laplace que satisfagan las mismas condiciones en los límites, o son la misma o difieren en una constante.

En virtud del teorema anterior, no importa el procedimiento para obtener una solución con sus condiciones en los límites precisos, ya que la solución es única.

### 7.1.3 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Hemos visto en el apartado anterior que cualquier procedimiento es válido para obtener una solución del problema electrostático que se nos plantee. En este capítulo vamos a dedicar nuestra atención a dos métodos: El método de imágenes y la solución de la ecuación de Laplace mediante separación de variables.

#### 7.1.3.1 Método de imágenes

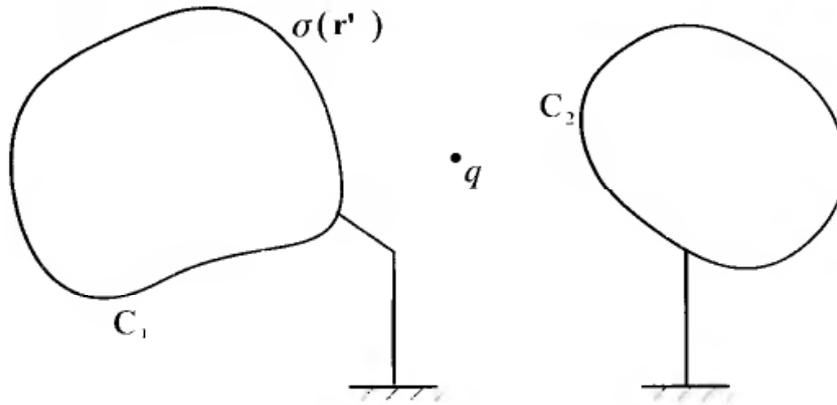
El método de imágenes se utiliza cuando tenemos una o varias cargas en presencia de unas superficies límite que están a un potencial determinado, por ejemplo, conductores unidos a tierra, potencial cero, o a un potencial constante.

Supongamos que se trata de una carga puntual en presencia de unos conductores unidos a tierra, véase la figura 7.1.

El potencial en el volumen exterior a los conductores  $C_1$  y  $C_2$  se debe por una parte a la propia carga  $q$  y por otra a las cargas inducidas sobre los conductores, es decir,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (7.12)$$

Donde  $S' = S_1 + S_2$ , es la superficie de los dos conductores.



**Figura 7.1**

La función  $\sigma(\mathbf{r}')$  es la densidad de carga sobre las respectivas superficies, que en general no se conoce. El método de imágenes consiste en sustituir la distribución  $\sigma(\mathbf{r}')$  por una o varias cargas imagen, situadas en determinados puntos interiores a los conductores  $C_1$  y  $C_2$ , que proporcionen el mismo potencial en el exterior de los conductores y se cumplan las condiciones para el potencial sobre la superficie de  $C_1$  y  $C_2$ . Las cargas que se sitúan en el interior se conocen con el nombre de *cargas imagen*.

Aunque el método tiene carácter general para un sistema de conductores, sólo es aplicable de forma sencilla en algunos casos, como por ejemplo, esfera y carga puntual; carga puntual y plano conductor indefinido, etc. En otros casos el número y posición de las cargas imagen a determinar es tan complejo que se utilizan otros métodos para resolver el problema.

En los casos sencillos indicados en la figura 7.2a y b de plano y esfera, las cargas imagen son las  $q'$  indicadas en cada figura. La forma que adopta el potencial, así como las posiciones y valores de las respectivas cargas imagen son las siguientes:

*Plano y carga puntual:*

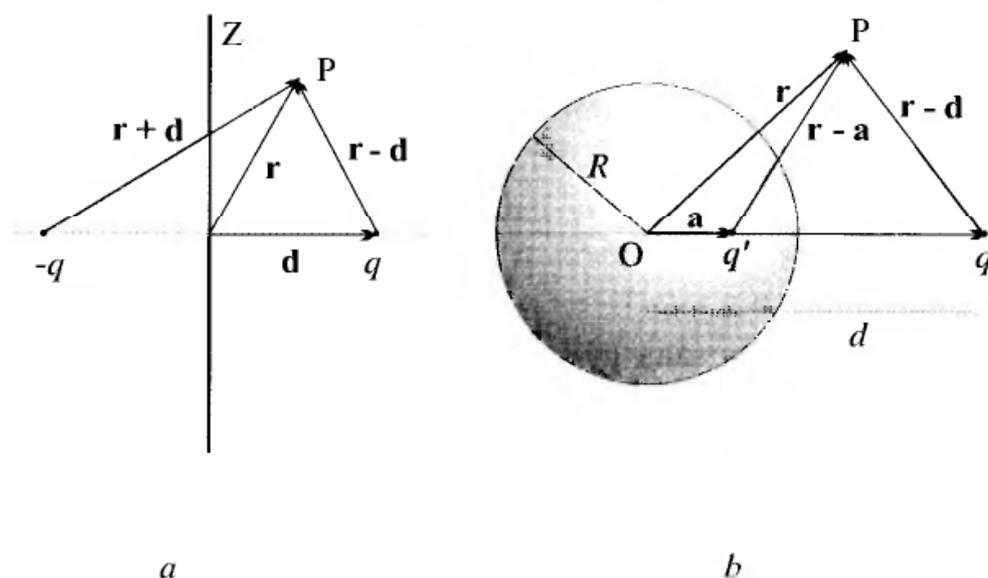
$$q' = -q \text{ situada en } -\mathbf{d}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right) \quad (7.13)$$

*Esfera y carga puntual:*

$$q' = -\frac{R}{d}q \text{ situada en } \mathbf{a}, \quad |\mathbf{a}| = \frac{R^2}{d}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{R}{d|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right) \quad (7.14)$$



Fifura 7.2

En la aplicación del método de imágenes cuando se trata de placas conductoras que forman un ángulo, se verifica lo siguiente:

1) Las condiciones de potencial sobre dichas placas solo se satisfacen con un número finito de cargas imagen si el ángulo que forman los planos que coinciden con las placas es  $\alpha = \pi/n$ , siendo  $n$  un número natural ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

2) Las cargas imagen y la original se sitúan sobre una circunferencia cuyo centro está sobre la recta intersección de los planos. El plano de la circunferencia es perpendicular a los de las placas conductoras.

3) La secuencia de sucesivas cargas imagen termina cuando la imagen de las últimas cargas imagen coincide en un punto. El número de cargas imagen es:  $N = 2n - 1$ . Ejemplo si  $n = 2$ ,  $N = 3$ .

En todos los casos el potencial que obtenemos es el de la zona exterior a los conductores donde se sitúan las cargas reales.

### 7.1.3.2 Método de separación de variables

Cuando se trata de resolver problemas que consisten en una serie de conductores que están a un potencial determinado, y el espacio entre conductores está vacío, el método a seguir consiste en resolver la ecuación de Laplace con las condiciones para  $V$  o  $\partial V/\partial n$  dadas sobre la superficie de los conductores. En general la solución es relativamente fácil cuando la

geometría de los conductores y sus posiciones relativas permiten utilizar el método de separación de variables; es decir, se puede utilizar un sistema de coordenadas en el que se den las condiciones de separabilidad. La separabilidad consiste en que la función potencial puede expresarse como producto de tres funciones, cada una de las cuales depende de una sola coordenada. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas,

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Existen once sistemas de coordenadas que cumplen las condiciones de separabilidad, aquí sólo nos vamos a referir a los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

### 7.1.3.2.1 Coordenadas cartesianas

En el caso de que la ecuación (7.8) admita una solución de la forma:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (7.15)$$

La citada ecuación se puede transformar en las tres siguientes:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 ; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 ; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 \quad (7.16)$$

Las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  deben satisfacer la siguiente condición:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (7.17)$$

Elegimos arbitrariamente  $\alpha$  y  $\beta$  como positivos, pero se pueden intercambiar los valores, siempre que se cumpla la condición anterior.

Los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  así como los de las constantes de integración dependen de las condiciones de frontera sobre los conductores.

La solución general es una combinación de todas las soluciones posibles, es decir,

$$V(\mathbf{r}) = \sum (A_n e^{j\alpha x} + A'_n e^{-j\alpha x}) (B_n e^{j\beta y} + B'_n e^{-j\beta y}) (C_n e^{j\gamma z} + C'_n e^{-j\gamma z}) \quad (7.18)$$

Donde  $j$  es el número imaginario.

#### *Problemas en una dimensión*

Este tipo de problemas se resuelven suponiendo en las ecuaciones (7.16) que  $\beta = \gamma = 0$ , por tanto  $\alpha = 0$ , en consecuencia la solución de la ecuación de Laplace se reduce a resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$$

Cuya solución es:

$$V(x) = Ax + A' \tag{7.19}$$

*Problemas en dos dimensiones*

Ahora podemos suponer que  $\gamma = 0$ , en este caso para que se siga cumpliendo la ecuación (7.17)  $\alpha$  o  $\beta$  debe ser imaginaria, ya que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , de donde  $\beta = j\alpha$ .

La solución será de la forma.

$$V(x, y) = \sum (A_n e^{j\alpha x} + A'_n e^{-j\alpha x}) (B_n e^{-\alpha y} + B'_n e^{\alpha y}) \tag{7.20}$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{\pm j\alpha x} = \cos \alpha x \pm j \operatorname{sen} \alpha x \text{ y que } e^{\pm \alpha y} = \operatorname{ch} \alpha y \pm \operatorname{sh} \alpha y$$

podemos expresar la ecuación (7.20) de otras formas, una de ellas es:

$$V(x, y) = \sum (A_n \operatorname{sen} \alpha x + A'_n \cos \alpha x) (B_n e^{-\alpha y} + B'_n e^{\alpha y}) \tag{7.21}$$

*Ortogonalidad de las funciones  $\operatorname{sen} \alpha x$  y  $\cos \alpha x$*

En la determinación de los coeficientes  $A_n$  se utilizan las condiciones de ortogonalidad de las funciones seno y coseno, que se expresan de la forma siguiente:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi/2 & \text{si } m = n \end{cases} \tag{7.22}$$

$$\int_0^\pi \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi/2 & \text{si } m = n \end{cases} \tag{7.23}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m, n \text{ entero y } m + n \text{ impar} \\ 2m/(m^2 - n^2) & \text{si } m, n \text{ entero y } m + n \text{ par} \end{cases} \tag{7.24}$$

**7.1.3.2.2 Coordenadas cilíndricas**

Los problemas que en coordenadas cilíndricas admiten el método de separación de variables tienen una solución de la forma,

$$V(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z) \tag{7.25}$$

Con este tipo de solución, la ecuación (7.9) se descompone en las tres siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 Z}{dz^2} &= k^2 Z \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -n^2 \Phi\end{aligned}\quad (7.26)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (k^2 \rho^2 - n^2) R = 0$$

Dependiendo la forma que adopta la solución de los valores de  $k$  y  $n$ . La tercera de las ecuaciones (7.26) es la ecuación de Bessel y su solución general son las funciones de Bessel  $J_n(kr)$  y  $N_n(kr)$ .

*Soluciones cuando  $k = 0$  y  $n = 0$*

La condición  $k = 0$  y  $n = 0$  simplifica las ecuaciones (7.26), de manera que,

$$\frac{dZ}{dz} = A; \quad \frac{d\Phi}{d\varphi} = B; \quad \rho \frac{dR}{d\rho} = C$$

Las soluciones respectivas a las ecuaciones anteriores son:

$$Z(z) = Az + A' \quad (7.27)$$

$$\Phi(\varphi) = B\varphi + B' \quad (7.28)$$

$$R(\rho) = C \ln \rho + C' \quad (7.29)$$

El producto de estas ecuaciones nos proporciona la solución general, en este caso,

$$V(\rho, \varphi, z) = (Az + A')(B\varphi + B')(C \ln \rho + C') \quad (7.30)$$

En la solución anterior quedan englobados los problemas en una dimensión que solo dependen de  $\rho$ ,  $\varphi$  o  $z$ .

*Soluciones para distintos valores de  $k$  y  $n$*

1)  $k \neq 0$  y  $n \neq 0$ :

$$\begin{aligned}Z(z) &= A_k e^{kz} + A'_k e^{-kz} \\ \Phi(\varphi) &= B_n \operatorname{sen}(n\varphi) + B'_n \operatorname{cos}(n\varphi) \\ R(\rho) &= C_n J_n(k\rho) + C'_n N_n(k\rho)\end{aligned}\quad (7.31)$$

$J_n$  y  $N_n$  son las funciones de Bessel.

Las soluciones anteriores suponen que  $k$  es real. En algunos problemas, las condiciones en los límites para la variable  $z$  son tales que es necesario

una función periódica de  $z$ ; en estos casos  $k$  debe ser imaginario y la solución (7.31) se modifica en primera y tercera ecuación, de forma que,

$$\begin{aligned} Z(z) &= A_k \operatorname{sen}(kz) + A'_k \operatorname{cos}(kz) \\ \Phi(\varphi) &= B_n \operatorname{sen}(n\varphi) + B'_n \operatorname{cos}(n\varphi) \\ R(\rho) &= C_n I_n(k\rho) + C'_n K_n(k\rho) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Donde  $I_n$  y  $K_n$  se conocen como funciones modificadas de Bessel.

2)  $k \neq 0$  y  $n = 0$

$$\begin{aligned} Z(z) &= A_k e^{kz} + A'_k e^{-kz} \\ Z(z) &= A_k \operatorname{sen}(kz) + A'_k \operatorname{cos}(kz) \\ R(\rho) &= C_0 J_0(k\rho) + C'_0 N_0(k\rho) \\ R(\rho) &= C_0 I_0(k\rho) + C'_0 K_0(k\rho) \\ \Phi(\varphi) &= B\varphi + B' \end{aligned} \quad (7.33)$$

3)  $k = 0$  y  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} Z(z) &= Az + A' \\ R(\rho) &= C_n \rho^n + C'_n \rho^{-n} \\ \Phi(\varphi) &= B_n \operatorname{sen}(n\varphi) + B'_n \operatorname{cos}(n\varphi) \end{aligned} \quad (7.34)$$

### 7.1.3.2.3 Propiedades de la funciones de Bessel

Para terminar vamos a considerar dos casos sobre la constante  $k$  que dependen de los límites radiales del problema considerado.

1) El primero corresponde al caso de simetría azimutal,  $n = 0$ , sin límites en la dirección radial, es decir el potencial se extiende hasta el infinito en la dirección radial. En este caso no hay restricciones sobre  $k$  y la solución lleva aparejada una integración sobre  $k$  de la forma,

$$\int_0^\pi e^{\pm kz} f(k) J_0(k\rho) dk \quad (7.35)$$

En este tipo de problemas se trata de encontrar la función  $f(k)$  con las condiciones particulares del potencial para valores de  $z$  y  $\rho$  determinados.

#### *Potencial debido a una carga puntual*

El potencial debido a una carga puntual se puede expresar mediante las funciones de Bessel de la forma:

$$V(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk \quad (7.36)$$

*Ortogonalidad*

Las condiciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel, en el caso de que el potencial se extienda hasta el infinito sin condiciones en los límites en la dirección radial, son:

$$\int_0^{\infty} \rho J_n(k\rho) J_n(k'\rho) d\rho = \frac{1}{k} \delta(k' - k) \quad (7.37)$$

$\delta(k' - k)$  es la función delta de Dirac que vale cero para  $k \neq k'$  y 1 cuando  $k = k'$ .

2) El segundo caso corresponde a una superficie equipotencial, con  $V = 0$ , para  $\rho = R$ .

En este caso los valores de  $k$  se obtienen buscando los ceros de la función  $J_n(kR) = 0$  (Véanse las tablas con los ceros de la función  $J_n$  en el libro de Murray [14]). Ahora existen una serie de valores  $k_{0m}$  que anulan  $J_n(kR)$ . La solución será una suma de infinitos términos que cumplen las condiciones en los límites de problema.

*Ortogonalidad*

Las condiciones de ortogonalidad en el caso de un potencial con límites en la dirección radial son:

$$\int_0^R \rho J_n(k_{0m}\rho) J_n(k_{0p}\rho) d\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } k_{0m} \neq k_{0p} \\ (R^2/2) J_n'(k_{0m}R) & \text{si } k_{0m} = k_{0p} \end{cases} \quad (7.38)$$

$k_{0m}$  y  $k_{0p}$  son los valores de  $k$  que multiplicados por  $R$  anulan la función  $J_n(kR)$ . Cuando  $n = 0$ ,  $J_0'(k_{0m}R) = -J_1(k_{0m}R)$ .

*Propiedades generales de las funciones de Bessel**Fórmulas de recurrencia*

Si hacemos el cambio de variable  $v = kr$ ,

$$\frac{2n}{v} J_n = J_{n-1} + J_{n+1} \quad ; \quad \frac{2n}{v} N_n = N_{n-1} + N_{n+1} \quad (7.39)$$

*Derivadas*

$$J_n' = J_{n-1} - \frac{n}{v} J_n = -J_{n+1} + \frac{n}{v} J_n \quad (7.40)$$

$$N_n' = N_{n-1} - \frac{n}{v} N_n = -N_{n+1} + \frac{n}{v} N_n \quad (7.41)$$

*Integrales*

$$\int v^n J_{n-1}(v) dv = v^n J_n(v) \quad (7.42)$$

$$\int v^{-n} J_{n+1}(v) dv = -v^{-n} J_n(v) \quad (7.43)$$

$$\int v^n N_{n-1}(v) dv = v^n N_n(v) \quad (7.44)$$

$$\int v^{-n} N_{n+1}(v) dv = -v^{-n} N_n(v) \quad (7.45)$$

De la ecuación (7.46), igualando partes reales e imaginarias, se deducen las siguientes relaciones:

Para  $0 \leq z < \rho$ ,

$$\int_0^\infty e^{jkz} J_0(k\rho) dk = (\rho^2 - z^2)^{-1/2} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(kz) J_0(k\rho) dk &= (\rho^2 - z^2)^{-1/2} \\ \int_0^\infty \text{sen}(kz) J_0(k\rho) dk &= 0 \end{aligned} \quad (7.47)$$

Para  $z > \rho$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(kz) J_0(k\rho) dk &= 0 \\ \int_0^\infty \text{sen}(kz) J_0(k\rho) dk &= (\rho^2 - z^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (7.48)$$

**7.1.3.3.4 Coordenadas esféricas**

Como en los casos anteriores, si la ecuación de Laplace admite una solución de la forma:

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi) \Theta(\theta) \quad (7.49)$$

La ecuación (7.10) se transforma en las tres siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R &= 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi &= 0 \end{aligned}$$

Con  $\mu = \cos \theta$ ,

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 - n^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right) + \left( n(1 + m) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right) \Theta = 0$$

Las soluciones respectivas dependen de la simetría del problema y las correspondientes condiciones de frontera.

Los casos más frecuentes tienen simetría azimutal, es decir, no dependen de  $\varphi$ , por tanto  $m = 0$ . En estos casos:

$$\begin{aligned} R(r) &= A_n r^n + A'_n r^{-(n+1)} \\ \Theta(\theta) &= C_n P_n(\mu) + C'_n Q_n(\mu) \end{aligned} \quad (7.50)$$

$P_n(\mu)$  y  $Q_n(\mu)$  son los polinomios de Legendre de primera y segunda especie, que corresponden a la solución de la tercera de las ecuaciones anteriores conocida como ecuación de Legendre.

Si además el potencial no depende del radio, la solución es de la forma,

$$V(\theta) = C \ln(\tan(\theta/2)) + C' \quad (7.51)$$

En el caso de no tener simetría azimutal la solución es de la forma,

$$\begin{aligned} R(r) &= A_n r^n + A'_n r^{-(n+1)} \\ \Theta(\theta) &= C_n P_n^m(\mu) + C'_n Q_n^m(\mu) \\ \Phi(\varphi) &= B_m \cos(m\varphi) + B'_m \operatorname{sen}(m\varphi) \quad \text{para } m \neq 0 \\ \Phi(\varphi) &= B\varphi + B' \quad \text{para } m = 0 \end{aligned} \quad (7.52)$$

$P_n^m$  y  $Q_n^m$  son las funciones asociadas de Legendre de primera y segunda especie.

### Polinomios de Legendre

Los primeros cuatro polinomios ( $\mu = \cos \theta$ ) son:

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1 & Q_0(\mu) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \\ P_1(\mu) &= \mu & Q_1(\mu) &= P_1(\mu)Q_0(\mu) - 1 \\ P_2(\mu) &= -\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) & Q_2(\mu) &= P_2(\mu)Q_0(\mu) - \frac{3}{2}\mu \\ P_3(\mu) &= -\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) & Q_3(\mu) &= P_3(\mu)Q_0(\mu) - \frac{5}{2}\mu^2 + \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (7.53)$$

### Fórmula de Rodrigues

$$\begin{aligned} P_n(\mu) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \\ Q_n(\mu) &= \frac{1}{2} P_n(\mu) \ln \left( \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right) - W_{n-1} \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$W_{n-1} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} P_{m-1}(\mu) P_{n-m}(\mu) ; \text{ con } W_{-1} = 0$$

Estas fórmulas nos dan cualquier polinomio.

*Fórmulas de recurrencia*

$$(2n + 1)\mu P_n(\mu) = nP_{n-1}(\mu) + (n + 1)P_{n+1}(\mu) \quad (7.55)$$

*Derivadas e integrales*

$$P'_{n+1}(\mu) - P'_{n-1}(\mu) = (2n + 1)P_n(\mu) \quad (7.56)$$

$$\int P_n(\mu) d\mu = \frac{1}{2n + 1} (P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)) \quad (7.57)$$

$$P'_n(\mu) = -\frac{n(n + 1)}{1 - \mu^2} \int P_n(\mu) d\mu \quad (7.58)$$

*Ortogonalidad*

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{1}{2n + 1} \delta_{nm} \quad (7.59)$$

$\delta_{nm} = 1$  para  $n = m$  y cero cuando  $n \neq m$ .

*Potencial debido a una carga puntual*

Podemos expresar el potencial debido a una carga puntual  $q$ , situada en el punto  $r = R$ , mediante los polinomios de Legendre.

1) Para puntos con  $r < R$ ,

$$V_1(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\mu) \quad (7.60)$$

2) Para puntos con  $r > R$ ,

$$V_1(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_0^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\mu) \quad (7.61)$$

#### 7.1.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON

La ecuación de Poisson (7.6) se utiliza cuando en el medio entre conductores existe una densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ .

Se resuelve sumando una solución particular a la solución de la ecuación de Laplace, es decir,

$$V(\mathbf{r}) = \text{Solución particular} + S. \text{ complementaria} \quad (7.62)$$

La solución particular debe satisfacer la ecuación (7.6) no homogénea, y la complementaria la ecuación de Laplace que hemos estudiado en apartados anteriores.

El potencial  $V(\mathbf{r})$  obtenido debe satisfacer las condiciones en los límites del problema.

La forma de obtener la solución particular depende de cada tipo de problema.

El método de la función de Green permite resolver las ecuaciones de Laplace y Poisson con unas condiciones de frontera determinadas. Para su estudio véanse los libros [7] y [16] de la bibliografía recomendada.

Un estudio más detallado sobre las soluciones aportadas en los apartados anteriores se puede encontrar en la bibliografía indicada al final del libro.

## 7.2 PROBLEMAS

## PROBLEMA 7.1

Dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  se sitúan frente a un plano conductor indefinido como indica la figura P7.1a.

Calcular la fuerza ejercida sobre la carga  $q_2$ .

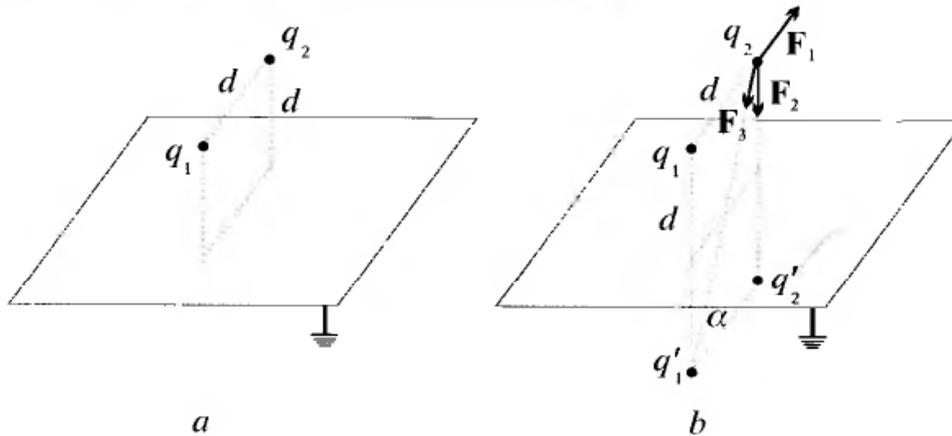


Figura P7.1

## Solución

Debido a la presencia del plano conductor, la fuerza sobre  $q_2$  se calcula utilizando el método de imágenes. Las posiciones respectivas de las cargas imagen se obtienen teniendo en cuenta lo dicho en el apartado 7.3.1; el resultado se muestra en la figura P.7.1b. La fuerza sobre  $q_2$  es la suma de las ejercidas por la carga  $q_1$  su imagen  $q_1'$  y la imagen de  $q_2$ ,  $q_2'$ . Es decir, con las fuerzas indicadas en la figura P7.1b,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2}{4d^2} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\cos \alpha}{5d^2} \mathbf{u}_x - \frac{\sin \alpha}{5d^2} \mathbf{u}_z \right)$$

Observando la figura P7.1b, deducimos que,

$$\cos \alpha = \frac{d}{d\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} ; \quad \sin \alpha = \frac{2d}{d\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Sustituyendo y realizando operaciones,

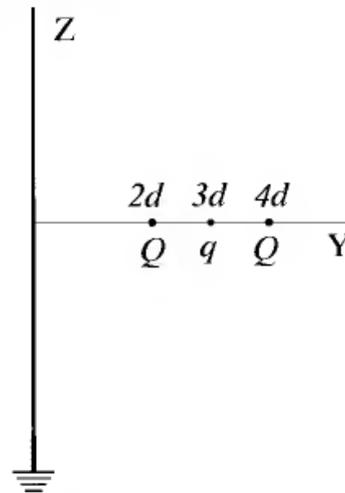
$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left( -1 + \frac{\sqrt{5}}{25} \right) \mathbf{u}_x - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left( \frac{1}{4} q_2^2 + \frac{2\sqrt{5}}{25} q_1 q_2 \right) \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 7.2**

Frente a un plano conductor indefinido, unido a tierra, tenemos dos cargas puntuales  $Q$ . La distancia de las cargas al plano se indica en la figura P7.2.

1) Calcular la fuerza sobre una carga  $q$  situada en el punto intermedio  $(0, 3d, 0)$ .

2) Obtener la energía necesaria para trasladar dicha carga  $q$  desde el infinito hasta el punto  $(0, 3d, 0)$ .

**Figura P7.2****Solución**

Podemos aplicar el método de las imágenes para resolver el problema de cargas puntuales frente a un plano conductor infinito en las direcciones X y Z. En este caso las cargas imagen de las fijas son,  $-Q$  en  $(0, -2d, 0)$  y  $-Q$  en  $(0, -4d, 0)$ . También hay que tener en cuenta la carga imagen de la carga problema  $q$  que es  $-q$  en  $(0, -3d, 0)$ .

1) *Fuerza sobre la carga  $q$*

Resolvemos ahora el problema de hallar la fuerza sobre una carga  $q$  situada en  $(0, 3d, 0)$  en presencia de las otras dos cargas fijas más las tres cargas imagen. Aplicamos la expresión de la fuerza entre cargas puntuales:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{(3d-2d)^2} - \frac{Q}{(4d-3d)^2} + \right) \mathbf{u}_y \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{(4d+d)^2} + \frac{Q}{(8d-d)^2} + \frac{q}{(6d)^2} \right) \mathbf{u}_y \\ \mathbf{F} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[ Q \left( 1 - 1 - \frac{1}{25} - \frac{1}{49} \right) - q \frac{1}{36} \right] \mathbf{u}_y \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left( \frac{74}{1225}Q + \frac{1}{36}q \right) \mathbf{u}_y$$

2) *Energía para trasladar  $q$*

La energía necesaria para traer la carga  $q$  desde el infinito hasta el punto considerado es la diferencia entre la energía del sistema antes de trasladar la carga y la que tiene después.

Antes,

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 2 \frac{Q_1 Q_2}{2d} + 2 \frac{Q_1 Q'_1}{4d} + 2 \frac{Q_1 Q'_2}{6d} + 2 \frac{Q_2 Q'_1}{6d} + 2 \frac{Q_2 Q'_2}{8d} + 2 \frac{Q'_1 Q'_2}{2d} \right)$$

Como  $Q_1 = Q_2 = Q$  y  $Q'_1 = Q'_2 = -Q$ ,

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} - \frac{1}{3d} - \frac{1}{3d} - \frac{1}{4d} + \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{7}{12}$$

Cuando todas las cargas están en sus posiciones finales la energía es igual a la anterior más la de interacción de las cargas  $q$  y  $q' = -q$  con todas, es decir,

$$W'_e = W_e + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 2 \frac{qQ_1}{d} + 2 \frac{qQ_2}{d} + 2 \frac{qQ'_1}{5d} + 2 \frac{qQ'_2}{7d} + 2 \frac{qq'}{6d} \right. \\ \left. + 2 \frac{q'Q'_1}{d} + 2 \frac{q'Q'_2}{d} + 2 \frac{q'Q_1}{5d} + 2 \frac{q'Q_2}{7d} \right)$$

Sustituyendo los valores respectivos de las cargas,

$$W'_e = W_e + \frac{1}{2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 d} \left( 8 - \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \right) - \frac{1}{6} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = W_e + \frac{116}{35} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 d} - \frac{1}{6} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

La diferencia entre las dos será la energía pedida,

$$W = W'_e - W_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left( \frac{116}{35}Q - \frac{q}{6} \right)$$

### PROBLEMA 7.3

Tenemos dos cargas  $q$  situadas respectivamente en los puntos  $(0, 1, 1)$  y  $(0, 1, -1)$ , frente a un plano conductor indefinido y unido a tierra como muestra la figura P7.3.1.

Calcular el trabajo para transportar una carga  $Q$  desde el infinito hasta el punto  $P(0, 1, 0)$ .

#### Solución

Se resuelve por el método de las imágenes;  $q_1$  y  $q_2$  son las cargas estáticas inicialmente dispuestas como se ve en la figura P7.3.2;  $q'_1$  y  $q'_2$  son sus

imágenes;  $Q$  es la carga que, inicialmente en  $\infty$ , llega al punto P;  $Q'$  es su imagen.

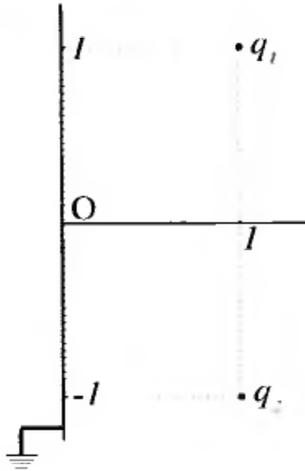


Figura P7.3.1

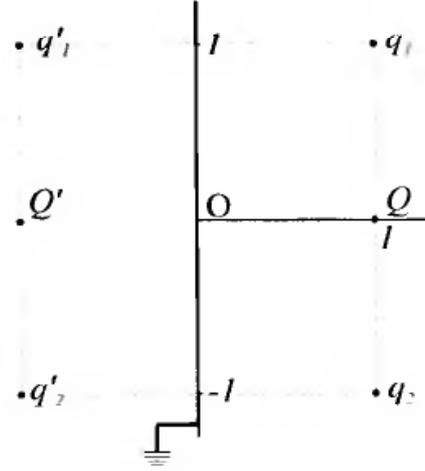


Figura P7.3.2

El trabajo necesario para traer  $Q$  del infinito es igual a la diferencia entre la energía del sistema con  $Q$  en el infinito y la que tiene cuando  $Q$  se sitúa frente al plano en el punto P.

La energía debida a las cargas estáticas,  $q_1$  y  $q_2$ , sus imágenes  $q'_1$  y  $q'_2$  es,

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( 2 \frac{q_1 q_2}{2} + 2 \frac{q_1 q'_1}{2} + 2 \frac{q_1 q'_2}{2\sqrt{2}} + 2 \frac{q_2 q'_2}{2} + 2 \frac{q_2 q'_1}{2\sqrt{2}} + 2 \frac{q_1 q'_2}{2} \right)$$

Como  $q_1 = q_2 = q$  y  $q'_1 = q'_2 = -q$ ,

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} \left( 1 - 1 - 1 + 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

En el segundo caso la energía será igual a la anterior más los términos que proporciona la interacción de las cargas  $Q$  y  $Q'$  con todas las cargas. La distancia entre  $Q$  y las cargas  $q'_1$  y  $q'_2$  es  $\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ . Lo mismo ocurre con la distancia entre  $Q'$  y  $q_1$  y  $q_2$ .

$$W'_e = W_e + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( 2 \frac{Q q_1}{1} + 2 \frac{Q q_2}{1} + 2 \frac{Q q'_1}{\sqrt{5}} + 2 \frac{Q q'_2}{\sqrt{5}} + 2 \frac{Q Q'}{2} \right. \\ \left. + 2 \frac{Q' q_1}{\sqrt{5}} + 2 \frac{Q' q_2}{\sqrt{5}} + 2 \frac{Q' q'_1}{1} + 2 \frac{Q' q'_2}{1} \right)$$

Sustituyendo los valores respectivos de las cargas,  $Q = -Q'$  y  $q_1 = q_2 = q$  y  $q'_1 = q'_2 = -q$  tenemos que,

$$W'_e = W_e + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( 2 \frac{Q q}{1} + 2 \frac{Q q}{1} - 2 \frac{Q q}{\sqrt{5}} - 2 \frac{Q q}{\sqrt{5}} - 2 \frac{Q^2}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -2\frac{Qq}{\sqrt{5}} - 2\frac{Qq}{\sqrt{5}} + 2\frac{Qq}{1} + 2\frac{Qq}{1} \\
 W'_e &= W_e + \frac{1}{2} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( 8 - \frac{8}{\sqrt{5}} \right) - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \\
 W'_e &= W_e + \frac{Qq}{\pi\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} = W_e + \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \left\{ q \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \frac{Q}{8} \right\}
 \end{aligned}$$

El trabajo que nos pide el problema es la diferencia entre las energía final e inicial del sistema:

$$W = W'_e - W_e = \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \left\{ q \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \frac{Q}{8} \right\}$$

**PROBLEMA 7.4**

Disponemos dos cargas,  $q$  y  $-q$ , frente a un plano conductor indefinido como muestra la figura P7.4.1. Calcular los términos monopolar, dipolar y cuadripolar del potencial debido al sistema indicado.

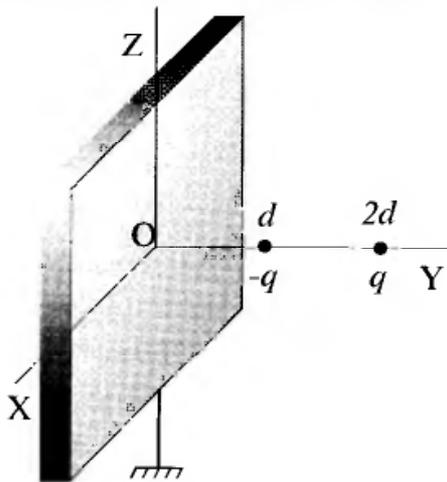


Figura P7.4.1

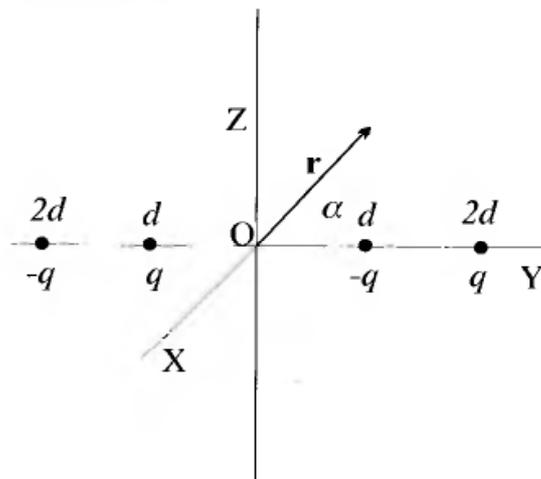


Figura P7.4.2

**Solución**

Aplicando el método de imágenes el sistema es equivalente al conjunto de cargas que muestra la figura P7.4.2.

Los distintos momentos monopolar dipolar y cuadripolar se obtienen aplicando el procedimiento habitual al sistema de cargas equivalente indicado anteriormente.

*Momento monopolar*

$$Q = \sum q_i = -q + q - q + q = 0$$

*Momento dipolar*

Este momento viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i = -q d \mathbf{u}_y + q 2d \mathbf{u}_y - q d \mathbf{u}_y + q 2d \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{p} = 2qd\mathbf{u}_y$$

*Momento cuadripolar*

La ecuación que permite calcular dicho momento es:

$$Q_{jk} = \sum_1^4 q_i (3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk})$$

$$j, k = x, y, z \quad y \quad \delta_{jk} \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Los términos  $jk$  en los que interviene simultáneamente dos variables son nulos por que siempre  $x = 0$  y  $z = 0$

Por tanto,

$$Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

Los términos en que  $j = k$  se verifica que,

$$Q_{xx} = -q(0 - d^2) + q(0 - 4d^2) + q(0 - d^2) - q(0 - 4d^2) = 0$$

$$Q_{yy} = -q(3d^2 - d^2) + q(12d^2 - 4d^2) + q(3d^2 - d^2) - q(12d^2 - 4d^2) = 0$$

Como se debe cumplir que,

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

se deduce que,

$$Q_{zz} = 0$$

De todo lo anterior se deduce que el único momento distinto de cero es el dipolar, en consecuencia el término dipolar es el único que contribuye al potencial en cualquier punto del espacio determinado por el vector de posición  $\mathbf{r}$ .

$$V(\mathbf{r}) = V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

$$V(\mathbf{r}) = V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd \cos \alpha}{r^2}$$

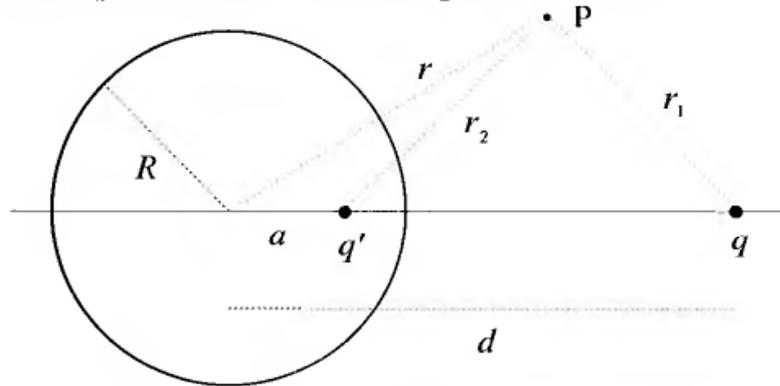
Dada la simetría cilíndrica del sistema equivalente, cuyo eje es Y, el potencial en la región con  $y \geq 0$  viene dado por la expresión anterior, siendo  $\alpha$  el ángulo formado por el vector de posición  $\mathbf{r}$  con el eje Y. En la zona donde  $y \leq 0$  el potencial es cero, ya que el plano apantalla los efectos de las cargas que están a su derecha.

**PROBLEMA 7.5**

Disponemos de una esfera metálica de radio  $R$  con una carga  $Q$ . A una distancia del centro  $d = 2R$  situamos una carga  $q$ .

1) Calcular la fuerza sobre la carga  $q$ .

2) Determinar la diferencia entre la fuerza calculada anteriormente y la que existe entre dos cargas puntuales  $Q$  y  $q$  situadas a una distancia  $2R$ . Comprobar su comportamiento cuando  $q$  tiende a cero.



**Figura P7.5**

**Solución**

1)

En primer lugar calculamos la distribución de potencial debida a la carga  $q$  en presencia de una esfera metálica con carga  $Q$ . Para ello utilizaremos la ecuación (7.14) del apartado 7.3.1.

El potencial en el punto  $P$ , véase la figura P7.5, se calcula aplicando el principio de superposición de la forma siguiente:

1º Potencial debido a la carga  $q$  en presencia de una esfera metálica unida a tierra (potencial cero). De la ecuación (7.14),

$$V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} \right)$$

$$r_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{d}| \quad ; \quad r_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{a}| \quad ; \quad q' = -\frac{R}{d}q \quad ; \quad a = \frac{R^2}{d}$$

2º Cuando la esfera no está unida a tierra su carga total es nula, por tanto para mantener la neutralidad y que la esfera sea una equipotencial, suponemos otra carga  $q_1 = -q'$  situada en el centro de la esfera. Esta carga contribuye al potencial en el punto  $P$  con el término,

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q'}{r}$$

3º Como en nuestro caso además la esfera tiene una carga  $Q$ , ésta contribuirá con el término,

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

La suma de los tres términos dará el potencial en P.

Para calcular la fuerza sobre la carga  $q$  obtenemos el campo debido a todas las cargas, menos la  $q$ , en el punto N donde se sitúa ésta.  $N = (0, y, 0)$ , ( $y = 2R$ ). Dicho potencial, teniendo en cuenta que para ese punto  $r = y = d = 2R$ ,  $r_2 = y - a$ , es,

$$V(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{y-a} + \frac{Q-q'}{y} \right)$$

Dada la simetría de la distribución de cargas con respecto al eje Y, dicho eje es normal a las equipotenciales y por tanto sólo hay componente  $E_y$  sobre él.

$$E_y = -\frac{dV(y)}{dy} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{(y-a)^2} + \frac{Q-q'}{y^2} \right)$$

Calculando los valores de  $a$  y  $q'$  que corresponden a  $q$  en la posición  $y = 2R$ , y sustituyéndolos en la expresión anterior, obtenemos:

$$\text{Para } y = 2R; \rightarrow a = R/2; \rightarrow q' = -q/2$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-q/2}{(2R - R/2)^2} + \frac{Q + q/2}{4R^2} \right)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{72} \frac{18Q - 7q}{R^2}$$

La fuerza será  $\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E} = qE_y\mathbf{u}_y$ ,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{72} \frac{18Q - 7q}{R^2} \mathbf{u}_y$$

## 2) Diferencia entre las fuerzas

La fuerza entre una carga  $Q$  en  $(0, 0, 0)$  y otra  $q$  en  $y = 2R$  es,

$$\mathbf{F}_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 4R^2} \mathbf{u}_y$$

La diferencia entre las dos fuerzas es,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{72} \frac{q^2}{R^2}$$

Cuando  $q$  tiende a cero la diferencia entre las dos fuerzas se anula, es decir, las dos tienden al mismo valor.

Este problema pone de manifiesto la influencia que tiene la presencia de un conductor sobre la fuerza entre un sistema de cargas. Además, cuando  $q \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\mathbf{F}_1}{q} \rightarrow \frac{\mathbf{F}_2}{q}$$

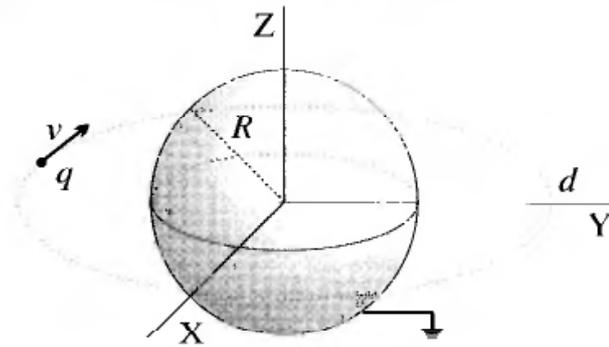
Como la expresión anterior corresponde a la definición de campo eléctrico,  $\mathbf{F}_1/q$  tiende al campo eléctrico de una esfera con carga  $Q$  sin presencia de otras cargas, que muestra la necesidad de definir el campo eléctrico de la forma,

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$$

**PROBLEMA 7.6**

Un sistema aislado está compuesto por una esfera metálica de radio  $R$  unida a tierra y una carga puntual  $q$  que gira con velocidad  $v$  sobre una órbita de radio  $d$ . El sistema está en el vacío.

Calcular la velocidad  $v$  de la carga  $q$  para que su órbita permanezca estable. La carga  $q$  tiene una masa  $m$  y  $d = 2R$ .



**Figura P7.6**

**Solución**

Como en el problema anterior utilizaremos la ecuación (7.14) del apartado 7.3.1.

Para que la carga permanezca estable en la órbita, la fuerza de naturaleza electrostática  $\mathbf{F}_e$  sobre  $q$  debe ser igual a la fuerza centrípeta  $\mathbf{F}_c$  sobre ella.

La fuerza electrostática es igual a la fuerza entre  $q$  y las cargas inducidas sobre la esfera, o lo que es lo mismo, entre dicha carga y su imagen. Mediante la ecuación (7.14),

$$q' = -\frac{R}{d}q \text{ situada a la distancia } a = \frac{R^2}{d}$$

La fuerza  $\mathbf{F}_e$  es,

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d-a)^2} \mathbf{u}_r = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{(d^2 - R^2)^2} \mathbf{u}_r$$

Como  $d = 2R$  y  $q' = -q/2$

$$\mathbf{F}_c = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{9R^2} \mathbf{u}_r$$

La fuerza centrípeta es,

$$\mathbf{F}_c = -m \frac{v^2}{d} \mathbf{u}_r = -m \frac{v^2}{2R} \mathbf{u}_r$$

Igualando y despejando  $v$  obtenemos:

$$v^2 = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{m^{-1}}{9R} \rightarrow v = \left( \frac{q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{m^{-1}}{9R} \right)^{1/2}$$

### PROBLEMA 7.7

Una esfera conductora de radio  $R$ , unida a tierra, está rodeada por un anillo circular de radio  $d = 2R$  como indica la figura P.7.7. Sobre el anillo se distribuye una densidad de carga lineal y uniforme  $\lambda_0$ .

Calcular el potencial y campo en un punto  $P$  situado sobre el eje  $Z$  a una distancia  $z_0 = 2R$ .

#### Solución

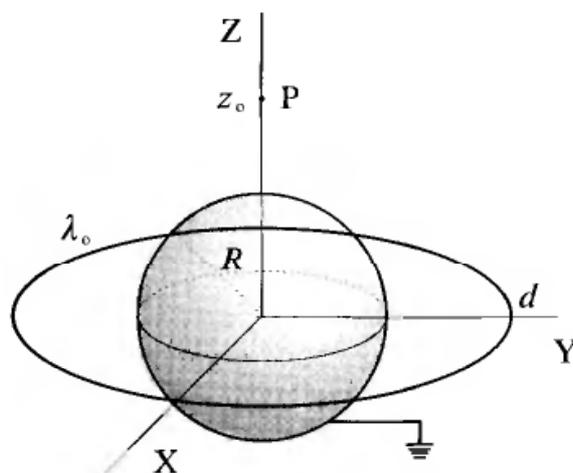


Figura P7.7

Aplicamos el método de imágenes indicado, en el apartado 7.3.1 y la ecuación (7.14), para calcular el potencial y campo debido a la densidad de cara  $\lambda_0$  y a las cargas inducidas sobre la esfera.

El sistema, en el exterior de la esfera, se comporta como si existiera una densidad  $\lambda_0$  sobre el anillo de radio  $d = 2R$  y una densidad de carga  $\lambda'_0$  sobre otro anillo de radio  $a = R^2/d = R/2$ .

Para obtener  $\lambda'_0$  suponemos,

$$q' = \lambda'_0 dl' = \lambda'_0 a d\varphi$$

$$q = \lambda_0 dl = \lambda_0 d d\varphi = \lambda_0 d d\varphi$$

Como en este caso

$$a = \frac{R}{2}; \quad d = 2R \text{ y } q' = -q \frac{R}{d} = -\frac{q}{2}$$

$$\lambda'_o \frac{R}{2} d\varphi = -\frac{1}{2} \lambda_o 2R d\varphi \rightarrow \lambda'_o = -2\lambda_o$$

1) *Cálculo del potencial*

Se obtiene sumando los potenciales debidos a cada distribución  $\lambda_o$  y  $\lambda'_o$ .

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_o 2R d\varphi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \int_0^{2\pi} \frac{\lambda'_o R d\varphi}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right)$$

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}_1 = 2R\mathbf{u}_r; \quad \mathbf{r}_2 = \frac{R}{2}\mathbf{u}_r$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = (z^2 + 4R^2)^{1/2}; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = (z^2 + R^2/4)^{1/2}$$

Llevando estos datos y que  $\lambda'_o = -2\lambda_o$  a las integrales tenemos,

$$V(z) = \frac{2}{4\pi\epsilon_o} \left( \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_o R d\varphi}{(z^2 + 4R^2)^{1/2}} - \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_o R d\varphi}{(4z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

$$V(z) = \frac{\lambda_o}{\epsilon_o} \left( \frac{R}{(z^2 + 4R^2)^{1/2}} - \frac{R}{(4z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

En el punto P  $z = 2R$ , con lo cual,

$$V(P) = \frac{\lambda_o}{\epsilon_o} \left( \frac{R}{(4R^2 + 4R^2)^{1/2}} - \frac{R}{(16R^2 + R^2)^{1/2}} \right) = \frac{\lambda_o}{\epsilon_o} \left( \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{17}\sqrt{17} \right)$$

2) *Campo eléctrico*

Dada la simetría de la distribución con respecto al eje Z, el campo sobre dicho eje es,

$$\mathbf{E} = -\frac{dV(z)}{dz} \mathbf{u}_z = \frac{\lambda_o}{\epsilon_o} \left( \frac{zR}{(z^2 + 4R^2)^{3/2}} - \frac{4zR}{(4z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_z$$

En el punto P,

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\lambda_o}{\epsilon_o R} \left( \frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{8\sqrt{17}}{289} \right) \mathbf{u}_z \simeq -2,575 \times 10^{-2} \frac{\lambda_o}{\epsilon_o R} \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 7.8

Tenemos una esfera conductora de radio  $R$  unida a tierra. Sobre una superficie esférica de radio  $d$ , concéntrica con la anterior, se distribuye una carga superficial con densidad  $\sigma$ .

Calcular el campo eléctrico para todo  $r > 0$ .

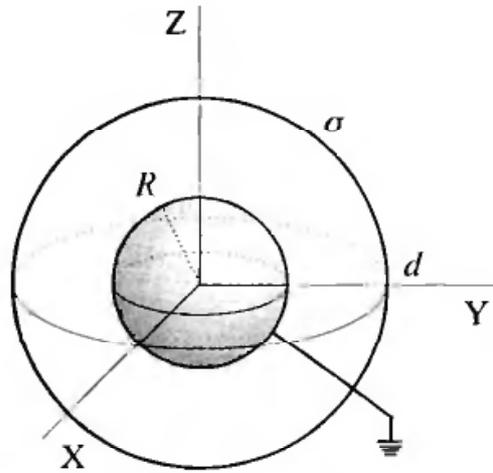


Figura P7.8

**Solución**

Para puntos exteriores a la esfera utilizamos el método de imágenes del apartado 7.3.1 y la ecuación (7.14). El sistema se comporta, en el exterior de la esfera de radio  $R$ , como dos distribuciones de carga, la  $\sigma$  y otra imagen  $\sigma'$  situada sobre una esfera de radio  $a = R^2/d$ . La distribución  $\sigma'$  proporciona, en el exterior de la esfera conductora, el mismo campo que las cargas inducidas sobre ella.

En primer lugar calculamos  $\sigma'$ .

$$q' = \sigma' ds' ; ds' = a^2 d\Omega \quad (\Omega = \text{ángulo sólido})$$

$$q = \sigma ds ; ds = d^2 d\Omega$$

Como  $q' = -q(R/d)$ ,

$$\sigma' a^2 d\Omega = -\frac{R\sigma}{d} d^2 d\Omega$$

Dado que  $a = R^2/d$ , sustituyendo y despejando  $\sigma'$  tendremos,

$$\sigma' = -\sigma \frac{d^3}{R^3}$$

*Cálculo del campo eléctrico*

En la zona donde  $r \leq R$  el campo  $E = 0$ , ya que estamos dentro de la esfera metálica unida a tierra.

Para  $a < r < d$

En este intervalo sólo se tiene en cuenta la distribución de carga imagen  $\sigma'$ .

Dada la simetría esférica de la distribución, aplicamos el teorema de Gauss, obteniéndose,

$$E_{r1} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi a^2 \sigma' = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi a^2 \sigma'$$

Sustituyendo los valores de  $a$  y  $\sigma'$  y despejando  $E_r$  obtenemos la siguiente ecuación,

$$E_{r1} = -\frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left(\frac{R^2}{d}\right)^2 \left(\sigma \frac{d^3}{R^3}\right) = -\frac{Rd \sigma}{\epsilon_0 r^2} \rightarrow \mathbf{E}_1 = -\frac{Rd \sigma}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

Para  $r > d$

Ahora intervienen las distribuciones  $\sigma$  y  $\sigma'$ , por tanto,

$$E_{r2} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi (a^2 \sigma' + d^2 \sigma)$$

$$E_{r2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (a^2 \sigma' + d^2 \sigma)$$

Teniendo en cuenta el valor de  $E_{r1}$ ,

$$E_{r2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} d(d - R) \rightarrow \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} d(d - R) \mathbf{u}_r$$

En  $r = d$  hay un salto del campo debido a la capa cuya densidad de carga es  $\sigma$ ,

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

**PROBLEMA 7.9**

Teniendo en cuenta la formación de imágenes en sistemas con planos conductores que forman ángulo  $\alpha$ , obtener las cargas imagen de la carga  $q$  indicada en la figura P7.9, ( $\alpha = 60^\circ$ ).

Calcular la fuerza sobre  $q$ .

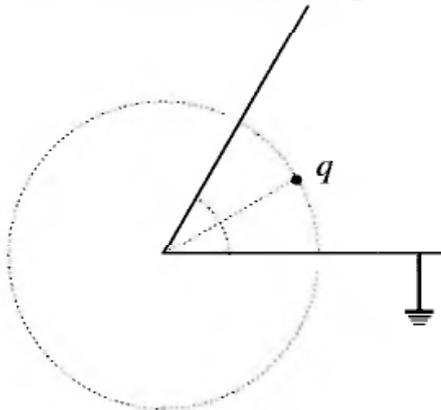


Figura P7.9.1

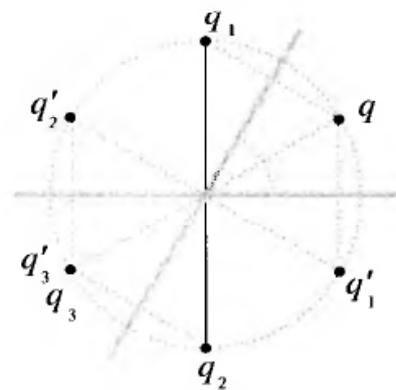


Figura P7.9.2

**Solución**

1) Cargas imagen

En el apartado 7.3.1 sobre el método de imágenes vimos como se obtienen cuando los planos conductores forman ángulo. El problema propuesto consiste en dos planos que forman un ángulo de  $60^\circ$  y la carga  $q$  está situada sobre la bisectriz a una distancia  $R$  del vértice  $O$ .

$$\alpha = 60^\circ = \pi/3 \rightarrow n = 3$$

En número de imágenes será  $N = 2n - 1 = 5$ .

Las imágenes están sobre la circunferencia de radio  $R$  como indica la figura P7.9.2.

Las cargas con subíndice par son positivas e iguales a  $q$ , las que lo tienen impar son iguales a  $-q$ .

2) *Fuerza sobre la carga  $q$*

Las fuerzas debida a  $q_1$  y  $q'_1$  son simétricas con respecto a la diagonal del ángulo  $\alpha$ . Lo mismo ocurre con  $q_2$  y  $q'_2$ . Como  $q_3$  coincide con  $q'_3$  y está sobre la diagonal, la fuerza correspondiente está dirigida hacia el vértice O.

Las respectivas fuerzas sobre la diagonal son:

$$F_1 = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q^2}{R^2} \cos 60^\circ \right); F_2 = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q^2}{3R^2} \cos 30^\circ \right); F_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4R^2}$$

En los cálculos anteriores hemos tenido en cuenta que el lado del hexágono inscrito es igual al radio, y para el triángulo equilátero es  $L = R\sqrt{3}$ .

Sumamos las fuerzas  $F_i$  y obtenemos la fuerza en la dirección de la diagonal,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} \left( -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Las componentes cartesianas de la fuerza  $F$  son:

$$F_x = F \cos 30^\circ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} \left( -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq -0,583 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2}$$

$$F_y = F \cos 60^\circ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} \left( -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \frac{1}{2} \simeq -0,336 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 7.10

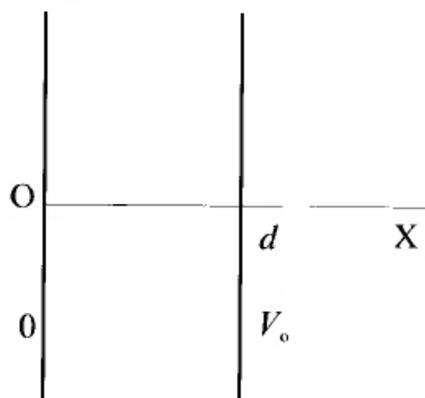
Calcular el potencial entre dos placas conductoras indefinidas, separadas por una distancia  $d$  y unidas a una batería de f.e.m.  $V_0$ .

#### Solución

Se trata de un problema donde el potencial sólo depende de una variable, que en este ejemplo vamos a suponer que es la variable  $x$ . La ecuación de Laplace, ecuación (7.8) se reduce a,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Mediante una doble integración podemos obtener la solución general, y al imponer las condiciones en los límites obtenemos el potencial.



**Figura P7.10**

En la primera integración se obtiene,

$$\frac{dV}{dx} = A$$

La ecuación anterior, integrada de nuevo, produce,

$$V = A x + A'$$

Calculamos  $A$  y  $A'$  imponiendo las condiciones en los límites a la solución general, que son:

$$\text{Para } x = 0 \quad V = 0 \rightarrow A' = 0$$

$$\text{Para } x = d \quad V = V_0 \rightarrow V_0 = A d \rightarrow A = V_0/d$$

Sustituyendo los valores de  $A$  y  $A'$  en la solución general obtenemos la solución del problema propuesto, es decir,

$$V(x) = \frac{V_0}{d} x$$

### PROBLEMA 7.11

Calcular el potencial en el recinto indicado en la figura P7.11, con las condiciones de contorno que se muestran en la figura P7.11:

$$V = 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0 \\ 0 < y < b \end{cases} ; V = 0 \text{ para } \begin{cases} y = 0 \\ 0 < x < a \end{cases}$$

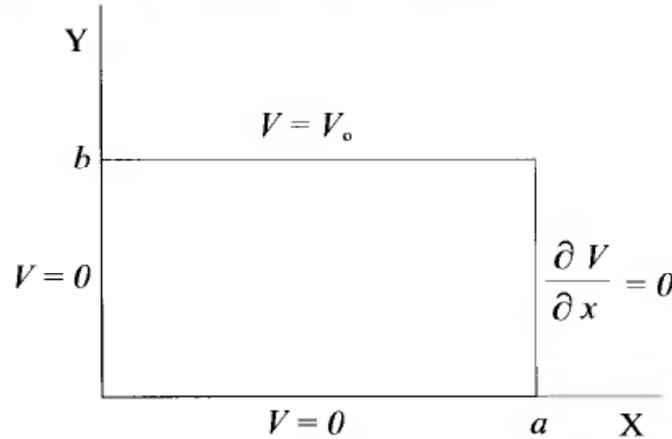
$$V = V_0 \text{ para } \begin{cases} y = b \\ 0 < x < a \end{cases} ; \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \text{ para } \begin{cases} x = a \\ 0 < y < b \end{cases}$$

### Solución

Se trata de un problema en el que la superficie que soporta las condiciones de contorno son planos normales al plano XY, al mismo tiempo que paralelos respectivamente al YZ y XZ. Con estas condiciones de contorno la ecuación

de Laplace se expresa en coordenadas cartesianas y en dos dimensiones. En otras palabras, se utiliza solución indicada por la ecuación (7.21) del apartado 7.3.3.1. Cada término del sumatorio es de la forma,

$$(A_n \operatorname{sen} \alpha x + A'_n \operatorname{cos} \alpha x) (B_n e^{\alpha y} + B'_n e^{-\alpha y})$$



**Figura 7.11**

Determinamos las constantes  $A_n$ ,  $A'_n$ ,  $B_n$  y  $B'_n$  mediante las condiciones de contorno o condiciones en los límites.

De  $V(0, y) = 0$  se deduce que

$$A'_n (B_n e^{\alpha y} + B'_n e^{-\alpha y}) = 0$$

para cada término del sumatorio, por tanto,

$$A'_n = 0$$

De  $V(x, 0) = 0$  se deduce que

$$A_n \operatorname{sen} \alpha x (B_n + B'_n) = 0$$

para cada término del sumatorio, en consecuencia,

$$B_n = -B'_n$$

Mediante la relación entre exponenciales y  $\operatorname{sh} \alpha y$  y agrupando las constante en una, podemos expresar la solución de forma simplificada,

$$V(x, y) = M_n \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sh} \alpha y$$

Quedan por determinar  $\alpha$  y los coeficiente  $M_n$ .

Utilizando las dos condiciones que nos quedan podemos calcular estas constantes.

$$\text{De } \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \text{ para } x = a$$

se deduce que para cada término,

$$M_n \alpha \operatorname{cos} \alpha a \operatorname{sh} \alpha y = 0$$

esto se cumple cuando,

$$\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2a}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (7.11.1)$$

Con esta condición vemos que hay infinitas soluciones, y como toda combinación lineal es solución, la expresión general queda de la forma,

$$V(x, y) = \sum_0^{\infty} M_n \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sh} \alpha y$$

Con  $\alpha$  de la forma indicada por la ecuación (7.11.1) obtenida antes.

Aplicando las condiciones de ortogonalidad entre las funciones  $\operatorname{sen} \alpha$  expresadas por la ecuación (7.22), y la última condición de contorno que nos queda por aplicar, determinamos los valores de  $M_n$ .

Para  $y = b$ ,  $V(x, b) = V_o$

$$V_o = \sum_0^{\infty} M_n \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{sen} \alpha x$$

Multiplicamos los dos miembros de la ecuación anterior por  $\operatorname{sen} \alpha$  e integramos entre los límites 0 y  $a$  para la variable  $x$ . Se sustituye el límite  $\pi$  por  $a$ , ya que  $\alpha$  es múltiplo de  $(\pi/2a)$ . La integral queda de la forma,

$$\int_0^a V_o \operatorname{sen} \alpha x \, dx = M_n \operatorname{sh} \alpha b \int_0^a \operatorname{sen}^2 \alpha x \, dx$$

El resto de los términos de la serie se anulan, dado que,

$$\int_0^a \operatorname{sen} \alpha' x \operatorname{sen} \alpha x \, dx = 0$$

$\alpha' \neq \alpha$  para todos los términos menos uno.

Integrando la ecuación obtenemos  $M_n$ .

El primer miembro da,

$$\left[ -\frac{V_o}{\alpha} \cos \alpha x \right]_0^a = \frac{V_o}{\alpha} = \frac{2aV_o}{(2n+1)\pi}$$

El segundo, como la integral del  $\operatorname{sen}^2 \alpha x$  es igual a  $a/2$ ,

$$M_n \operatorname{sh} \alpha b \int_0^a \operatorname{sen}^2 \alpha x \, dx = M_n \frac{a}{2} \operatorname{sh} \alpha b$$

Igualando términos se obtiene el valor de  $M_n$ ,

$$M_n = \frac{4V_o}{(2n+1)\pi \operatorname{sh} \alpha b}$$

La forma definitiva de la expresión del potencial en el recinto indicado es:

$$V(x, y) = \sum_0^{\infty} \frac{4V_o}{(2n+1)\pi \operatorname{sh} \alpha b} \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sh} \alpha y$$

Tomando  $\alpha$  los valores que indica la ecuación (7.11.1).

### PROBLEMA 7.12

Calcular el potencial en el interior de un recinto plano como el indicado en la figura P7.12, con las condiciones en los límites:

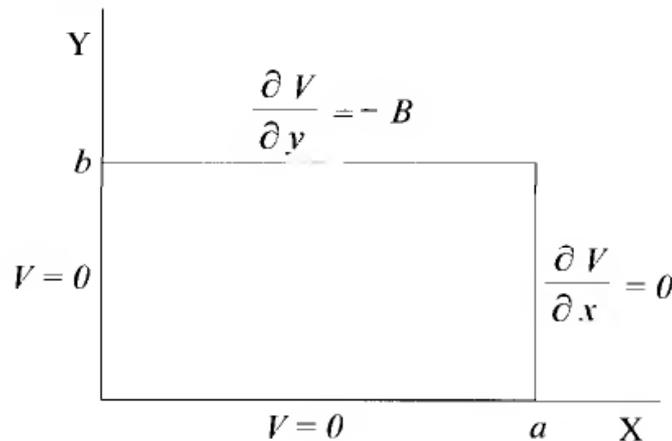
$$V(0, y) = 0; \quad V(x, 0) = 0; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=b} = -B$$

### Solución

Dada la forma del recinto y las condiciones de contorno, vemos que se trata de un problema de potencial en coordenadas cartesianas y dos dimensiones, por tanto se aplica el método de separación de variables expuesto en el apartado 7.3.2.1. La ecuación específica en este caso es la (7.21), y cada término del sumatorio es de la forma,

$$(A_n \operatorname{sen} \alpha x + A'_n \operatorname{cos} \alpha x) (B_n e^{\alpha y} + B'_n e^{-\alpha y})$$

Calculamos  $\alpha$  y los coeficientes  $A_n$ ,  $A'_n$ ,  $B_n$  y  $B'_n$  mediante las condiciones de contorno dadas en el problema.



**Figura P7.12**

De  $V(0, y) = 0$  se deduce que para cada término,

$$(A'_n \operatorname{cos} \alpha 0) (B_n e^{\alpha y} + B'_n e^{-\alpha y}) = 0 \rightarrow A'_n = 0$$

De  $V(x, 0) = 0$  obtenemos,

$$(A_n \operatorname{sen} \alpha x) (B_n + B'_n) = 0 \rightarrow B_n = -B'_n$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y la relación entre exponenciales y  $\operatorname{sh} \alpha y$ , podemos expresar el potencial de la forma,

$$V(x, y) = \sum M_n \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sh} \alpha y$$

Con las condiciones de contorno que restan y la ortogonalidad expresada por la ecuación (7.22) determinamos  $\alpha$  y  $M_n$ .

De  $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=a} = 0$  se deduce que para cada término

$$M_n \cos \alpha a \operatorname{sh} \alpha y = 0$$

Esta condición se cumple si,

$$\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{a}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots n \quad (7.12.1)$$

Para terminar, calculamos  $M_n$  utilizando la condición de contorno que resta y la ortogonalidad de la función  $\operatorname{sen} \alpha x$ .

De  $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=b} = -B$  se deduce que,

$$\sum M_n \alpha \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{ch} \alpha b = -B$$

Aplicamos ahora las condiciones de ortogonalidad, ecuación (7.22). Multiplicamos los dos miembros de la ecuación anterior por  $\operatorname{sen} \alpha x dx$  e integramos entre 0 y  $a$ .

Sustituimos el límite  $\pi$  por  $a$ , dado que  $\alpha$  es múltiplo de  $(\pi/2a)$ .

$$\int_0^a -B \operatorname{sen} \alpha x dx = \int_0^a M_n \alpha \operatorname{ch} \alpha b \operatorname{sen}^2 \alpha x dx = M_n \frac{\alpha a}{2} \operatorname{ch} \alpha b$$

El resto de los términos de la serie se anulan, dado que,

$$\int_0^a \operatorname{sen} \alpha' x \operatorname{sen} \alpha x dx = 0$$

$\alpha' \neq \alpha$  para todos los términos menos uno.

El primer miembro,

$$\int_0^a -B \operatorname{sen} \alpha x dx = \frac{B}{\alpha} [\cos \alpha x]_0^a = \frac{B}{\alpha} (\cos \alpha a - \cos 0) = -\frac{B}{\alpha}$$

ya que  $\alpha$  es un múltiplo de  $\pi/2$ . Despejando  $M_n$ , obtenemos,

$$M_n = -\frac{2}{\alpha a \operatorname{ch} \alpha b} \frac{B}{\alpha} = -\frac{8aB}{(2n+1)^2 \pi^2 \operatorname{ch} \alpha b}$$

La expresión para el potencial será:

$$V(x, y) = -\sum_0^{\infty} \frac{8aB}{(2n+1)^2 \pi^2 \operatorname{ch} \alpha b} \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sh} \alpha y$$

Con  $\alpha$  en la forma indicada por la ecuación 7.12.1.

### PROBLEMA 7.13

Tenemos dos conductores cilíndricos coaxiales indefinidos, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , véase la figura P7.13. Un sector del espacio entre cilindros está ocupado por un material de permitividad dieléctrica  $\epsilon = 4\epsilon_0$ .

1) Si aplicamos una diferencia de potencial (d.d.p.) entre los conductores  $V_o = V_1 - V_2$ , calcular la distribución de potencial entre los conductores.

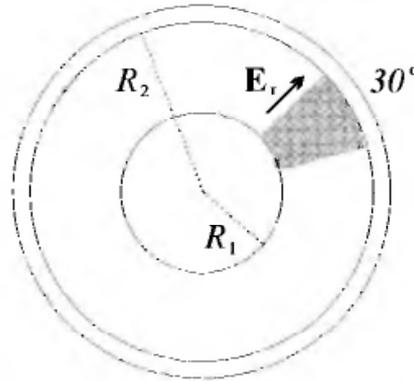
2) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ , así como la capacidad por unidad de longitud.

### Solución

#### 1) Potencial

El sistema es de simetría cilíndrica, no existiendo variación de potencial en la dirección del eje del cilindro, que la hacemos coincidir con el eje Z, por tanto la constante de separación  $k = 0$ . Además, como las componentes tangenciales del campo eléctrico se conservan al pasar del dieléctrico al vacío, no hay variaciones del potencial con el ángulo  $\varphi$ , en consecuencia  $n = 0$ . La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se reduce a,

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$



**Figura P7.13**

Mediante la primera integración,

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = C$$

Integrando de nuevo llegamos a la expresión general del potencial para el problema propuesto, que es,

$$V(\rho) = C \ln \rho + C'$$

Mediante las condiciones en los límites determinamos  $C$  y  $C'$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } \rho = R_1 \quad V = V_1 = C \ln R_1 + C' \\ \text{Para } \rho = R_2 \quad V = V_2 = C \ln R_2 + C' \end{array} \right| ; \quad V_o = V_1 - V_2$$

Mediante las ecuaciones anteriores determinamos  $C$  y  $C'$ ,

$$C = \frac{V_o}{\ln(R_1/R_2)} ; \quad C' = V_1 - C \ln R_1$$

Sustituyendo y operando  $V(\rho)$  será:

$$V(\rho) = \frac{V_o}{\ln(R_1/R_2)} \ln \rho + V_1 - \frac{V_o}{\ln(R_1/R_2)} \ln R_1$$

$$V(\rho) = \frac{V_o}{\ln(R_1/R_2)} \ln \frac{\rho}{R_1} + V_1$$

2) Vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$

Calculamos  $\mathbf{E}$  mediante la relación  $\mathbf{E} = -\nabla V$ .

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{u}_\rho = -\frac{d}{d\rho} V(\rho) \mathbf{u}_\rho = -\frac{V_o}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

Las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  se conservan en la superficie de separación de entre dieléctrico y vacío, por tanto  $E_\rho$  no depende del ángulo  $\varphi$  en todos los puntos del espacio comprendido entre los dos cilindros conductores.

En el vacío  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{D} = -\frac{\epsilon_o V_o}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

En el dieléctrico  $\mathbf{D} = 4\epsilon_o \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{D} = -\frac{4\epsilon_o V_o}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

La capacidad por unidad de longitud es,

$$C_L = \frac{Q_L}{V_o}; \text{ donde } Q_L = \frac{1}{L} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

Cómo  $d\mathbf{s} = L\rho d\varphi \mathbf{u}_\rho$

$$Q_L = \frac{L}{L} \left( \int_0^{\pi/6} \frac{4\epsilon_o V_o}{\ln(R_1/R_2)} \frac{\rho d\varphi}{\rho} + \int_0^{11\pi/6} \frac{\epsilon_o V_o}{\ln(R_1/R_2)} \frac{\rho d\varphi}{\rho} \right)$$

$$Q_L = \frac{\epsilon_o V_o}{\ln(R_1/R_2)} \left( \frac{4\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{5\pi}{2} \frac{\epsilon_o V_o}{\ln(R_1/R_2)}$$

$$C_L = \frac{Q_L}{V_o} = \frac{5\pi}{2} \frac{\epsilon_o}{\ln(R_1/R_2)}$$

### PROBLEMA 7.14

Calcular el potencial en el interior del recinto indicado en la figura P7.14.

Las condiciones en los límites son:

$$V = 0 \text{ para } \varphi = 0; \quad V = V_o \text{ para } \varphi = \pi/3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \text{ para } \rho = a; \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \text{ para } \rho = b$$

### Solución

El problema se resuelve en coordenadas cilíndricas, y en primer lugar se observa que no depende de  $z$ , por tanto  $k = 0$ . La dependencia del potencial

en este caso es de las coordenadas  $\rho$  y  $\varphi$ , por lo que recurrimos a soluciones de la forma indicada en la ecuación (7.34) o la (7.30).

$$(1) \quad V(\rho, \varphi) = \sum (C_n \rho^n + C'_n \rho^{-n}) (B_n \operatorname{sen} n\varphi + B'_n \operatorname{cos} n\varphi)$$

$$(2) \quad V(\rho, \varphi) = (C \ln \rho + C') (B\varphi + B')$$

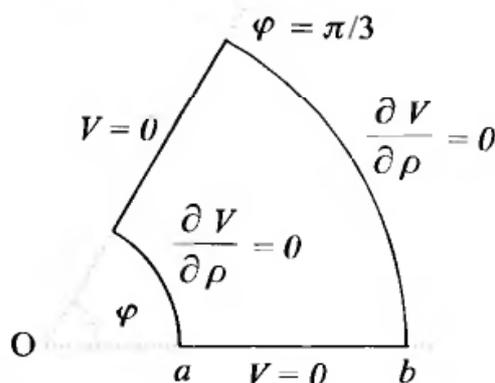


Figura P7.14

Considerando las condiciones para la derivada del potencial en  $\rho = a$  y  $\rho = b$ , los dos tipos de soluciones anteriores llevan a las siguientes relaciones:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = (C_n n a^{n-1} - C'_n n a^{-n-1}) (B_n \operatorname{sen} n\varphi + B'_n \operatorname{cos} n\varphi) = 0$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=b} = (C_n n b^{n-1} - C'_n n b^{-n-1}) (B_n \operatorname{sen} n\varphi + B'_n \operatorname{cos} n\varphi) = 0$$

Las dos ecuaciones sólo se cumplen simultáneamente si  $C_n = C'_n = 0$ , ya que cada una produce la siguiente relación,

$$C_n a^{2n} = C'_n ; \quad C_n b^{2n} = C'_n$$

La primera forma de potencial ensayada no cumple las condiciones de frontera para  $\rho$ , por lo que debemos probar el segundo tipo de solución indicado arriba.

Imponiendo las condiciones anteriores para la derivada del potencial tendremos,

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = \left( C \frac{1}{a} \right) (B\varphi + B') = 0$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=b} = \left( C \frac{1}{b} \right) (B\varphi + B') = 0$$

Las condiciones anteriores determinan que  $C = 0$ , por tanto, la única forma potencial posible es,

$$V(\varphi) = C' (B\varphi + B') = M\varphi + M'$$

Con las condiciones de contorno que faltan por aplicar calculamos  $B$  y  $B'$ .

$$\text{Para } \varphi = 0 \quad V = M' = 0 \rightarrow M' = 0$$

$$\text{Para } \varphi = \pi/3 \quad V = V_o = M\pi/3 \rightarrow M = \frac{3}{\pi}V_o$$

El potencial buscado tiene la forma,

$$V(\varphi) = \frac{3V_o}{\pi} \varphi$$

### PROBLEMA 7.15

Un cilindro conductor de longitud infinita y radio  $R$ , está descargado y en presencia de un campo eléctrico perpendicular al eje del cilindro, que en puntos muy alejados del eje es uniforme e igual a  $E \mathbf{u}_x$ , véase la figura P7.15.

Suponemos que la referencia de potencial es el plano  $YZ$ , es decir, para  $\varphi = \pi/2$ ,  $V = 0$ .

Calcular el potencial eléctrico en el exterior del cilindro.

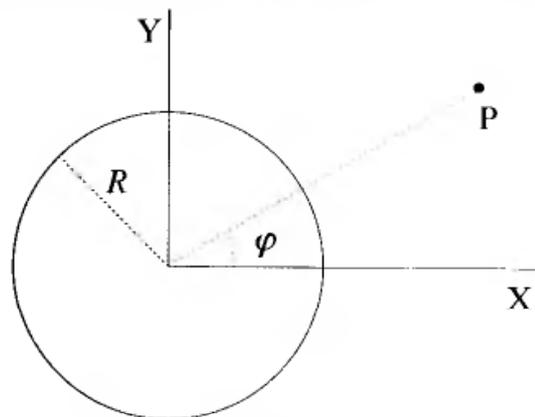


Figura P7.15

### Solución

Se trata de un problema en coordenadas cilíndricas, cuyo potencial no depende de la coordenada  $z$ , por tanto  $k = 0$ . Dada esta circunstancia, la solución general viene dada por la ecuación (7.34) sin términos en  $z$ , es decir, el potencial es de la forma,

$$V(\rho, \varphi) = \sum (B_n \operatorname{sen} n\varphi + B'_n \operatorname{cos} n\varphi) (C_n \rho^n + C'_n \rho^{-n})$$

Tanto el valor de  $n$  como las constantes se calculan mediante las condiciones del problema.

El potencial para  $\rho$  tendiendo a infinito es,

$$V = -Ex + V_o = -E\rho \cos \varphi + V_o$$

por tanto,

$$\sum (B_n \operatorname{sen} n\varphi + B'_n \operatorname{cos} n\varphi) (C_n \rho^n + C'_n \rho^{-n}) = -E \rho \operatorname{cos} \varphi + V_o$$

Esta ecuación se cumple cuando,

$$B_n = B'_n = 0 \text{ para } n > 1 \text{ y } B_1 = 0; \quad B'_1 C_1 = -E; \quad B'_0 C_0 = V_o$$

Con estos valores el potencial se reduce a,

$$V(\rho, \varphi) = (V_o + B'_0 C'_0) + (-E \rho + C'_1 B'_1 \rho^{-1}) \operatorname{cos} \varphi$$

De  $V = 0$  para  $\varphi = \pi/2$  y  $n =$  entero en cualquier valor de  $\rho$ , se deduce que,

$$(V_o + B'_0 C'_0) = 0$$

Por otra parte, dado que  $V = 0$  en el plano ZY, para  $\rho = R$  y cualquier valor de  $\varphi$ ,  $V = 0$ , es decir,

$$(-E R + C'_1 B'_1 R^{-1}) \operatorname{cos} \varphi = 0$$

por tanto,

$$C'_1 B'_1 = E R^2$$

Sustituyendo los valores de las constantes obtenemos el potencial:

$$V(\rho, \varphi) = -E \left( \rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \operatorname{cos} \varphi$$

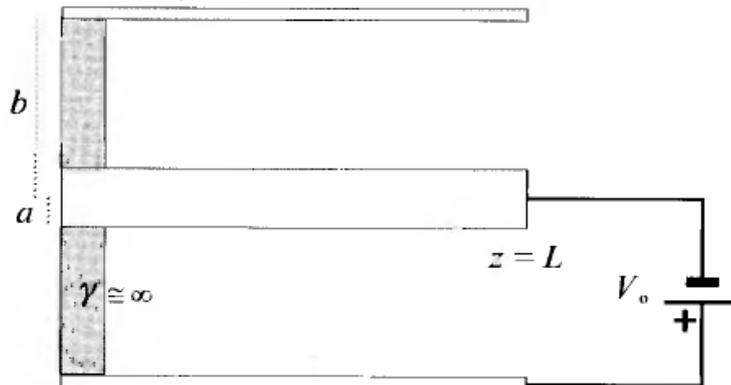
**PROBLEMA 7.16**

Tenemos un sistema de conductores coaxiales, de longitud  $L$ , radios  $a$  y  $b$ , cuya sección longitudinal se muestra en la figura P7.16. Se aplica una batería como indica la citada figura.

Calcular el potencial en la zona entre conductores, con las siguientes condiciones de contorno:

$$1^a \quad \rho = a : \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{V_o}{2L} ; \quad 2^a \quad \rho = b : \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_o}{2L}$$

$$3^a \quad z = 0 \quad \left| \begin{array}{l} V = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \end{array} \right. ; \quad 4^a \quad z = L \quad \left| \begin{array}{l} \rho = a \quad V = 0 \\ \rho = b \quad V = V_o \end{array} \right.$$



**Figura P7.16**

**Solución**

El problema se puede resolver en coordenadas cilíndricas, por lo que vamos a ver cual es la forma general del potencial en función de las condiciones del problema. En primer lugar observamos que dicho potencial no depende de  $\varphi$ , dada la simetría de los conductores con respecto al eje Z, es decir,  $n = 0$ .

Por otra parte, las primeras condiciones de contorno,

$$1^a \quad \rho = a : \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{V_o}{2L} ; \quad 2^a \quad \rho = b : \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_o}{2L}$$

determinan que la variación con  $z$  no puede ser de forma exponencial o sinusoidal, por tanto  $k = 0$ . La forma general del potencial será la expresada por la ecuación (7.30) sin la dependencia de  $\varphi$ , es decir,

$$V(\rho, z) = (Az + A')(C \ln \rho + C')$$

Realizando operaciones desarrollamos la expresión anterior y la ponemos en función de constantes que son producto de las anteriores,

$$V(\rho, z) = Mz \ln \rho + Nz + P \ln \rho + D$$

Ahora utilizamos las condiciones de contorno que nos quedan.

$$\text{De la } 3^a \quad z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} V = 0 \text{ se deduce que } (P \ln \rho + D) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \text{ se deduce que } P/\rho = 0 \end{array} \right.$$

Las condiciones anteriores producen los resultados siguientes:

$$P = 0 \quad \text{y} \quad D = 0$$

$$\text{De la } 4^a \quad z = L \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = a \quad V = 0 \quad \rightarrow \quad ML \ln a + NL = 0 \\ \rho = b \quad V = V_o \quad \rightarrow \quad ML \ln b + NL = V_o \end{array} \right.$$

Este sistema de ecuaciones nos permite obtener las constantes  $M$  y  $N$ ,

$$M = \frac{V_o}{L \ln(b/a)} ; \quad N = -\frac{V_o \ln(a)}{L \ln(b/a)}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión general, queda,

$$V(\rho, z) = \frac{V_o z}{L \ln(b/a)} (\ln \rho - \ln a) = \frac{V_o z}{L \ln(b/a)} \ln \frac{\rho}{a}$$

Que es la solución al problema propuesto.

**PROBLEMA 7.17**

Calcular el potencial dentro del cilindro indicado en la figura P7.17. El radio es  $R$  y la altura  $h$ . Las condiciones en los límites son:

$$\text{Para } z = 0 \quad V = 0 ; \quad \text{para } z = h \quad V = V_o \quad \text{y} \quad \text{para } \rho = R \quad V = 0$$

**Solución**

Se trata de un problema en coordenadas cilíndricas, que dada la simetría de las condiciones para el potencial en  $\rho = R$ , no hay variación del potencial con  $\varphi$ , por tanto  $n = 0$ .

Por otra parte, las condiciones de contorno o frontera para  $z = 0$  y  $z = h$ , nos indican que podemos utilizar una solución de la forma expresada por la ecuación (7.33) con  $k$  real y sin la dependencia de  $\varphi$ , es decir,

$$V(\rho, z) = \sum \left( A_k e^{kz} + A'_k e^{-kz} \right) \left( C_n J_0(k\rho) + C'_n N_0(k\rho) \right)$$

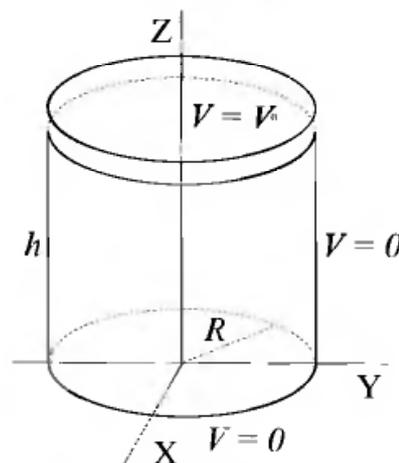
El potencial es finito para  $\rho = 0$ , en consecuencia y dado que  $N_0(k0) = \infty$  debe ser  $C'_n = 0$ .

La condición para  $z = 0$  produce la siguiente relación,

$$\text{De } V = 0 \text{ para } z = 0 \rightarrow \sum (A_k + A'_k) C_n J_0(k\rho) = 0$$

Es decir, para cada término,

$$A_k = -A'_k$$



**figura P7.17**

Utilizando la relación entre las exponenciales y  $\text{sh } kz$ , y poniendo  $M_n = A_k C_n$ , queda el potencial de la forma,

$$V(\rho, z) = \sum M_n \text{sh } kz J_0(k\rho)$$

Nos queda por calcular  $k$  y  $M_n$ . Determinamos  $k$  utilizando la condición para  $\rho = R$ .

De  $V = 0$  para  $\rho = R$  se deduce que cada término,

$$M_n \text{sh } kz J_0(kR) = 0$$

La condición anterior sólo se cumple para valores de  $k = k_{0m}$  que anulan la función  $J_0(kR)$ . En el libro de Murray R. Spiegel [14] existen tablas con los valores de  $kR$  que anulan la función  $J_0(kR)$ . Esto nos permite

calcular la serie de valores  $k_{0m}$ . Por ejemplo, el primer cero corresponde a  $k_{01}R = 2,40482$ , luego  $k_{01} = 2,40482/R$ .

Calculamos los coeficientes  $M_n$  mediante la condición del potencial para  $z = h$  y la ortogonalidad de las funciones de Bessel dada por la ecuación (7.38), que para el caso de  $n = 0$  es,

$$\int_0^R \rho J_0(k_{0m}\rho) J_0(k_{0p}\rho) d\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq p \\ (R^2/2) J_1^2(k_{0m}R) & \text{si } m = p \end{cases} \quad (7.17.1)$$

De  $V = V_o$  para  $z = h$  se deduce que,

$$V_o = \sum M_n \operatorname{sh} k_{0m}h J_0(k_{0m}\rho)$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por  $J_0(k_{0m}\rho)$ ,

$$\int_0^R V_o \rho J_0(k_{0m}\rho) d\rho = M_n \operatorname{sh} k_{0m}h \int_0^R \rho J_0^2(k_{0m}\rho) d\rho$$

Aplicando la ecuación (7.42) y la condición de ortogonalidad, tendremos que el primer miembro es igual a,

$$\int_0^R V_o \rho J_0(k_{0m}\rho) d\rho = \frac{V_o R}{k_{0m}} J_1(k_{0m}R)$$

El segundo miembro, teniendo en cuenta la relación (7.17.1) anterior, da como resultado,

$$M_n \operatorname{sh} k_{0m}h \int_0^R \rho J_0^2(k_{0m}\rho) d\rho = M_n \operatorname{sh} k_{0m}h \frac{R^2}{2} J_1^2(k_{0m}R)$$

Despejando  $M_n$  encontramos que,

$$M_n = \frac{2V_o}{k_{0m} R J_1(k_{0m}R) \operatorname{sh} k_{0m}h}$$

La forma final del potencial es:

$$V(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2V_o}{k_{0m} R J_1(k_{0m}R) \operatorname{sh} k_{0m}h} \operatorname{sh}(k_{0m}z) J_0(k_{0m}\rho)$$

### PROBLEMA 7.18

Calcular el potencial en el interior del recinto cilíndrico de radio  $R$  y altura  $h$  indicado en la figura P7.18. Las condiciones de frontera son:

$$\text{Para } z = 0 \quad V = 0, \text{ para } z = h \quad V = 0 \text{ y para } \begin{cases} \rho = R \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{cases} \quad V = V_o$$

#### Solución

Como se puede deducir de las condiciones de frontera, se trata de un problema solucionable en coordenadas cilíndricas.

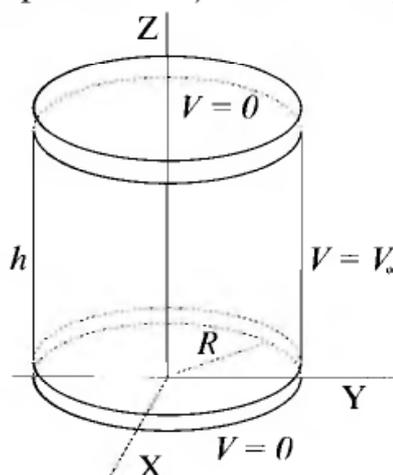
Las condiciones para el potencial sobre la superficie cilíndrica de radio  $R$  no dependen de  $\varphi$ , por tanto se deduce que  $n = 0$ .

Las ecuaciones utilizables son las (7.33), pero como en este caso el potencial es nulo en  $z = 0$  y  $z = h$ , la variación del potencial con  $z$  debe ser periódica, sinusoidal, es decir,  $k$  debe ser imaginario. Si  $k$  es imaginario se utilizan las funciones modificadas de Bessel  $I_n$  y  $K_n$ . Cada término de la serie será de la forma,

$$(A_n \operatorname{sen}(kz) + A'_n \operatorname{cos}(kz)) (C_n I_0(k\rho) + C'_n K_0(k\rho))$$

El potencial es finito para  $\rho = 0$ , como  $K_0(k0) = \infty$ , se deduce que  $C'_n = 0$ .

De la condición  $V = 0$  para  $z = 0$ , se deduce que  $A'_n = 0$ .



**Figura P7.18**

Poniendo  $M_n = A_n C_n$ , cada término del potencial queda de la forma,

$$V_n(\rho, z) = M_n \operatorname{sen}(kz) I_0(k\rho)$$

De  $V = 0$  para  $z = h$ , se deduce que,

$$M_n \operatorname{sen}(kh) I_0(k\rho) = 0$$

esta condición sólo se cumple si  $kh = n\pi$ , es decir,

$$k = \frac{n\pi}{h} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.18.1)$$

tenemos por tanto infinitos valores de  $k$  y, en consecuencia, infinitos términos en el sumatorio, cada uno para un valor de  $k$ .

Nos queda por determinar  $M_n$ . Para ello utilizaremos la condición del potencial en  $\rho = R$  y la ortogonalidad de las funciones  $\operatorname{sen}(kz)$  expresadas por la ecuación (7.22), cambiando el límite de integración  $\pi$  por  $h$ , dado que  $k$  es un múltiplo de  $(\pi/h)$ .

De la condición  $V = V_0$  para  $\rho = R$ , deducimos que,

$$V_o = \sum M_n \operatorname{sen}(kz) I_0(kR)$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por  $\operatorname{sen}(kz)$ , integrando entre 0 y  $h$  y aplicando las condiciones de ortogonalidad, tendremos,

$$\int_0^h V_o \operatorname{sen}(kz) dz = M_n I_0(kR) \int_0^h \operatorname{sen}^2(kz) dz$$

La integral del primer miembro es,

$$\int_0^h V_o \operatorname{sen}(kz) dz = \frac{V_o}{k} [-\cos(kz)]_0^h = \frac{2V_o}{k}$$

El segundo miembro queda de la forma,

$$M_n I_0(kR) \int_0^h \operatorname{sen}^2(kz) dz = M_n I_0(kR) \frac{h}{2}$$

Despejando  $M_n$  y teniendo en cuenta la relación (7.18.1) obtenida antes,

$$M_n = \frac{4V_o}{k I_0(kR) h} = \frac{4V_o}{n\pi I_0((n\pi/h) R)}$$

La expresión definitiva para el potencial es:

$$V(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V_o}{n\pi I_0((n\pi/h) R)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{h} z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{h} \rho\right)$$

### PROBLEMA 7.19

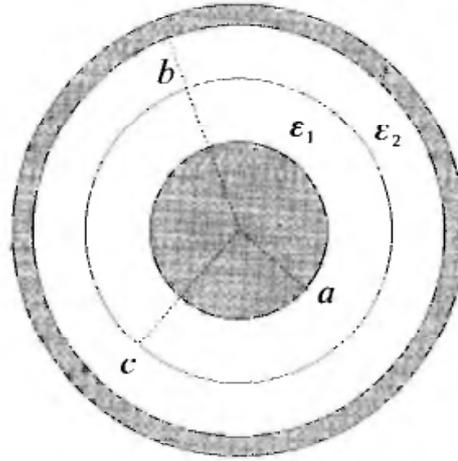
Entre dos esferas conductoras de radios  $a$  y  $b$  existen dos capas de dieléctrico como indica la figura P7.19. Las permitividades respectivas de las capas son  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ . La esfera de radio  $a$  está a un potencial cero y la de radio  $b$  a  $V_o$ .

Calcular el potencial en las dos capas dieléctricas.

#### Solución

Dada la forma que tienen los conductores y capas dieléctricas, se trata de un problema con solución en coordenadas esféricas. Además se da la circunstancia de que el potencial sobre las esferas conductoras no depende de  $\varphi$  ni de  $\theta$ , por tanto  $n = 0$  y  $m = 0$ . En definitiva, la ecuación de Laplace queda reducida a la forma siguiente,

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

**Figura P7.19**

Mediante la primera integración obtenemos que,

$$r^2 \frac{dV}{dr} = A$$

Con la segunda llegamos a una solución de la forma,

$$V(r) = \frac{A}{r} + A'$$

Esta solución corresponde a la ecuación (7.50) con  $n = 0$ .

Como hay dos capas dieléctricas, vamos a suponer el potencial en cada capa de la siguiente forma,

$$V_1(r) = A_1 r^{-1} + A'_1 \quad \text{para } r < c$$

$$V_2(r) = A_2 r^{-1} + A'_2 \quad \text{para } r > c$$

El potencial, si no hay baterías en la frontera, es continuo en dicha frontera. Las componentes normales del campo son discontinuas en dicha frontera. Las dos condiciones anteriores se expresan en la forma matemática siguiente,

$$V_1(c) = V_2(c); \quad \epsilon_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial r} \right)_c = \epsilon_2 \left( \frac{\partial V_2}{\partial r} \right)_c$$

Las otras dos condiciones de frontera son:

$$V_1(a) = 0; \quad V_2(b) = V_o$$

Utilizando las cuatro condiciones anteriores, calculamos  $A_1$ ,  $A'_1$ ,  $A_2$  y  $A'_2$ .

De  $V_2(b) = V_o$  se deduce que,

$$A_2 b^{-1} + A'_2 = V_o$$

De  $V_1(a) = 0$  se deduce que,

$$A_1 a^{-1} + A'_1 = 0$$

De  $\varepsilon_1 (\partial V_1 / \partial r)_c = \varepsilon_2 (\partial V_2 / \partial r)_c$  se deduce que,

$$\varepsilon_1 A_1 = \varepsilon_2 A_2$$

De  $V_1(c) = V_2(c)$  se deduce que,

$$(A_1 - A_2) c^{-1} = A'_2 - A'_1$$

Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones obtenido con las condiciones en los límites, calculamos las constantes. Los valores que se obtienen son:

$$A_1 = -\frac{\varepsilon_2 abc V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)} ; \quad A'_1 = \frac{\varepsilon_2 bc V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)}$$

$$A_2 = -\frac{\varepsilon_1 abc V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)} ; \quad A'_2 = \frac{(\varepsilon_2(c-a) + \varepsilon_1 a) b V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)}$$

Los potenciales  $V_1(r)$  y  $V_2(r)$  serán:

$$V_1(r) = -\frac{\varepsilon_2 abc V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)} \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon_2 bc V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)}$$

$$V_2(r) = -\frac{\varepsilon_1 abc V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)} \frac{1}{r} + \frac{(\varepsilon_2(c-a) + \varepsilon_1 a) b V_o}{\varepsilon_2 b(c-a) + \varepsilon_1 a(b-c)}$$

### PROBLEMA 7.20

Calcular el potencial en la región del espacio comprendida entre las semiesferas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , el plano XY y el cono de eje Z vértice en el origen y ángulo  $\theta = 30^\circ$ , véase la figura P7.20. El plano XY es conductor y se mantiene a potencial cero. El cono también es conductor y está a potencial  $V_o$ .

#### Solución

Las características del problema determinan que su solución se obtiene en coordenadas esféricas. Además como las condiciones en los límites son de simetría azimutal, no dependen de  $\varphi$ ,  $m = 0$ . Las condiciones en la frontera para  $r$  indican que no hay variación del potencial con dicha coordenada, por tanto la solución será de la forma indicada por la ecuación (7.51).

$$V(\theta) = C \ln(\tan(\theta/2)) + C'$$

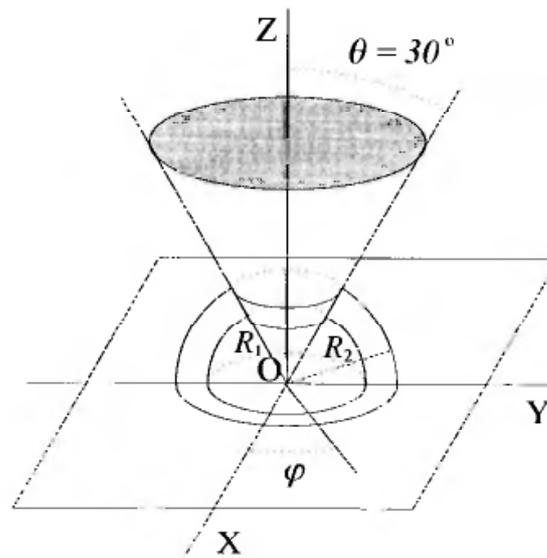


Figura P7.20

Calculamos  $C$  y  $C'$  con las condiciones en los límites.

De  $V = 0$  para  $\theta = \pi/2$  y cualquier  $r$  o  $\varphi$ , se deduce que,

$$C \ln(\tan(\pi/4)) + C' = 0 \rightarrow C \ln 1 + C' = 0$$

Como  $\ln(1) = 0$ , deducimos que  $C' = 0$ .

De  $V = V_o$  para  $\theta = \pi/6$  y cualquier  $r$  o  $\varphi$ , se deduce que,

$$C \ln(\tan(\pi/12)) = V_o \rightarrow C = \frac{V_o}{\ln(\tan(\pi/12))}$$

La forma final para el potencial es:

$$V(\theta) = \frac{V_o}{\ln(\tan(\pi/12))} \ln \left( \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = \frac{V_o}{\ln(2 - \sqrt{3})} \ln \left( \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

### PROBLEMA 7.21

Una esfera conductora de radio  $R$  tiene una carga  $Q$  y está situada en presencia de un campo eléctrico, que en puntos muy alejados del origen es  $\mathbf{E} = E\mathbf{u}_z$ .

El potencial sobre la esfera conductora es,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R}$$

Calcular el potencial en el exterior de la esfera conductora.

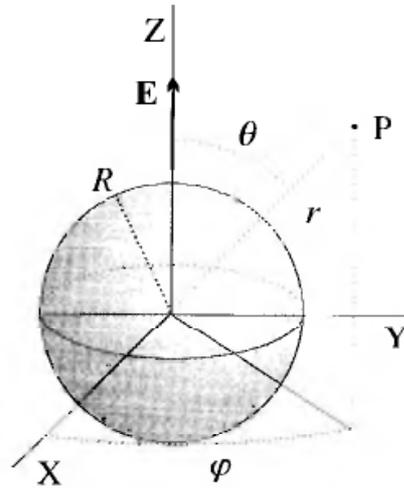


Figura P7.21

**Solución**

Las condiciones del problema muestran que su solución se obtiene en coordenadas esféricas y que tiene simetría azimutal, en consecuencia  $m = 0$  y se pueden utilizar la ecuación (7.50).

El potencial es finito para  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ , y como  $Q_n$  es infinita para estos valores, se deduce que  $C'_n = 0$ .

La forma del potencial con las condiciones anteriores y agrupando constantes queda,

$$V(r, \theta) = \sum \left( M_n r^n + M'_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\mu)$$

El potencial cuando  $r$  tiende a infinito es de la forma,

$$V(\theta, \infty) = -Er \cos \theta$$

Esta condición determina que,

$$M_n = 0 \text{ para } n > 1 \text{ y } M_1 = -E$$

El potencial se puede expresar de la forma,

$$V(r, \theta) = M_0 + M'_0 r^{-1} + (-Er + M'_1 r^{-2}) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left( M'_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\mu)$$

Nos queda por utilizar el potencial sobre la esfera.

$$\text{De } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}; \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \text{ se deduce que,}$$

$$M'_1 = ER^3; \quad M_0 = M'_n = 0; \quad M'_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

La forma final del potencial será:

$$V(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) Er \cos \theta$$

Si la carga  $Q = 0$  el potencial será:

$$V(r, \theta) = - \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) E r \cos \theta$$

### PROBLEMA 7.22

Un conductor unido a tierra de la forma que indica la figura P7.22, está en presencia de un campo, que para puntos muy alejados del origen es  $\mathbf{E} = -E \mathbf{u}_z$ .

Calcular el potencial para  $r > R$  y  $z > 0$ .

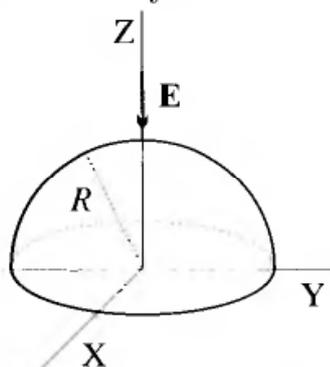


Figura P7.22

### Solución

Este problema tiene solución en coordenadas esféricas. El potencial tiene simetría azimutal en los límites, por lo que no depende de  $\varphi$ , es decir  $m = 0$ . La ecuación que aplicamos para la forma general del potencial es la ecuación (7.50).

$$V(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \left( A_n r^n + A'_n r^{-(n+1)} \right) \left( C_n P_n(\mu) + C'_n Q_n(\mu) \right)$$

El potencial no tiene ninguna singularidad, es distinto de  $\infty$ , para  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ ,  $\mu = \pm 1$  ( $\mu = \cos \theta$ ), por tanto  $C'_n = 0$ .

Agrupando las constantes el potencial queda de la forma:

$$V(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \left( M_n r^n + M'_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\mu)$$

Cuando  $r$  tiende a infinito,

$$V(r, \theta) = E r \cos \theta$$

Comparando esta ecuación con la forma general, se llega a la conclusión de que,

$$M_n = 0 \text{ para } n > 1$$

$$M_1 = E \text{ y } M_0 \text{ no determinado}$$

El potencial quedará,

$$V(r, \theta) = (E r + M'_1 r^{-2}) P_1(\mu) + \sum (M_n r^n + M'_n r^{-(n+1)}) P_n(\mu)$$

Con  $n \neq 1$ .

De  $V = 0$  para  $r = R$  y cualquier valor de  $\theta$ , se deduce que,

$$M'_1 = -E R^3$$

$$M_n R^n = -M'_n R^{-(n+1)} \quad (7.22.1)$$

De  $V = 0$  para  $\theta = \pi/2$  y cualquier valor de  $r$ , se deduce que,

$$M_n r^n = -M'_n r^{-(n+1)} \quad (7.22.2)$$

Las ecuaciones (7.22.1) y (7.22.2) solo se verifican simultáneamente si,

$$M_n = M'_n = 0 \quad n \neq 1$$

Sustituyendo todas las constantes nos queda la expresión general del potencial en este problema de la forma siguiente,

$$V(r, \theta) = \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) E r \cos \theta \quad \text{para } z > 0$$

### PROBLEMA 7.23

Una esfera de dieléctrico, cuya permitividad es  $\epsilon$  y el radio  $R$ , está situada en presencia de un campo eléctrico, que en puntos muy alejados del origen es  $\mathbf{E} = E \mathbf{u}_z$ ; véase figura P7.23.

Se toma el plano XY como referencia de potencial, es decir,  $V = 0$  para  $\theta = \pi/2$

Calcular el potencial y campo eléctrico en el interior y exterior de la esfera.

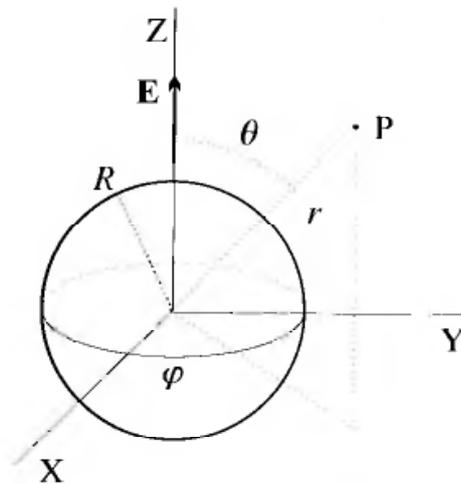


Figura P7.23

**Solución**

Como consecuencia de que la separación entre dos medios es una esfera y la forma del campo, el problema tiene solución en coordenadas esféricas. Además no hay variación del potencial con  $\varphi$ , por tanto  $m = 0$ . También para  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$  ( $\mu = \pm 1$ ) el potencial es finito y en consecuencia las constantes  $C'_n = 0$ , dado que  $Q_n$  es infinito para  $\mu = \pm 1$ . La expresión del potencial queda reducida a la siguiente,

$$V(r, \theta) = \sum \left( A_n r^n + A'_n r^{-(n+1)} \right) C_n P_n(\mu)$$

Distinguimos dos zonas en el potencial, una para  $r < R$  y la otra cuando  $r > R$ .

En la primera, teniendo en cuenta que el potencial es finito cuando  $r = 0$ , las constantes  $A'_n = 0$ . Agrupando constantes queda el potencial de la forma,

$$V_1(r, \theta) = \sum M_{n1} r^n P_n(\mu)$$

En la segunda zona, si agrupamos las constantes, tendremos,

$$V_2(r, \theta) = \sum \left( M_{n2} r^n + M'_{n2} r^{-(n+1)} \right) P_n(\mu)$$

Calculamos la constantes utilizando las condiciones siguientes:

1ª El valor del potencial en puntos alejados es,

$$V_2(\infty, \theta) = -E r \cos \theta$$

2ª Las condiciones para las componentes normales y tangenciales del campo en  $r = R$  siguientes:

$$\varepsilon \left( \frac{\partial V_1}{\partial r} \right)_R = \varepsilon_o \left( \frac{\partial V_2}{\partial r} \right)_R ; \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right)_R = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \right)_R$$

3ª El potencial  $V = 0$  cuando  $\theta = \pi/2$

De la 1ª  $V_2 = E r \cos \theta$  para  $r \rightarrow \infty$ , se deduce que,

$$-E r \cos \theta = \sum \left( M_{n2} r^n + M'_{n2} r^{-(n+1)} \right) P_n(\mu)$$

Esta condición se cumple, dada la forma de los polinomios de Legendre (ecuación (7.53)) cuando,

$$M_{n2} = 0 \text{ para } n > 1 \text{ y } M_{12} = -E$$

Es decir,

$$V_2(r, \theta) = M_{02} + (-E r + M'_{12} r^{-2}) \cos \theta + \sum M'_{n2} r^{-(n+1)} P_n(\mu)$$

El potencial  $V_1(r, \theta)$  lo podemos expresar de la forma siguiente,

$$V_1(r, \theta) = M_{01} + M_{11} r \cos \theta + \sum M_{n2} r^n P_n(\mu)$$

Con  $n > 1$  para los dos potenciales.

$$\text{De la 2ª } \varepsilon \left( \frac{\partial V_1}{\partial r} \right)_R = \varepsilon_o \left( \frac{\partial V_2}{\partial r} \right)_R \text{ se deduce que,}$$

$$\varepsilon M_{11} = -\varepsilon_o (E + 2M'_{12}R^{-3}) \quad (7.23.1)$$

$$\varepsilon M_{n1} n = -\varepsilon_o(n+1)R^{-(2n+1)}M'_{n2} \quad (7.23.2)$$

De la 2ª  $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta}\right)_R = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta}\right)_R$  se deduce que,

$$-M_{11} \operatorname{sen} \theta + M_{n1}R^{n-1} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} = (E - M'_{12}R^{-3}) \operatorname{sen} \theta + M'_{n2}R^{-(n+2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta}$$

Es decir,

$$M_{11} = -E + M'_{12}R^{-3} \quad (7.23.3)$$

$$M_{n1}R^{n-1} = M'_{n2}R^{-(n+2)} \quad (7.23.4)$$

Las igualdades anteriores nos llevan a lo siguiente:

1º- Las ecuaciones (7.23.2) y (7.23.4) sólo se cumplen simultáneamente si,

$$M_{n1} = M'_{n2} = 0$$

2º- Las ecuaciones (7.23.1) y (7.23.3) dan lugar al sistema:

$$\varepsilon M_{11} = -\varepsilon_o (E + 2M'_{12}R^{-3}) \quad (7.23.5)$$

$$M_{11} = -E + M'_{12}R^{-3}$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores obtenemos,

$$M_{11} = -\frac{3\varepsilon_o E}{\varepsilon + 2\varepsilon_o}; \quad M'_{12} = -ER^3 \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_o}$$

De  $V_1 = V_2 = 0$  para  $\theta = \pi/2$  se deduce que,  $M_{01} = M_{02} = 0$ .

Sustituyendo las constantes en los potenciales respectivos, tendremos que,

$$V_1(r, \theta) = -\frac{3\varepsilon_o E}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} r \cos \theta \quad \text{para } r < R$$

$$V_2(r, \theta) = -E \left( r - \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

Las dos ecuaciones anteriores nos permiten calcular el campo dentro y fuera de la esfera.

*Dentro de la esfera:*

Como  $r \cos \theta = z$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial z} \rightarrow \mathbf{E}_1 = \frac{3\varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} E \mathbf{u}_z$$

El campo eléctrico es uniforme dentro de la esfera.

*Fuera de la esfera:*

Calculamos las componentes  $E_r$  y  $E_\theta$ ,

$$E_r = -\frac{\partial V_2}{\partial r} = E \left( 1 + \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} = -E \left( 1 - \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta$$

El campo  $\mathbf{E} = E\mathbf{u}_z$  en coordenadas esféricas es,

$$\mathbf{E} = E \cos \theta \mathbf{u}_r - E \sin \theta \mathbf{u}_\theta$$

cuyas componentes coinciden con las obtenidas anteriormente para  $r \rightarrow \infty$ .

### PROBLEMA 7.24

Entre dos placas conductoras planoparalelas separadas por una distancia  $D$  e indefinidas, se distribuye una densidad de carga uniforme  $\rho_o$ .

Las placas se conectan a una d.d.p. de manera que,

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(D) = V_o$$

Calcular el potencial entre las placas.

#### Solución

Los límites para el potencial son dos planos perpendiculares al eje X. La densidad de carga no depende de la variable  $x$ . De las dos condiciones anteriores se infiere que la ecuación de Poisson para este problema es la siguiente:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho_o}{\varepsilon_o}$$

Integrando dos veces la ecuación anterior obtenemos la solución.

En la primera integración tendremos,

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_o}{\varepsilon_o} x + A$$

Con la segunda integración obtenemos la solución general,

$$V(x) = -\frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \frac{x^2}{2} + Ax + A'$$

La solución anterior engloba la solución de la ecuación de Laplace expresada por la ecuación (7.19).

Con las condiciones en los límites determinamos  $A$  y  $A'$ .

De  $V = 0$  para  $x = 0$ , se deduce que  $A' = 0$ .

De  $V = V_o$  para  $x = D$ , se deduce que,

$$V_o = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{D^2}{2} + A D$$

Despejando  $A$  en la última ecuación, tendremos,

$$A = \frac{V_o}{D} + \frac{\rho_o D}{\epsilon_o 2}$$

Sustituyendo las constante en la expresión general por el potencial y realizando operaciones queda dicho potencial de la forma siguiente:

$$V(x) = \frac{\rho_o}{2\epsilon_o} x(D - x) + \frac{V_o}{D} x$$

### PROBLEMA 7.25

Entre dos placas conductoras planoparalelas separadas por una distancia  $D$  e indefinidas, se distribuye una carga de la forma siguiente:

$$\rho = \rho_o \frac{x}{d} \text{ para } 0 \leq x \leq d; \quad \rho = \rho_o \text{ para } d \leq x \leq D$$

Las placas se conectan a una d.d.p., de manera que,  $V(0) = 0$  y  $V(D) = V_o$ .

- 1) Calcular el potencial entre placas.
- 2) Calcular el campo eléctrico en  $x = 0$  y en  $x = D$ .

#### Solución

1) Sólo hay variaciones de la densidad de carga con la variable  $x$ . Los límites para el potencial son dos planos perpendiculares al eje X. De las dos condiciones anteriores se infiere que la ecuación de Poisson para este problema es la siguiente,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o}$$

La solución de esta ecuación la podemos obtener mediante dos integraciones sucesivas.

Debemos distinguir dos zonas: Una donde  $\rho = \rho_o(x/d)$ , la otra cuando  $\rho = \rho_o$ .

La solución particular en la primera zona podemos calcularla mediante dos integraciones sucesivas. En la primera,

$$\frac{dV_1}{dx} = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o d} \frac{x^2}{2} + A_1$$

En la segunda queda,

$$V_1(x) = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o d} \frac{x^3}{6} + A_1 x + A'_1$$

Procediendo de forma análoga en la otra zona y considerando que ahora  $\rho = \rho_o$  obtenemos al siguiente solución,

$$V_2(x) = -\frac{\rho_o x^2}{\epsilon_o 2} + A_2 x + A'_2$$

Las expresiones anteriores incluyen la solución de la ecuación de Laplace dada por la ecuación (7.19), ya que las dos tienen términos de la forma  $Ax + A'$ .

Obtenemos las constantes utilizando las condiciones de frontera, que son: El potencial en  $x = 0$  y  $x = D$ , así como la continuidad del potencial y de las componentes normales del campo en  $x = d$ .

De  $V(0) = 0$ , se deduce que  $A'_1 = 0$

De  $V_1(d) = V_2(d)$ , deducimos que,

$$-\frac{\rho_o d^2}{\epsilon_o 6} + A_1 d = -\frac{\rho_o d^2}{\epsilon_o 2} + A_2 d + A'_2$$

De  $(dV_1/dx)_d = (dV_2/dx)_d$  se deduce que,

$$-\frac{\rho_o d}{\epsilon_o 2} + A_1 = -\frac{\rho_o d}{\epsilon_o} + A_2$$

De  $V(D) = V_o$ , deducimos,

$$V_o = V_2(D) = -\frac{\rho_o D^2}{\epsilon_o 2} + A_2 D + A'_2$$

Tenemos en total tres ecuaciones con tres incógnitas. La solución del sistema nos da,

$$A_1 = \frac{V_o}{D} + \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left( \frac{D}{2} - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{6D} \right)$$

$$A_2 = \frac{V_o}{D} + \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left( \frac{D}{2} + \frac{d^2}{6D} \right) \quad ; \quad A'_2 = -\frac{1}{6} \frac{\rho_o}{\epsilon_o} d^2$$

Los potenciales quedan definitivamente de la forma,

$$V_1(x) = -\frac{\rho_o x^3}{\epsilon_o d 6} + A_1 x$$

$$V_2(x) = -\frac{\rho_o x^2}{\epsilon_o 2} + A_2 x + A'_2$$

Siendo  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A'_2$  los valores obtenidos anteriormente.

2)

Calculamos el campo a partir de  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$ .

$$\mathbf{E}(0) = \left( -\frac{dV_1}{dx} \right)_0 = -A_1 \mathbf{u}_x = - \left( \frac{V_o}{D} + \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left( \frac{D}{2} - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{6D} \right) \right) \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E}(D) = \left( -\frac{dV_2}{dx} \right)_D = \left( \frac{\rho_o}{\epsilon_o} D - A_2 \right) \mathbf{u}_x$$

Sustituyendo el valor de  $A_2$  y operando tenemos,

$$\mathbf{E}(D) = - \left( \frac{V_o}{D} + \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left( \frac{d^2}{6D} - \frac{D}{2} \right) \right) \mathbf{u}_x$$

### PROBLEMA 7.26

En el espacio comprendido entre dos planos  $x = -d/2$  y  $x = d/2$ , tenemos una distribución de carga uniforme  $\rho_o$ .

Mediante la integración de la ecuación de Poisson, calcular el potencial y campo eléctrico dentro y fuera de la distribución.

#### Solución

La simetría de la distribución de carga determina que la ecuación de Poisson en este problema, dentro de la distribución, se reduce a la siguiente,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o}$$

Fuera de la distribución, la ecuación de Laplace será,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Para resolver el problema distinguiremos dos zonas: Una, donde existe carga, comprendida entre  $-d/2$  y  $d/2$  y la otra en el exterior, en la que  $|x| > d/2$ .

#### Primera zona

Se obtiene la solución mediante dos integraciones sucesivas de la ecuación de Poisson. En la primera integración queda,

$$\frac{dV_1}{dx} = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o}x + A_1$$

En la segunda obtenemos la solución general,

$$V_1(x) = -\frac{\rho_o}{2\epsilon_o}x^2 + A_1x + A'_1$$

Vemos que la solución lleva incluida la correspondiente a la ecuación de Laplace indicada por la ecuación (7.19).

Determinamos  $A_1$  y  $A'_1$  aplicando las siguientes condiciones: Dada la simetría de la distribución de carga, el campo es nulo para  $x = 0$ , ya que la distribución, indefinida en las direcciones de los ejes Y y Z, tiene la misma carga a un lado que a otro del plano YZ. Se toma como referencia de potencial el plano YZ ( $x = 0$ ).

De  $V_1 = 0$  para  $x = 0$ , se deduce que  $A'_1 = 0$ .

De  $\mathbf{E}(0) = -(dV_1/dx)_0 = 0$ , deducimos que  $A_1 = 0$ .

Por tanto el potencial en la zona donde existe carga es,

$$V_1(x) = -\frac{\rho_o}{2\epsilon_o}x^2 \quad \text{para} \quad -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$$

Mediante la relación  $\mathbf{E} = -\nabla V$  calculamos el campo,

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{dV_1}{dx} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o}x \mathbf{u}_x \quad \text{para} \quad -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$$

*Segunda zona*

La solución correspondiente es la indicada por (7.19).

$$V_2(x) = A_2 x + A'_2$$

Calculamos  $A_2$  y  $A'_2$  teniendo en cuenta la continuidad del potencial y las componentes normales del campo en los planos  $x = \pm(d/2)$ .

Mediante la continuidad de las componentes normales del campo,

$$\left(-\frac{dV_1}{dx}\right)_{d/2} = \left(-\frac{dV_2}{dx}\right)_{d/2} \rightarrow \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{d}{2} = -A_2$$

por tanto,

$$A_2 = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{d}{2}$$

La aplicación de la continuidad del potencial nos lleva a la siguiente relación,

$$-\frac{\rho_o}{2\epsilon_o} \frac{d^2}{4} = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{d^2}{4} + A'_2$$

despejando  $A'_2$  tendremos,

$$A'_2 = \frac{\rho_o d^2}{8\epsilon_o}$$

Sustituyendo el valor de las constantes tendremos el potencial en la segunda zona,

$$V_2(x) = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{d}{2}x + \frac{\rho_o d^2}{8\epsilon_o} \quad \text{para} \quad x > \frac{d}{2}$$

Obtenemos el campo mediante la relación  $\mathbf{E} = -\nabla V$ ,

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{dV_2}{dx} \mathbf{u}_x = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{d}{2} \mathbf{u}_x \quad \text{para} \quad x > \frac{d}{2}$$

Procediendo de forma similar en la zona de  $x$  negativa, obtenemos los siguientes resultados:

$$V_2(x) = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{d}{2}x + \frac{\rho_o d^2}{8\epsilon_o} \quad \text{para} \quad x < -\frac{d}{2}$$

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} \frac{d}{2} \mathbf{u}_x \quad \text{para} \quad x < -\frac{d}{2}$$

**PROBLEMA 7.27**

En el espacio entre dos conductores cilíndricos coaxiales e indefinidos, cuya sección transversal se muestra en la figura P7.27, se distribuye una densidad de carga  $\rho = \rho_o/r$ .

Mediante una batería se aplica una d.d.p. entre los conductores, de forma que  $V(a) = 0$  y  $V(b) = V_o$ .

Resolviendo la ecuación de Poisson, calcular el potencial entre los conductores coaxiales.

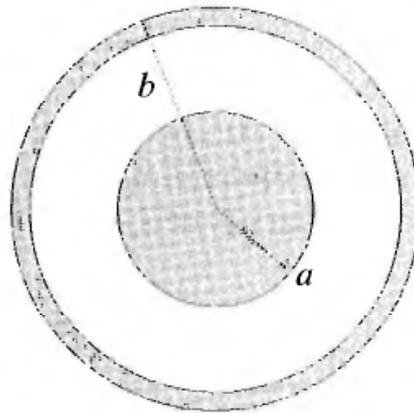
**Solución**

La simetría de las condiciones de contorno y de la distribución de carga nos indican que debemos utilizar coordenadas cilíndricas para la resolución del problema.

Dado que tanto la densidad de carga como los potenciales en los conductores no dependen de  $z$  ni de  $\varphi$ , se deduce que las constantes  $k$  y  $n$  son nulas. La ecuación diferencial se reduce a la forma siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o} = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o r}$$

En este caso utilizamos como coordenada radial  $r$  en lugar de  $\rho$  para no confundirla con la densidad de carga.

**Figura P7.27**

Integrando dos veces obtenemos la solución general.

$$r \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} r + C$$

la segunda integración produce el siguiente resultado,

$$V(r) = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o} r + C \ln r + C'$$

Vemos que incluye la solución  $C \ln r + C'$  correspondiente a la ecuación de Laplace.

Para calcular  $C$  y  $C'$  imponemos las condiciones de contorno.

De  $V(a) = 0$ , se deduce que,

$$-\frac{\rho_o}{\epsilon_o}a + C \ln a + C' = 0$$

De  $V(b) = V_o$ , se deduce que,

$$-\frac{\rho_o}{\epsilon_o}b + C \ln b + C' = V_o$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones determinamos  $C$  y  $C'$ , que son,

$$C = \frac{\rho_o(b-a) + V_o\epsilon_o}{\epsilon_o \ln(b/a)} \quad \text{y} \quad C' = \frac{\rho_o}{\epsilon_o}a - C \ln a = \frac{\rho_o}{\epsilon_o}a - \frac{\rho_o(b-a) + V_o\epsilon_o}{\epsilon_o \ln(b/a)} \ln a$$

Sustituyendo las constante y agrupando términos, la solución general es de la forma,

$$V(r) = -\frac{\rho_o}{\epsilon_o}(r-a) + \frac{\rho_o(b-a) + V_o\epsilon_o}{\epsilon_o \ln(b/a)} \ln(r/a)$$

### PROBLEMA 7.28

Calcular el potencial debido a un sistema formado por una esfera metálica de radio  $R$  a potencial  $V_o$ , rodeada por una distribución de carga cuya densidad es,

$$\rho = \rho_o R \frac{e^{-kr}}{r}$$

### Solución

Tanto las condiciones para el potencial sobre la esfera como la forma de la distribución de carga nos muestran que el problema tiene solución en coordenadas esféricas. No hay dependencia de  $\varphi$  ni de  $\theta$ , es decir, la ecuación diferencial se reduce a la siguiente,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o} = -\frac{\rho_o R e^{-kr}}{\epsilon_o r}$$

La ecuación anterior se resuelve sumando a la solución de la ecuación de Laplace dada por la ecuación (7.50) con  $n = 0$ , una solución particular.

Obtenemos la solución particular ensayando una de la forma siguiente,

$$V(r) = M \frac{e^{-kr}}{r}$$

Después de las sucesivas derivaciones en la ecuación de Poisson anterior, se comprueba que la solución se cumple si,

$$M = -\frac{\rho_o R}{\epsilon_o k^2}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$V(r) = -\frac{\rho_o R e^{-kr}}{\epsilon_o k^2 r}$$

Añadiendo la solución dada por la ecuación (7.50) con  $n = 0$ , tendremos que,

$$V(r) = -\frac{\rho_o R e^{-kr}}{\epsilon_o k^2 r} + A'_0 r^{-1} + A_0$$

Calculamos las dos constantes mediante las condiciones en los límites, que son:

$$V = 0 \text{ para } r \rightarrow \infty \text{ y } V = V_o \text{ para } r = R$$

De  $V = 0$  para  $r \rightarrow \infty$ , se deduce que  $A_0 = 0$ .

De  $V = V_o$  para  $r = R$ , deducimos,

$$V_o = -\frac{\rho_o R e^{-kR}}{\epsilon_o k^2 R} + A'_0 R^{-1}$$

$$A'_0 = V_o R + \frac{\rho_o R}{\epsilon_o k^2} e^{-kR}$$

Sustituyendo las constantes y agrupando términos, la solución general será de la forma,

$$V(r) = \frac{\rho_o R}{\epsilon_o k^2} \left( e^{-kR} - e^{-kr} \right) \frac{1}{r} + \frac{V_o R}{r}$$

## Capítulo 8

# CORRIENTE ELÉCTRICA

## 8.1 INTRODUCCIÓN

### 8.1.1 CORRIENTE ELÉCTRICA

Los medios que permiten el movimiento de partículas cargadas se llaman conductores. Los conductores más conocidos son metálicos, en ellos la mayoría de los electrones correspondientes a la última capa de sus átomos se pueden mover cuando se les aplica un campo. Otros medios conductores son: los plasmas, donde existen electrones e iones que pueden moverse y los electrolitos, líquidos donde los iones de distinto signo pueden moverse.

#### *Corriente eléctrica*

Es el movimiento de partículas cargadas que produce un desplazamiento de cargas en una dirección.

Los tipos más comunes de corriente, según la forma de producirse son:

*Corriente de conducción*, caracterizada por el arrastre de cargas dentro de un medio eléctricamente neutro; los ejemplos más conocidos son el movimiento de los electrones en el seno de un metal y el de los iones en un líquido.

*Corriente de convección*, se produce cuando hay un transporte de masa que arrastra en su movimiento partículas cargadas; ejemplos característicos son la corriente producida por el movimiento de un líquido que lleva en su interior iones, o el haz de electrones en un tubo de rayos catódicos, o el movimiento del gas de iones en un acelerador de partículas.

*Corriente de polarización*, debida a las variaciones temporales de  $\mathbf{P}$  en un medio polarizado ( $\partial\mathbf{P}/\partial t$ ). No hay transporte de carga libre.

*Corriente de desplazamiento*, consecuencia de la variación temporal del vector  $\mathbf{D}$  en un campo electromagnético ( $\partial\mathbf{D}/\partial t$ ). No hay transporte de carga libre.

*Intensidad de corriente*

Se define como la carga neta que atraviesa una superficie por unidad de tiempo, su valor instantáneo viene dado por la expresión,

$$I = i = \frac{dQ}{dt} \quad (8.1)$$

La unidad en el sistema internacional es el **amperio**, que es el culombio partido por segundo.

*Densidad de corriente*

Dado un conjunto de  $N$  cargas, que tienen velocidades  $\mathbf{v}_i$ , se define la velocidad media, por la ecuación,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_1^N \mathbf{v}_i \quad (8.2)$$

Considerando que la carga de cada una es  $q$  y el número de cargas por unidad de volumen  $n$ , el número de dichas cargas que atraviesan la superficie elemental  $ds$  en el tiempo  $dt$  es,

$$dI = nq \langle \mathbf{v} \rangle \cdot ds$$

En la expresión anterior podemos tener en cuenta que,

$$\rho = nq$$

En consecuencia,

$$dI = \rho \langle \mathbf{v} \rangle \cdot ds$$

Si el sistema de cargas consta de  $M$  grupos de  $N_i$  cargas  $q_i$ , con densidades  $\rho_i$  y velocidades medias  $\langle \mathbf{v}_i \rangle$ , la corriente anterior se expresará de la forma,

$$dI = \sum_1^M \rho_i \langle \mathbf{v}_i \rangle \cdot ds$$

El sumatorio se extiende a todos los grupos de cargas. El término asociado al sumatorio de la expresión anterior nos sirve para definir la *densidad de corriente*  $\mathbf{J}$ ,

$$\mathbf{J} = \sum_1^M \rho_i \langle \mathbf{v}_i \rangle \quad (8.1)$$

Por lo que,

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

La densidad de corriente definida es un vector que en cada punto del conductor toma el valor indicado por la ecuación (8.3); es decir,  $\mathbf{J}$  es un vector función del punto considerado.

En el sistema internacional de unidades (SI)  $J = \text{A/m}^2$ .

La relación entre intensidad y densidad de corriente, cuando consideramos la cargas que atraviesan una superficie  $S$ , se deduce de las ecuaciones anteriores y es,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (8.4)$$

Cuando existen distribuciones de corriente limitadas prácticamente a una superficie, se introduce el concepto de densidad de corriente superficial  $\mathbf{K}$ , que por analogía con lo expuesto para  $\mathbf{J}$ , se define mediante la ecuación,

$$\mathbf{K} = \sigma \langle \mathbf{v} \rangle = \rho_s \langle \mathbf{v} \rangle \quad (8.5)$$

Donde  $\sigma$  ( $\rho_s$ ) es la densidad superficial de las cargas consideradas y  $\langle \mathbf{v} \rangle$  la velocidad media de dichas cargas. Las dimensiones de  $K$  son amperio partido por metro (A/m).

### 8.1.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

El principio de conservación de la carga determina que ésta no se crea ni destruye. Como consecuencia de este principio podemos establecer una relación entre el flujo de carga a través de una superficie cerrada  $S$  que limita un volumen  $V$  y la variación de la densidad de carga en su interior. El flujo de corriente será igual a la disminución de carga en el interior, es decir,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt}$$

Como,

$$Q = \int_V \rho dv$$

Se deduce que,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (8.6)$$

Teniendo en cuenta el teorema de la divergencia,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv$$

y la relación anterior, llegamos a la ecuación,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8.7)$$

Las ecuaciones (8.6) y (8.7) son respectivamente la forma integral y diferencial de la *ecuación de continuidad*. La segunda relaciona densidades de carga y corriente en cada punto. Dichas ecuaciones son la forma matemática de expresar el principio de conservación de la carga.

Para *corrientes estacionarias*, es decir, cuando  $\partial\rho/\partial t = 0$ ,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (8.8)$$

Estas ecuaciones significan que el flujo neto de corriente a través de una superficie cerrada es nulo, o de otra forma, la corriente que entra en el volumen limitado por S es igual a la que sale.

### 8.1.3 LEY DE OHM: CONDUCTIVIDAD Y RESISTIVIDAD

G.S. Ohm en 1826 determinaba experimentalmente la proporcionalidad entre el voltaje aplicado a un conductor cilíndrico y la corriente que circulaba por él, a la constante de proporcionalidad la llamó resistencia  $R$ . La ecuación que expresa dicha ley es:

$$V = R I \quad (8.9)$$

En su honor la unidad de resistencia se llama ohmio ( $\Omega$ ). Un ohmio ( $\Omega$ ) = voltio/amperio (V/A).

La ley de Ohm, como él la estableció, caracteriza a los conductores cuya resistencia no depende del voltaje aplicado, es decir, es válida para conductores lineales.

Si en la ecuación (8.3) suponemos que todas las partículas cargadas son iguales, podemos expresar dicha ecuación de la forma,

$$\mathbf{J} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle = nq \langle \mathbf{v} \rangle \quad (8.10)$$

En un material, cuando se estudia la conducción desde un punto de vista microscópico, la velocidad media  $\langle \mathbf{v} \rangle$  es proporcional al campo que actúa sobre las partículas  $\mathbf{E}$ , es decir,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{q}{m} \tau \mathbf{E} \quad (8.11)$$

Donde  $m$  y  $q$  son respectivamente la masa y carga de las partículas y  $\tau$  es el *tiempo de relajación o tiempo medio entre colisiones* de las partículas con los átomos de la red u otro sistema de partículas. Si llevamos la ecuación (8.11) a la (8.10), queda,

$$\mathbf{J} = \frac{n q^2 \tau}{m} \mathbf{E} \quad (8.12)$$

El factor que multiplica a  $\mathbf{E}$  se denomina **conductividad eléctrica**  $\gamma$ ,

$$\gamma = \frac{n q^2 \tau}{m} \quad (8.13)$$

Si distintos sistemas de cargas estuvieran presentes, la ecuación anterior sería de la forma,

$$\gamma = \sum \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i} \quad (8.14)$$

La conductividad se mide en  $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$  o  $(\text{mho} \cdot \text{m}^{-1})$  (siemens/m (S/m)).

La *resistividad*  $\rho_c$  o  $\eta$  es la inversa de la conductividad y se expresa en  $\Omega \cdot \text{m}$ .

Sustituyendo la ecuación (8.13) en (8.12), obtenemos,

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (8.15)$$

La ecuación (8.15) se conoce como forma puntual de la ley de Ohm o ley de Ohm para cada punto.

#### 8.1.4 RESISTENCIA DE UN CONDUCTOR

##### 1) Cilindro conductor

En un tubo conductor de sección  $S$  y longitud  $L$ , podemos calcular la resistencia en función de la resistividad ( $\rho_c$ ,  $\eta$ ) de la forma siguiente:

$$V = \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \eta J L \quad ; \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Utilizando la ecuación (8.9), obtenemos,

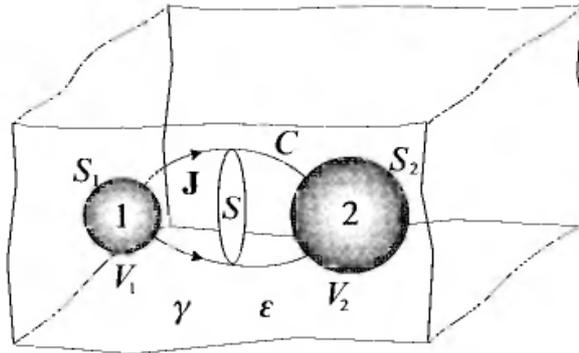
$$R = \frac{V}{I} = \eta \frac{L}{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S} \quad (8.16)$$

Expresión que nos da la resistencia del cilindro, que es proporcional a la resistividad y longitud, e inversamente proporcional a su sección transversal.

2) *Conductores de forma arbitraria*

Suponemos dos conductores, de conductividad prácticamente infinita, en el seno de un medio de conductividad  $\gamma$  y permitividad  $\epsilon$  constantes, dispuestos como indica la figura 8.1. Imaginemos un tubo elemental de corriente de sección  $S$  y trayectoria  $C$ ; sobre dicho tubo calculamos el elemento de corriente y la variación de potencial,

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} ; V_2 - V_1 = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



**Figura 8.1**

La corriente total se obtendrá integrando sobre la superficie de uno de los conductores, es decir,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  y llevando los valores anteriores a la ley de Ohm, obtenemos,

$$R = \frac{\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \quad (9.17)$$

La relación anterior proporciona la resistencia de un conductor de forma arbitraria.

*Capacidad del sistema anterior*

Suponiendo que el sistema está aislado, mediante la definición de capacidad y el teorema de Gauss, obtenemos la relación siguiente para la capacidad del sistema anterior:

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (8.18)$$

De las últimas ecuaciones se deduce que el producto de resistencia por capacidad es,

$$RC = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (8.19)$$

### 8.1.5 CONDICIONES EN LOS LÍMITES

Las condiciones que cumplen las componentes de los vectores  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  en la superficie que separa dos medios cuyas conductividades y permitividades respectivas son,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , se obtienen aplicando la ecuación de continuidad, el teorema de Gauss y que el campo  $\mathbf{E}$  es conservativo. En el caso de corrientes constantes dichas ecuaciones son:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 ; \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q ; \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

De la primera se deduce que las componentes normales de  $\mathbf{J}$  son continuas,

$$J_{n1} = J_{n2} \quad (8.20)$$

La segunda ecuación nos demuestra que las componentes normales son discontinuas si existe una densidad de carga en la superficie de separación,

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad (8.21)$$

La tercera muestra que las componentes tangenciales del campo son continuas, es decir,

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (8.22)$$

Las condiciones para el resto de las componentes se obtienen mediante las anteriores y las ecuaciones constitutivas,  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ . El resultado es,

$$\gamma_1 E_{n1} = \gamma_2 E_{n2} \quad (8.23)$$

$$\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma \quad (8.24)$$

$$\frac{J_{t1}}{\gamma_1} = \frac{J_{t2}}{\gamma_2} \quad (8.25)$$

Si existe una componente de corriente  $J_n$ , mediante la ecuación (8.24) se puede deducir la densidad de carga en la superficie de separación, ya que  $E_{n1} = J_n/\gamma_1$  y  $E_{n2} = J_n/\gamma_2$ , por tanto,

$$\sigma = J_n \left( \frac{\epsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\epsilon_1}{\gamma_1} \right) \quad (8.26)$$

A las ecuaciones anteriores debemos agregar la continuidad del potencial,

$$V_1 = V_2 \quad (8.27)$$

Las ecuaciones obtenidas nos permiten calcular los distintos vectores cuando existen medios materiales diferentes.

### 8.1.6 EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Cuando se estudia el campo electrostático vemos que en condiciones estáticas la carga que se aplica a un conductor está sobre la superficie del mismo, siendo el campo nulo en su interior. Esta situación se alcanza después de transcurrido un tiempo, que depende de la conductividad y permitividad del material.

Para estudiar como se alcanza el *equilibrio electrostático* vamos a suponer que sobre un cuerpo de conductividad  $\gamma$  y permitividad  $\epsilon$  tenemos inicialmente una distribución de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ . Dicha distribución se modifica hasta que toda la carga llega a la superficie, de forma que en el tiempo que tarda en alcanzar las condiciones estáticas la densidad será  $\rho(\mathbf{r}', t)$ .

La dependencia temporal de  $\rho$  se obtiene aplicando en cada punto las ecuaciones que relacionan densidades, campos y corrientes. Estas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} ; \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

Suponiendo que  $\epsilon$  y  $\gamma$  son constantes, si llevamos la tercera ecuación a la primera y tenemos en cuenta la segunda, obtenemos,

$$\gamma \frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La integración de la ecuación diferencial anterior produce la siguiente ecuación para  $\rho(\mathbf{r}', t)$ ,

$$\rho(\mathbf{r}', t) = \rho(\mathbf{r}') e^{-\gamma t/\epsilon} \quad (8.28)$$

El tiempo que tarda en caer la densidad hasta  $1/e$ , ( $\gamma t/\epsilon = 1$ ) de su valor inicial se llama tiempo de relajación  $\tau_r$ , que depende de  $\epsilon$  y  $\gamma$  a través de la relación,

$$\tau_r = \frac{\epsilon}{\gamma} \quad (8.29)$$

Si  $\tau_r$  es muy grande el equilibrio tarda mucho en alcanzarse, lo contrario ocurre cuando  $\tau_r$  es pequeña, cosa habitual en los buenos conductores que tienen conductividades elevadas.

### 8.1.7 ECUACIÓN DE LAPLACE EN CONDUCTORES

Si comparamos las ecuaciones fundamentales de la electrostática, cuando  $\rho = 0$ , con las que gobiernan el comportamiento de corrientes constantes, ( $\partial\rho/\partial t = 0$ ), vemos que existe una analogía,

Electrostática:  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  ;  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  ;  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$

Conductores:  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  ;  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$  ;  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

De las ecuaciones anteriores se deduce que los rotacionales de los vectores  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{D}$  son nulos,

$$\nabla \times \mathbf{D} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{J} = 0$$

En consecuencia dichos vectores derivan de un potencial, y su divergencia nos produce una ecuación de Laplace en ambos casos. Es decir, el potencial del que derivamos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{J}$  cuando no hay distribuciones de carga y fuentes de corriente se obtiene a partir de la ecuación siguiente,

$$\nabla^2 V = 0 \tag{8.30}$$

Las condiciones de frontera para ambos casos son:

Electrostática:  $D_{n1} = D_{n2}$  ;  $D_{t1}/\epsilon_1 = D_{t2}/\epsilon_2$

Conductores:  $J_{n1} = J_{n2}$  ;  $J_{t1}/\gamma_1 = J_{t2}/\gamma_2$

Aquí es donde se encuentra la diferencia fundamental entre los dos casos, pues así como en el caso de la separación entre un dieléctrico y el vacío pasamos de una permitividad  $\epsilon$  a  $\epsilon_0$ , en el conductor se pasa de  $\gamma$  a cero. Esto limita el paralelismo total entre ambos ya que en la frontera de un conductor con el vacío la componente normal del vector  $\mathbf{J}$  debe ser nula, lo que no ocurre necesariamente con el vector  $\mathbf{D}$  en el límite entre dieléctrico y vacío. Por ejemplo, el efecto de bordes que se produce en un condensador plano, no se corresponde con las líneas del vector  $\mathbf{J}$  en el caso de un medio de conductividad  $\gamma$  entre dos placa paralelas, si en el exterior no existe ningún medio material.

Teniendo en cuenta esta salvedad, se pueden utilizar las mismas técnicas desarrolladas en electrostática para calcular las corrientes en un conductor; o a la inversa, se pueden utilizar técnicas experimentales de medida de distribuciones de líneas equipotenciales para saber como son las correspondientes a un sistema de conductores con la misma geometría en un medio dieléctrico.

### 8.1.8 FUERZA ELECTROMOTRIZ

Cuando estudiamos el equilibrio electrostático vimos que las cargas en un conductor, después de un tiempo más o menos largo, quedan estáticas en la superficie. Para mantener una corriente durante un tiempo indefinido, es necesario que otro campo no conservativo esté presente de forma que se ejerza continuamente una fuerza sobre las cargas libres del conductor. Los dispositivos que suministran ese tipo de campos no conservativos se les conoce como generadores de fuerza electromotriz (f.e.m.). Los más habituales son las pilas y baterías que generan el campo no conservativo mediante un proceso electroquímico. Otros generadores frecuentes en nuestros días son las células solares, en las que el campo no conservativo tiene su origen en el efecto fotovoltaico. Los generadores electromagnéticos utilizan la inducción electromagnética para crear el campo no conservativo.

En la figura 8.2 representamos un generador unido a un conductor externo.

La ley de Ohm en este caso se cumple sin más que tener en cuenta que ahora existen dos tipos de campo, uno conservativo representado por  $\mathbf{E}$  y otro no conservativo por  $\mathbf{E}'$ . Por tanto,

$$\mathbf{J} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \quad (8.31)$$

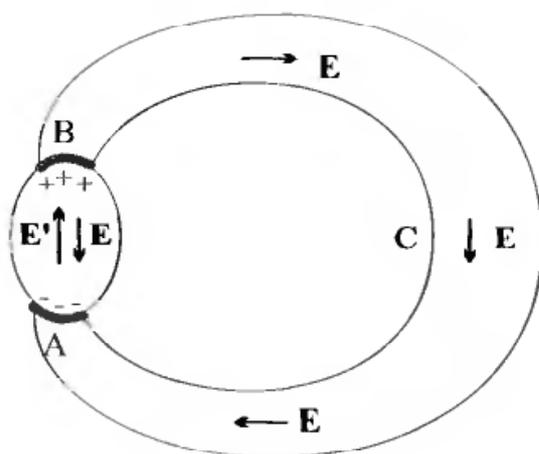


Figura 8.2

El campo no conservativo puede ser nulo en unas partes del circuito; en general dicho campo es distinto de cero en el generador y nulo fuera, salvo cuando se inducen corrientes sobre todo el circuito.

Si integramos la ecuación (8.31) a lo largo de un camino cerrado como el circuito de la figura, obtenemos,

$$\oint_C \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (8.32)$$

Como  $\mathbf{E}$  es conservativo, la integral sobre un camino cerrado es nula. La integral de  $\mathbf{E}'$  no es nula y su valor se conoce como f.e.m.  $\mathcal{E}$ , y se mide en voltios.

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (8.33)$$

Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{E}'$  dentro del generador tienen sentido contrario. Si el circuito está cerrado circula una corriente  $\mathbf{J}$ , siendo  $\mathbf{E}'$  mayor que  $\mathbf{E}$  dentro del generador.

#### *Circuito abierto*

En el caso de un circuito abierto  $\mathbf{J} = 0$ , por tanto,

$$\int_{AB} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ACB} (-\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (8.34)$$

La integración sobre AB se refiere al interior del generador y la ABC al exterior. Es decir en el caso de circuito abierto la f.e.m.  $\mathcal{E}$  es igual a la diferencia de potencial entre los bornes del generador,  $V_A - V_B$ . La f.e.m. tiene su origen en el campo no conservativo, campo cuya integral depende del camino elegido, y la d.d.p. del conservativo cuya integral no depende del camino.

$$V_A - V_B = - \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.35)$$

Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{E}'$  tienen el mismo módulo y sentido contrario dentro del generador. Fuera  $\mathbf{E}'$  es nulo y  $\mathbf{E}$  es el campo estático debido a las cargas acumuladas en los bornes del generador.

#### **8.1.9 LEY DE JOULE**

Las cargas al moverse por un conductor sufren colisiones con otras cargas y con los átomos del material. En los choques transmiten energía al material, que se convierte en vibraciones, es decir, aumenta su temperatura. En otras palabras, el paso de corriente convierte energía eléctrica en térmica.

En un elemento de circuito, entre cuyos extremos existe una d.d.p.  $V$ , el trabajo realizado para trasladar una carga  $dq$  desde un extremo a otro es,

$$dW = V dq$$

El trabajo realizado en el tiempo  $dt$  es la potencia  $P$ ,

$$P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt} = VI$$

Si el circuito elemental tiene una resistencia  $R$ ,  $V = RI$ , la potencia  $P$  necesaria para transportar esa corriente entre los dos extremos del circuito es,

$$P = RI^2 \quad (8.36)$$

La ecuación anterior se conoce como ley de Joule.

Interesa expresar la ley de Joule en función de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$ . Para ello suponemos un cilindro elemental de sección  $ds$  y longitud  $dl$ , cuyo volumen es  $dv = ds dl$ . Por él circula una densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y la d.d.p. entre los extremos es,

$$dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

La potencia disipada será,

$$dP = dV I = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) I = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{J} \cdot ds) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

La potencia disipada en el volumen  $dv$  es,

$$\frac{dP}{dv} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (8.37)$$

La potencia en un volumen  $V$ , teniendo en cuenta la relación  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ , será,

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \gamma \int_V E^2 dv = \int_V \frac{J^2}{\gamma} dv \quad (8.38)$$

Comparando la ecuación anterior con la (8.36), se deduce que la resistencia  $R$  se puede expresar de la forma,

$$R = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \quad (8.39)$$

La ecuación nos permite calcular la resistencia de un volumen cualquiera en función de la energía disipada en él.

### 8.1.10 LEYES DE KIRCHHOFF

Los circuitos más sencillos se caracterizan por que los parámetros que intervienen se suponen concentrados en determinados puntos. Dichos circuitos se componen de distintos generadores y resistencias conectados de formas determinadas en cada caso. Las leyes de Kirchhoff para este tipo de

circuitos son la aplicación del principio de conservación de la carga en un nudo y la conservación de la energía en un lazo.

*Primera ley de Kirchhoff*

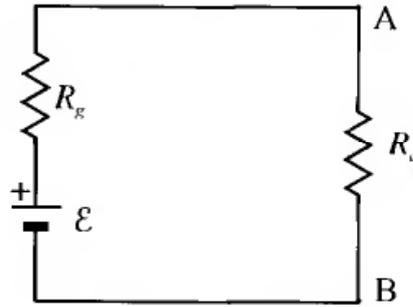
En un nudo la suma algebraica de las corrientes que entran y salen es nula:

$$\sum I_i = 0 \tag{8.40}$$

Dicha expresión es el resultado de aplicar la ecuación de continuidad (8.8) a una superficie cerrada que rodea al nudo.

*Segunda ley de Kirchhoff*

Vamos a considerar el circuito elemental indicado en la figura 8.3.  $R_g$  representa la resistencia interna del generador.  $R_e$  es la resistencia externa que unimos a los bornes del generador.



**Figura 8.3**

En la ecuación (8.32) el segundo miembro representa la f.e.m. total en el circuito, que puede ser suma de varios generadores. El primer miembro lo podemos desarrollar suponiendo que hay distintos tramos de sección  $\Delta S$ . Teniendo en cuenta esto,

$$\oint_C \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma}$$

Si multiplicamos y dividimos por  $\Delta S$  y además tenemos en cuenta el vector normal a la superficie  $\Delta \mathbf{S}$  tiene la misma dirección y sentido que  $d\mathbf{l}$ ,

$$\oint_C \frac{(\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}) \Delta S}{\gamma \Delta S} = I \oint_C \frac{dl}{\gamma \Delta S} = I \sum R_i$$

En el caso propuesto la fuerza electromotriz es  $\mathcal{E}$  y el sumatorio es  $R_g + R_e$ ,

$$\mathcal{E} = I (R_g + R_e) \tag{8.41}$$

Cuando existen varios generadores y resistencias, la expresión anterior se convierte en,

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum R_i I \quad (8.42)$$

La ecuación anterior es la forma matemática de la *segunda ley de Kirchhoff*, que en palabras es la siguiente: La suma algebraica de las fuerzas electromotrices en un circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de potencial  $R_i I$  en cada elemento del circuito.

Si multiplicamos ambos miembros de (8.42) por  $I$ , tendremos que,

$$\sum \mathcal{E}_i I = \sum R_i I^2$$

El primer miembro de la ecuación anterior representa la potencia suministrada por los distintos generadores. El segundo, teniendo en cuenta la ley de Joule, es la potencia disipada en las distintas resistencias. De esta forma vemos que la segunda ley de Kirchhoff corresponde al principio de conservación de la energía, ya que la energía suministrada por unidad de tiempo en los generadores es igual a la disipada en el mismo tiempo en las resistencias del circuito.

Para terminar, cuando se trata de un circuito con elementos localizados, podemos introducir la relación entre la d.d.p. en bornes del generador, f.e.m., intensidad de corriente y resistencia interna de la forma siguiente: En el circuito de la figura 8.3,

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - R_g I \quad (8.43)$$

La d.d.p. en los bornes es igual a la f.e.m.  $\mathcal{E}$  menos la caída de tensión en la resistencia interna  $R_g$ . Cuando  $I = 0$  la d.d.p. es igual a la f.e.m. Un generador de tensión se aproxima a un generador ideal cuando su resistencia interna  $R_g$  tiende a cero.

#### *Asociación de resistencias*

Cuando un conjunto de resistencias se asocian en serie, aplicando la segunda ley de Kirchhoff, la resistencia total  $R$  es,

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (8.44)$$

Si las resistencias se disponen en paralelo, aplicando la primera ley de Kirchhoff se obtiene,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (8.45)$$

## 8.2 PROBLEMAS

## PROBLEMA 8.1

Sobre el volumen de un cilindro de radio  $R$  y altura  $H$  tenemos una distribución de carga uniforme, cuya densidad es  $\rho$ . El cilindro gira con una velocidad angular  $\omega$ .

Calcular la corriente que atraviesa el cuadrado de lado  $L$  indicado en la figura P8.1.

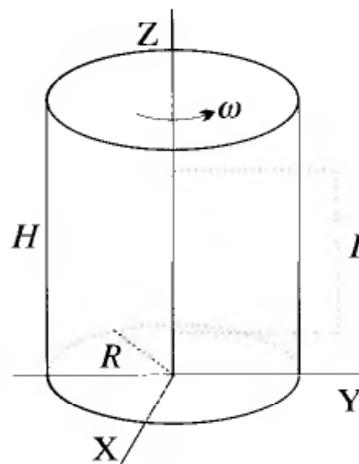


Figura P8.1

## Solución

En este problema las cargas son del mismo tipo en cada volumen elemental y su velocidad depende de la distancia al eje del cilindro, de forma que la expresión (8.10) para  $\mathbf{J}$  es,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \rho \omega r \mathbf{u}_\varphi$$

Donde hemos tenido en cuenta que  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega r \mathbf{u}_\varphi$ .

Calculamos la corriente que atraviesa el cuadrado de lado  $L$  mediante una integración, con el valor de  $\mathbf{J}$  indicado anteriormente y  $d\mathbf{s} = Ldr\mathbf{u}_\varphi$ ,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^R \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{u}_\varphi \rho \omega r L dr$$

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega L R^2$$

## PROBLEMA 8.2

Sobre una esfera de radio  $R$  tenemos una distribución superficial de carga  $\sigma = \sigma_o \cos \theta$ . Hacemos girar la esfera con velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje Z.

Calcular la corriente que atraviesa el sector circular de radio  $b$  y ángulo  $90^\circ$  indicado en la figura P8.2. ( $b > R$ ).

### Solución

La densidad de carga es superficial, por tanto utilizaremos la ecuación (8.5) para la densidad de corriente superficial.

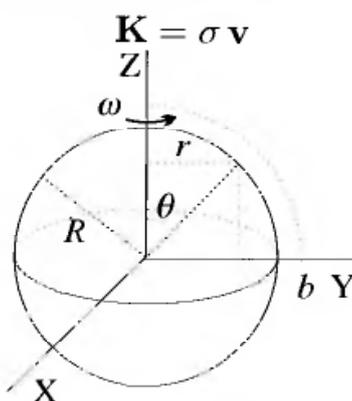


Figura P8.2

En el plano del sector  $\mathbf{v}$  es perpendicular a dicho plano, es decir,  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$ .

Por otra parte  $v = \omega r$  y  $r = R \operatorname{sen} \theta$ , en consecuencia,

$$\mathbf{K} = -\sigma \omega r \mathbf{u}_x = -\omega \sigma_o R \cos \theta \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}_x$$

Calculamos la intensidad  $I$  mediante una integración sobre el sector circular indicado, tomando como elemento de línea,  $d\mathbf{l} = -R d\theta \mathbf{u}_x$

$$I = \int \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\pi/2} \omega \sigma_o R^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta$$

Como la integral de  $\operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$  es  $(1/2)\operatorname{sen}^2 \theta$ , con los límites de la integral el resultado es,

$$I = \frac{1}{2} \omega \sigma_o R^2$$

### PROBLEMA 8.3

Una semiesfera de radio  $R$  y conductividad  $\gamma_1$  está en contacto con un medio indefinido de conductividad  $\gamma_2$ . Véase la figura P8.3.

Por el centro de la esfera y a través de un hilo se introduce una corriente  $I$ .

Suponemos que dicha corriente pasa al medio de conductividad  $\gamma_2$  a través de la semiesfera, de forma que la distribución de corriente  $\mathbf{J}$  es,  $\mathbf{J} = (K/r^2)\mathbf{u}_r$ .

1) Calcular la corriente que atraviesa un casquete de radio  $R$  y ángulo  $30^\circ$ .

2) Calcular la d.d.p. entre A y B,  $R_A = R/2$ .

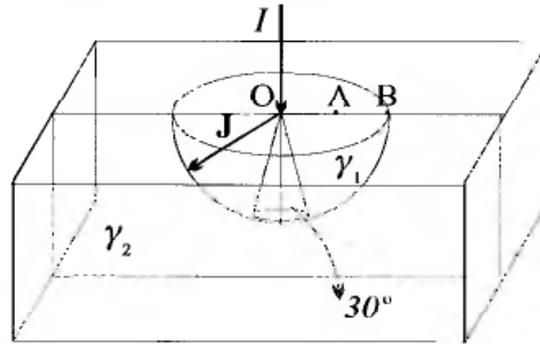


Figura P8.3

### Solución

#### 1) Corriente

El problema tiene simetría esférica, y suponemos que el eje Z tiene la dirección de la corriente  $I$ . Para determinar la forma de  $\mathbf{J}$ , debemos conocer  $K$  en función de la corriente total  $I$ . Esto se consigue calculando la integral de  $\mathbf{J}$  sobre una semiesfera, considerando el valor indicado para  $\mathbf{J}$  y con  $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{K}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = 2\pi K$$

Es decir,

$$K = \frac{I}{2\pi}$$

La corriente a través del casquete de  $30^\circ$  será,

$$I_c = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{11}{12}\pi}^{\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = I [-\cos \theta]_{\frac{11}{12}\pi}^{\pi} = I \left( 1 + \cos \left( \frac{11}{12}\pi \right) \right)$$

$$I_c \simeq 0,034 I$$

#### 2) Diferencia de potencial

La diferencia de potencial entre A y B se calcula teniendo en cuenta que en la semiesfera  $\mathbf{J} = \gamma_1 \mathbf{E}$ , de donde  $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\gamma_1$ .

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi\gamma_1} \int_{R/2}^R \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma_1} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R/2}^R$$

$$V_A - V_B = \frac{I}{2\pi\gamma_1} \frac{1}{R}$$

### PROBLEMA 8.4

Una barra cilíndrica de radio  $R$  y longitud  $D$ , está formada por un material cuya conductividad es función de la coordenada  $y$ ,  $\gamma = a + by$ .

Sobre las superficies transversales  $S$  y  $S'$ , véase la figura P8.4, disponemos una lámina conductora, de conductividad  $\gamma_o$  mucho mayor que  $\gamma$  ( $\gamma_o \gg \gamma$ ). Mediante una batería aplicamos una tensión  $V_o$  entre  $S$  y  $S'$ .

1) Teniendo en cuenta  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  y  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ , deducir la ecuación diferencial que cumple la componente  $E_y$  del campo eléctrico en el interior de la barra. Mediante dicha ecuación y las condiciones en los límites, calcular  $E_y(y)$ .

2) Calcular la resistencia total de la barra entre las secciones  $S$  y  $S'$ .

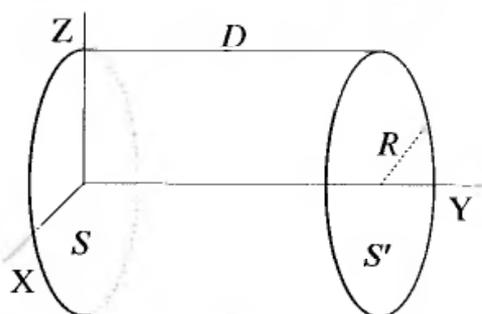


Figura P8.4

### Solución

#### 1) Cálculo de $E_y$

La simetría del sistema determina que la densidad de corriente sólo depende de la coordenada  $y$ , por tanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \rightarrow \frac{dJ_y}{dy} = 0$$

Aplicando la relación  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ ,

$$J_y = (a + by)E_y$$

Llevando esta relación a la ecuación anterior,

$$(a + by) \frac{dE_y}{dy} + bE_y = 0 \quad (8.4.1)$$

La expresión (8.4.1) es la ecuación diferencial pedida.

Para integrar la ecuación (8.4.1) separamos las variables y sus diferenciales de la forma siguiente:

$$\frac{dE_y}{E_y} = - \frac{dy}{(a + by)}$$

Integrando cada miembro obtenemos,

$$\ln E_y = - \ln(a + by) + \ln M$$

$M$  es una constante arbitraria.

Agrupando términos,

$$\ln (E_y(a + by)) = \ln M$$

de donde se deduce que,

$$E_y = \frac{M}{a + by} \quad (8.4.2)$$

La constante  $M$  es calcula aplicando las condiciones para la d.d.p. en los extremos.

$$V_o = \int_0^D E_y dy = \int_0^D \frac{M}{a + by} dy = \frac{M}{b} (\ln(a + bD) - \ln a)$$

La relación anterior nos da  $M$ ,

$$M = \frac{b V_o}{\ln(a + bD) - \ln a}$$

Sustituyendo en la ecuación (8.4.2),

$$E_y = \frac{b V_o}{\ln(a + bD) - \ln a} \frac{1}{(a + by)} \quad (8.4.3)$$

2) *Resistencia*

Calculamos la resistencia de la barra teniendo en cuenta que,

$$R = \frac{V_o}{I} = \frac{V_o}{\int J_y ds} = \frac{V_o}{\gamma \int E_y ds}$$

Tomamos la superficie  $S$  en el plano XZ ( $y = 0$ ) como sección para la integración de  $J_y$ ,  $S = \pi R^2$ . En ese plano  $\gamma = a$ .

Teniendo en cuenta (8.4.3), la resistencia  $R$  será,

$$R = \frac{V_o}{a \left( \frac{b V_o}{\ln(a + bD) - \ln a} \frac{1}{a} \right) \pi R^2} = \frac{\ln(a + bD) - \ln a}{b \pi R^2} \quad [\Omega]$$

### PROBLEMA 8.5

Entre dos placas conductoras planoparalelas de lado  $l$  y conductividad  $\gamma'$ , separadas por una distancia  $d$ , se introduce un material de permitividad  $\varepsilon$  y conductividad  $\gamma = \gamma_o(1 + y/d)$ . Suponemos  $\gamma' \gg \gamma$ . Entre las placas se aplica una tensión  $V_o$ , véase la figura P8.5.

1) Calcular la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  en el material.

2) Calcular la resistencia que existe entre placas.

#### Solución

Dada la simetría del problema y el voltaje aplicado, los vectores de campo y corriente deben cumplir las siguientes condiciones:

Continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{J}$ ,

$$J_{n1} = J_{n2} \text{ en este caso } J_y \text{ es continua}$$

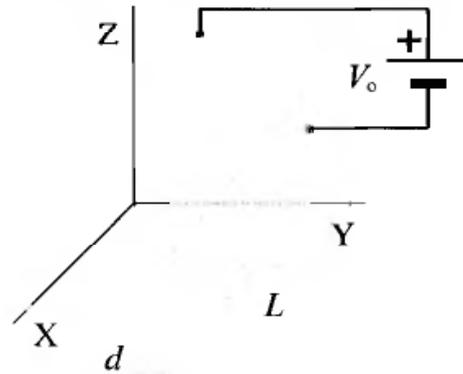
El campo  $E$  debe cumplir,

$$\int_0^d \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_y dy = V_o$$

Además  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ , por tanto,  $E_y = (1/\gamma)J_y$ .

Sustituyendo  $E_y$  en la integral anterior,

$$V_o = \int_0^d \frac{J_y}{\gamma} dy = \int_0^d \frac{J_y}{\gamma_o(1+y/d)} dy$$



**Figura P8.5**

Como  $J_y$  es constante en el dominio de integración, el resultado de la integral anterior nos permite obtener  $J_y$ .

$$V_o = \int_0^d \frac{J_y}{\gamma_o(1+y/d)} dy = J_y \frac{d}{\gamma_o} [\ln(1+y/d)]_0^d = J_y \frac{d}{\gamma_o} \ln 2$$

Despejando  $J_y$ , queda,

$$J_y = \frac{\gamma_o V_o}{d \ln 2} \rightarrow \mathbf{J} = \frac{\gamma_o V_o}{d \ln 2} \mathbf{u}_y$$

## 2) Resistencia

La resistencia se calcula dividiendo la d.d.p.  $V_o$  entre placas por la corriente  $I$  que circula entre ellas. Obtenemos  $I$  integrando  $\mathbf{J}$  sobre la superficie de una placa,

$$R = \frac{V_o}{I} = \frac{V_o}{\int J_y ds} = \frac{V_o}{L^2 (\gamma_o V_o / d \ln 2)}$$

$$R = \frac{d \ln 2}{\gamma_o L^2} \quad [\Omega]$$

## PROBLEMA 8.6

Un dispositivo está construido de la forma indicada en la figura P8.6, cuyos elementos son los siguientes: Un disco de conductividad  $\gamma'$ , radio  $a$  y espesor  $e$ ; dos sectores de corona circular, de espesor  $e$ , radio interior  $a$  y exterior  $b$ , siendo de  $45^\circ$  el ángulo de cada sector. La conductividad del material que contienen los sectores es  $\gamma$  ( $\gamma' \gg \gamma$ ), y su permitividad  $\epsilon$ .

Sobre los bordes externos de los sectores se aplica una lámina de conductividad  $\gamma'$ . Las dos láminas exteriores se unen como muestra la figura P8.6.

Suponiendo  $\gamma'$  prácticamente infinita, calcular la resistencia entre los puntos A y B.

### Solución

La resistencia entre A y B es la de dos sectores idénticos en paralelo, ya que tanto el disco como las láminas tienen resistencia despreciable, dado que  $\gamma'$  es muy elevada.

Como los dos sectores están en paralelo, calculamos la resistencia de uno, siendo la total igual a la mitad de la obtenida para un sector.

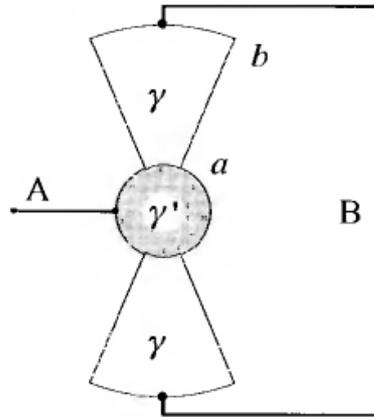


Figura P8.6

La resistencia de un sector se obtiene aplicando la ecuación (8.17), dado que  $\gamma$  es constante,

$$R = \frac{V_{BA}}{I} = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}} \quad (8.6.1)$$

La expresión anterior muestra que para calcular  $R$  necesitamos conocer el campo  $\mathbf{E}$ . La simetría del dispositivo es cilíndrica, por lo que el campo será radial e independiente del espesor  $d$  y su coordenada correspondiente.

En el cálculo de  $\mathbf{E}$  procedemos de la forma siguiente:

Aplicando el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de radio  $\rho$  y espesor  $d$  en uno de los sectores,

$$Q = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

Como  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,

$$Q = \varepsilon \int_0^{\pi/4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\rho e \rho d\varphi = \varepsilon E_\rho e \frac{\pi}{4}$$

Despejando obtenemos  $E_\rho$ ,

$$E_\rho = \frac{4Q}{\varepsilon \pi c \rho}$$

Nos interesa conocer  $Q$  en función de  $V_{BA}$ , para ello aplicamos la definición de diferencia de potencial,

$$V_{BA} = \int_a^b E_\rho d\rho = \int_a^b \frac{4Q}{\varepsilon \pi c} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{4Q}{\varepsilon \pi c} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

De lo anterior se deduce que,

$$\frac{4Q}{\varepsilon \pi c} = \frac{V_{BA}}{\ln(b/a)}$$

Sustituyendo la relación anterior en  $E_\rho$ , queda,

$$E_\rho = \frac{V_{BA}}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho}$$

Llevando el valor de  $E_r$  a la ecuación (8.6.1),

$$R = V_{BA} \left( \gamma \int_0^{\pi/4} \frac{c V_{BA}}{\ln(b/a)} \frac{\rho d\varphi}{\rho} \right)^{-1} = \frac{4 \ln(b/a)}{\gamma \pi c}$$

Como los sectores están en paralelo,  $R_{AB} = R/2$ , por tanto

$$R_{AB} = \frac{2 \ln(b/a)}{\gamma \pi c} \quad [\Omega]$$

### PROBLEMA 8.7

Tenemos un sistema como el indicado en la figura P8.7. La esfera de radio  $a$  y la capa esférica de radio interior  $b$  tienen conductividad  $\gamma'$ . Entre esfera y capa existe un material cuya conductividad es  $\gamma = \gamma_o(b/r)$ . ( $\gamma' \gg \gamma$ ).

Calcular la resistencia del sistema.

#### Solución

El sistema tiene simetría esférica, por lo que tanto el vector campo  $\mathbf{E}$  como la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  solo tienen componente radial. Como en problemas anteriores, la resistencia es,

$$R = \frac{V_{ba}}{I} = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}} \quad (8.7.1)$$

Dado que entre la esfera y capa no hay fuentes, las componentes normales del vector  $\mathbf{J}$ , o lo que es igual,  $J_r$  en dos capas esféricas muy próximas debe cumplir que,

$$J_r 4\pi r^2 = J'_r 4\pi r'^2$$

En consecuencia, la corriente que atraviesa cualquier esfera de radio  $r$  comprendido entre  $a$  y  $b$  será siempre la misma e igual a  $I$ ,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = J_r 4\pi r^2 = \gamma E_r 4\pi r^2$$

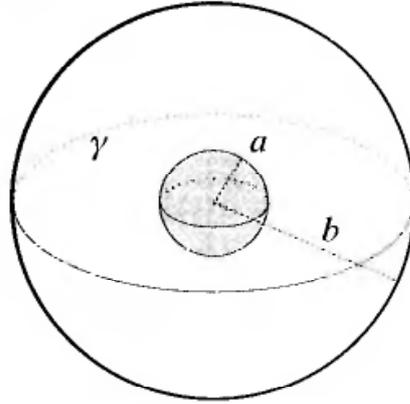


Figura P8.7

Puesto que  $I$  es constante, podemos despejar  $E_r$  de la expresión anterior,

$$E_r = \frac{I}{4\pi \gamma r^2}$$

Con el valor de  $E_r$  obtenido podemos calcular  $V_{ba}$ . Si además tenemos en cuenta que  $\gamma = \gamma_o(b/r)$ ,

$$V_{ba} = \int_a^b \frac{I}{4\pi \gamma_o(b/r) r^2} dr = \int_a^b \frac{I}{4\pi \gamma_o b} \frac{dr}{r} = \frac{I}{4\pi \gamma_o b} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

La resistencia, con los datos obtenidos llevados a la relación (8.7.1), es,

$$R = \frac{1}{4\pi b \gamma_o} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad [\Omega]$$

**PROBLEMA 8.8**

Se inserta un electrodo semiesférico, de radio  $R_o$ , y conductividad  $\gamma'$ , en un medio conductor indefinido en las direcciones  $-Z$ ,  $+X$ ,  $+Y$  e  $-Y$ , cuya conductividad es  $\gamma$  ( $\gamma' \gg \gamma$ ). A través de un hilo conductor rectilíneo, de radio despreciable frente a  $R_o$ , y dispuesto como indica la figura P8.8, fluye una corriente  $I$ . La densidad de corriente  $\mathbf{J}$  en el medio de conductividad  $\gamma$  es radial.

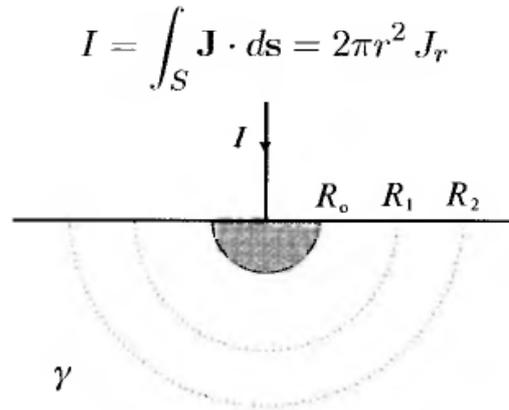
1) Calcular la resistencia entre el electrodo y una esfera de radio prácticamente infinito.

2) Calcular la d.d.p. entre dos puntos de la superficie situados respectivamente a las distancias  $R_1$  y  $R_2$ .

$I = 100$  A:  $R_o = 5$  m. :  $R_1 = 10$  m. :  $R_2 = 12$  m.  $\gamma = 2.652 \times 10^{-3}$  mho/m.

**Solución***1) Resistencia*

La simetría del sistema es esférica y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es radial. Sobre la superficie de una semiesfera de radio  $r$  en el medio  $\gamma$ , se verificará que,

**Figura P8.8**

La componente radial del campo se obtiene a partir de  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ .

$$E_r = \frac{J_r}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}$$

Teniendo en cuenta que  $R = \Delta V/I$ , y  $\Delta V = \int E_r dr$ ,

$$R = \frac{1}{I} \int_{R_0}^{\infty} E_r dr = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

Realizando la integración queda,

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma R_0}$$

Con los datos del problema,

$$R = \frac{1}{2,652 \times 10^{-3} \times 5 \times 2\pi} \simeq 12 \ \Omega$$

*2) Diferencia de potencial*

La diferencia de potencial entre  $R_1$  y  $R_2$  será,

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Sustituyendo los datos del problema, calculamos la d.d.p.

$$V_1 - V_2 \simeq 100 \ \text{[V]}$$

**PROBLEMA 8.9**

El contacto entre un conductor cilíndrico, cuya terminación es semiesférica, y un líquido de conductividad  $\gamma''$ , se realiza a través de una capa semiesférica de conductividad  $\gamma'$  y espesor  $d$  como indica la figura P8.9.

Por el conductor cilíndrico circula una corriente  $I$ . Suponemos que la densidad de corriente en la capa es:

$$\mathbf{J} = \frac{K}{r^2} \mathbf{u}_r$$

1) Calcular la resistencia que ofrece al contacto entre cilindro y líquido la capa semiesférica.

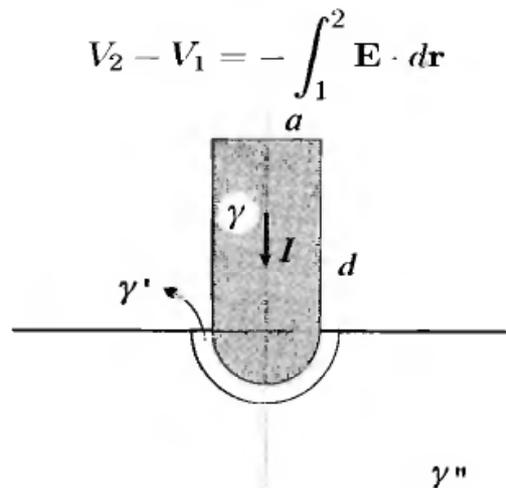
2) Si por alguna circunstancia parte de la capa de contacto se sustituye por una burbuja de aire en forma de casquete esférico de espesor  $d$  y ángulo  $60^\circ$ , calcular la resistencia de contacto en las nuevas circunstancias.

Suponemos que la burbuja se sitúa de forma simétrica con respecto al eje  $Z$  y que la conductividad del aire es nula.

**Solución**

1) *Resistencia sin burbuja*

El cálculo de la resistencia se hace teniendo en cuenta las ecuaciones (8.4), (8.9) y (8.12). Además la d.d.p. entre las dos superficies que limitan la capa es:



**Figura P8.9**

Como  $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\gamma'$ , sustituyendo en la integral anterior obtenemos,

$$V_1 - V_2 = \frac{K}{\gamma'} \int_a^{a+d} \frac{dr}{r^2} = \frac{Kd}{\gamma'(a+d)a}$$

La corriente  $I$  se calcula sobre cualquier semiesfera de radio  $r$ , donde  $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r$ , por tanto,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta = 2\pi K$$

Teniendo en cuenta la ecuación (8.9),

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{d}{2\pi\gamma'(a+d)a} \quad [\Omega]$$

### 2) Resistencia con burbuja

En este caso lo que cambia con respecto al anterior es que la conductividad por la zona de la burbuja es nula, por tanto la corriente circula por la capa comprendida entre  $\theta = \pi/2$  y  $5\pi/6$ , es decir, toda la corriente  $I$  atraviesa una superficie menor y como consecuencia la constante  $K$  de la densidad de corriente es distinta, ya que suponemos la misma variación con el radio.

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = K' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{5\pi/6} \frac{r^2}{r^2} \sin\theta d\theta = -2\pi K' \cos(5\pi/6) = K'\pi\sqrt{3}$$

La d.d.p. en este caso se obtiene a partir de la anterior sustituyendo  $K$  por  $K'$ , es decir,

$$V_1' - V_2' = \frac{K'd}{\gamma'(a+d)a}$$

La resistencia será,

$$R' = \frac{V_1' - V_2'}{I} = \frac{d}{\pi\sqrt{3}\gamma'(a+d)a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \quad [\Omega]$$

## PROBLEMA 8.10

Los conductores de un cable coaxial tienen respectivamente radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ). En el espacio entre conductores existe un medio de conductividad  $\gamma$  y permitividad  $\epsilon = 2\epsilon_0$ . En dicho medio se ha realizado un hueco cuya sección transversal se indica en la figura P8.10.

1) Calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en el espacio entre conductores, dentro y fuera del hueco, cuando aplicamos una d.d.p.  $V_0$  entre ellos. Se desprecian los efectos de borde.

2) Dado que la conductancia es la inversa de la resistencia,  $G = 1/R$ , calcular la conductancia por unidad de longitud del cable coaxial.

### Solución

#### 1) Vectores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$

La simetría de los conductores que están a un potencial determinado es cilíndrica, por tanto, aplicando la solución de potencial en caso de simetría cilíndrica. Sin dependencia de  $\varphi$  y  $z$ , esta será de la forma,

$$V = C \ln \rho + D$$

Aplicando las condiciones en los límites, calculamos  $C$  y  $D$ .

$$\text{Para } \rho = b \quad V = V_o \rightarrow V_o = C \ln b + D$$

$$\text{Para } \rho = a \quad V = 0 \rightarrow 0 = C \ln a + D$$

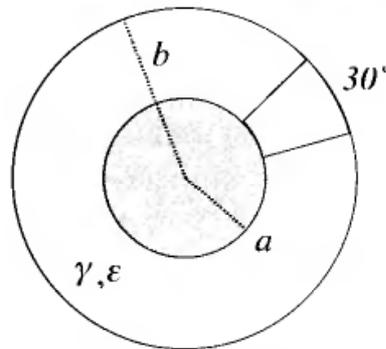
La solución del sistema anterior nos proporciona los valores de  $C$  y  $D$ ,

$$C = \frac{V_o}{\ln(b/a)} ; \quad D = -C \ln a$$

$$V = \frac{V_o}{\ln(b/a)} \ln \frac{\rho}{a}$$

El campo se obtiene a partir de  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , es decir,

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{d\rho} \mathbf{u}_\rho = -\frac{V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$



**Figura P8.10**

Las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  son continuas en el límite entre hueco y material, pero no las del vector  $\mathbf{D}$ , es decir,

$$\mathbf{D}_v = \epsilon_o \mathbf{E} = -\frac{\epsilon_o V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho ; \quad \mathbf{D}_c = 2\epsilon_o \mathbf{E} = -\frac{2\epsilon_o V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

2) *Conductancia*

La conductancia por unidad de longitud se obtiene a partir del campo  $\mathbf{E}$  y teniendo en cuenta las condiciones en los límites para  $\mathbf{J}$  en la separación entre vacío y conductor.

Dado que en el hueco (vacío)  $\gamma = 0$ ,  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = 0$ . Esto pone de manifiesto la diferencia entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{J}$ , dado que  $\epsilon_o$  no es nulo como  $\gamma$  en el vacío.

La conductancia por unidad de longitud se calcula de la forma siguiente,

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{V_o}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \gamma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \gamma \int_0^{11\pi/6} \frac{V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{a} \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho L a d\varphi$$

$$I = \gamma \frac{V_o}{\ln(b/a)} L \frac{11\pi}{6}$$

La conductancia por unidad de longitud será,

$$\frac{G}{L} = \gamma \frac{11\pi}{6 \ln(b/a)} \quad [\text{S}]$$

### PROBLEMA 8.11

Calcular la resistencia de un conductor de forma tronco-cónica como la indicada en la figura P8.11. La conductividad del material es  $\gamma$ .

El cálculo se realiza de forma aproximada.

#### Solución

Dado que no hay ningún sistema de coordenadas, de los utilizados usualmente, que permita obtener el potencial y campo en el interior de tronco de cono, se recurre a la división del conductor en una serie de  $N$  discos de altura  $\Delta h$  y radio  $r$ . El radio  $r$  varía en los discos desde  $a$  hasta  $b$ .

Como los discos están unidos en serie, la resistencia total será la suma de las resistencias de cada uno de los discos.

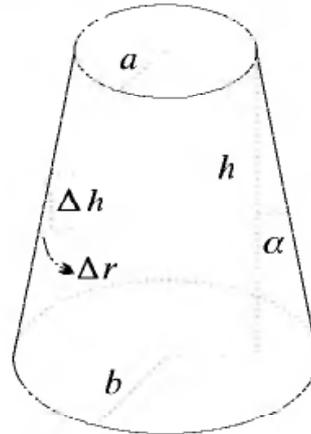


Figura P8.11

La resistencia de cada disco es,

$$R_i = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta h}{\pi r_i^2}$$

A cada  $\Delta h$  le corresponde un  $\Delta r$ . Como muestra la figura,

$$\Delta r = \Delta h \operatorname{tg} \alpha \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b-a}{h}$$

$$\pi r_i^2 = \pi (a + n\Delta r)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Por otra parte  $N = h/\Delta h$ . Es decir,  $\Delta h = h/N$ .

Sustituyendo la sección de cada disco será,

$$\pi r_i^2 = \pi \left( a + n \Delta h \frac{b-a}{h} \right)^2 = \pi \left( a + n \frac{b-a}{N} \right)^2$$

Sustituyendo los distintas relaciones anteriores en la resistencia  $R_i$ , obtenemos,

$$R_i = \frac{1}{\gamma N \pi} \frac{h}{\left( a + n \frac{b-a}{N} \right)^2} = \frac{1}{\gamma \pi} \frac{N h}{\left( N a + n(b-a) \right)^2}$$

La resistencia total se obtiene sumando las  $N$  resistencias  $R_i$ ,

$$R = \sum_{n=0}^N \frac{1}{\gamma \pi} \frac{N h}{\left( N a + n(b-a) \right)^2} \quad [\Omega]$$

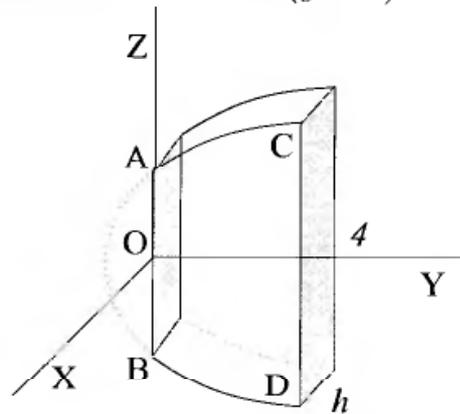
La aproximación será tanto mayor cuanto más grande sea el número de discos  $N$ .

**PROBLEMA 8.12**

Un trozo de placa conductora, de conductividad  $\gamma$ , tiene un espesor  $d$  y su contorno esta determinado por una parábola y los segmentos AB para  $y = 0$  y CD en  $y = 4$ , véase la figura P8.12.

Calcular la resistencia de la placa entre los planos  $y = 0$  e  $y = 4$ .

La ecuación de la parábola es  $z^2 = 4(y + 1)$ .



**Figura P8.12**

**Solución**

Dividimos la placa en láminas longitudinales de espesor  $dy$ . La resistencia de cada lámina vendrá dada por

$$dR = \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{S(y)}$$

donde  $S(y)$  es la superficie de la lámina situada en la coordenada  $y$ . Su valor es el área del rectángulo de lado  $h$  y altura  $2z$ , donde  $z$  está determinada por la ecuación de la parábola  $z^2 = 4(y + 1)$

$$S(y) = 2z(y) h = 4h \sqrt{y + 1}$$

Sustituyendo,

$$dR = \frac{1}{4\gamma h} \frac{dy}{\sqrt{y+1}}$$

La resistencia total es la contribución de todas las láminas; y como están dispuestas en serie, ésta es la suma de todas ellas. Como se trata de láminas infinitesimales, se puede expresar mediante una integral:

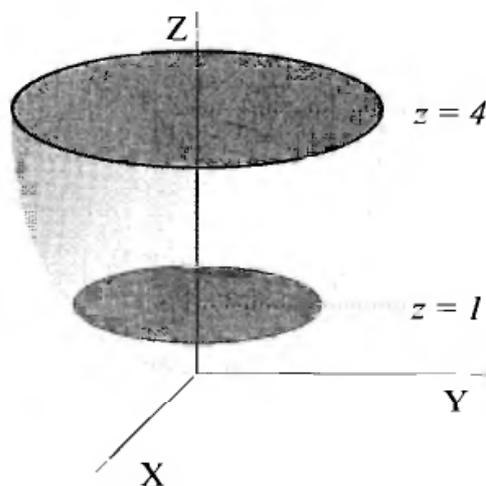
$$R = \frac{1}{4\gamma h} \int_0^4 \frac{dy}{\sqrt{y+1}} = \frac{1}{2\gamma h} \left[ \sqrt{y+1} \right]_0^4$$

$$R = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\gamma h} \quad [\Omega]$$

### PROBLEMA 8.13

Un conductor tiene forma de paraboloide circular truncado como se muestra en la figura P8.13. La conductividad del material que lo compone es  $\gamma$ . Calcular la resistencia del volumen comprendido entre las secciones circulares correspondientes a los planos  $z = 1$  y  $z = 4$ . La ecuación del paraboloide es  $x^2 + y^2 = kz$ .

**Solución**



**Figura P8.13**

El volumen de material propuesto se puede descomponer en placas de espesor  $dz$  y sección  $S$ . La resistencia, dado que las placas están en serie, será la suma de las resistencias de las placas elementales.

Resistencia de una placa,

$$dR = \frac{1}{\gamma} \frac{dz}{S}$$

La superficie  $S$  es,

$$S = \pi \rho^2 = \pi(x^2 + y^2)$$

La ecuación del paraboloides es,

$$x^2 + y^2 = kz$$

Sustituyendo,

$$S = k\pi z$$

La resistencia elemental será,

$$dR = \frac{1}{\gamma} \frac{dz}{k\pi z}$$

La suma en serie de todas las resistencias es la integral siguiente,

$$R = \int_1^4 \frac{1}{\gamma} \frac{dz}{k\pi z} = \frac{1}{k\pi\gamma} [\ln z]_1^4 = \frac{1}{k\pi\gamma} (\ln 4 - \ln 1)$$

La resistencia del dispositivo propuesto es,

$$R = \frac{1}{k\pi\gamma} \ln 4 \quad [\Omega]$$

### PROBLEMA 8.14

Un sector de arandela como el indicado en la figura P8.14 tiene las siguientes dimensiones: Radio interior  $a$ , exterior  $b$ , espesor  $\delta$  y el ángulo es  $\pi/6$ . El material del sector tiene conductividad  $\gamma$  permitividad  $\epsilon_0$  y permeabilidad  $\mu_0$ . Los bordes cilíndricos del sector se recubren de una capa muy fina de un material cuya conductividad  $\gamma'$  es muy superior a  $\gamma$  ( $\gamma' \gg \gamma$ ). Se unen dichos bordes a una batería como muestra la citada figura.

1) Establecer las condiciones para el potencial sobre los distintos bordes del sector.

2) Obtener la solución para el potencial en la zona interior del sector.

**Ayuda:** La solución general en coordenadas cilíndricas para este caso es.

$$V(\rho) = A \ln \rho + B$$

3) Calcular la resistencia del sector, vista desde los bornes de la batería.

**Solución**

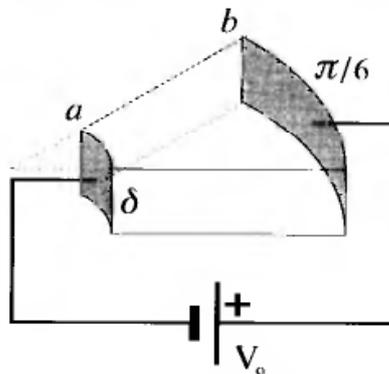


Figura P8.14

1) *Condiciones para el potencial*

Como la conductividad es nula fuera del sector, salvo en el conductor que une dicho sector con la batería, la densidad de corriente se anula en el exterior de las caras laterales. Esto implica que la componente normal de la densidad de corriente, y por tanto la del campo, es nula sobre dicha superficie.

El sector se comporta como si fuera indefinido en la dirección del eje correspondiente a los sectores cilíndricos que están metalizados y unidos a la batería.

## 1a)

Las condiciones para el potencial en los bordes cilíndricos del sector son:

$$\begin{array}{l} \text{Para } \rho = a, \quad V(a) = 0 \\ \text{Para } \rho = b, \quad V(b) = V_o \end{array} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi/6 \\ 0 \leq z \leq \delta \end{cases}$$

La densidad de corriente y campo eléctrico tiene dirección radial y el potencial en el interior del sector es de la forma  $V(\rho) = A \ln \rho + B$ . Las constantes  $A$  y  $B$  se calculan aplicando las condiciones en los límites, en este caso los bordes cilíndricos del sector.

2) *Solución para el potencial*

La solución para el potencial la obtenemos al aplicar las dos primeras condiciones de contorno a la solución general  $V(\rho) = A \ln \rho + B$ .

$$\text{Para } \rho = a, \quad V(a) = A \ln a + B = 0$$

$$\text{Para } \rho = b, \quad V(b) = A \ln b + B = V_o$$

La solución del sistema de ecuaciones es la siguiente,

$$V_o = A(\ln b - \ln a) \rightarrow A = \frac{V_o}{\ln(b/a)} \quad \text{y} \quad B = -\frac{V_o}{\ln(b/a)} \ln a$$

Por tanto el potencial será,

$$V(\rho) = \frac{V_o}{\ln(b/a)} \ln \frac{\rho}{a}$$

3) *Resistencia del sector*

La resistencia del sector viene dada por

$$R = \frac{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}} = \frac{V_o}{\gamma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}$$

Tenemos que obtener en primer lugar el campo eléctrico, que en coordenadas cilíndricas viene dado por,

$$\mathbf{E} = -\nabla V(\rho) = -\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho = -\frac{V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\rho$$

El flujo de corriente, teniendo en cuenta que  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ , será,

$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \gamma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Sobre una sección transversal  $d\mathbf{s} = -\delta \rho d\varphi \mathbf{u}_\rho$ , por tanto,

$$\gamma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \gamma \int_0^{\pi/6} \left( -\frac{V_o}{\ln(b/a)\rho} \mathbf{u}_\rho \right) (-\delta \rho d\varphi \mathbf{u}_\rho) = \frac{\gamma V_o \delta \pi}{6 \ln(b/a)}$$

Y llevando los resultados anteriores a la ecuación que define la resistencia tendremos que,

$$R = V_o \left( \frac{\gamma V_o \delta \pi}{6 \ln(b/a)} \right)^{-1} \rightarrow R = \frac{6}{\gamma \delta \pi} \ln \frac{b}{a} \quad [\Omega]$$

### PROBLEMA 8.15

Un sector de arandela como el indicado en la figura P8.15 tiene las siguientes dimensiones: Radio interior  $a$ , exterior  $b$ , espesor  $\delta$  y el ángulo es  $\pi$ .

El material del sector tiene conductividad  $\gamma$ , permitividad  $\epsilon_o$  y permeabilidad  $\mu_o$ .

Los bordes rectangulares del sector se recubren de una capa muy fina de un material cuya conductividad  $\gamma'$  es muy superior a  $\gamma$  ( $\gamma' \gg \gamma$ ).

Se unen dichos bordes a una batería como muestra la figura.

1) Establecer las condiciones para el potencial sobre los distintos bordes del sector.

2) Obtener la solución para el potencial en la zona interior del sector.

**Ayuda:** La solución general en coordenadas cilíndricas para este caso es,

$$V(\rho) = A\varphi + B$$

3) Calcular la resistencia del sector, vista desde los bornes de la batería.

### Solución

1) *Potencial*

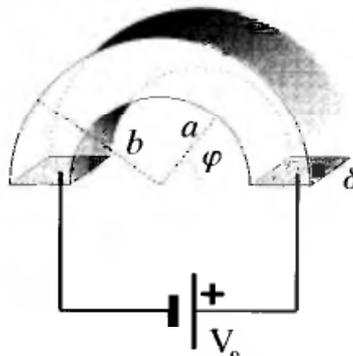


Figura P8.15

Las condiciones para el potencial en los bordes del sector son

- Bordes rectangulares

$$\begin{array}{l} \text{Para } \varphi = 0, \\ \text{Para } \varphi = \pi, \end{array} \quad \begin{array}{l} V(0) = V_o \\ V(\pi) = 0 \end{array} \quad \text{con } \begin{cases} a \leq \rho \leq b \\ 0 \leq z \leq \delta \end{cases}$$

En los bordes cilíndricos el potencial varía con el ángulo  $\varphi$ .

2) *Solución para el potencial*

La solución para el potencial la obtenemos al aplicar las condiciones de contorno a la solución general de la forma  $V(\rho) = A\varphi + B$ .

$$\text{Para } \varphi = 0, \quad V(0) = A \times 0 + B = V_o$$

$$\text{Para } \varphi = \pi, \quad V(\pi) = A\pi + B = 0$$

De donde

$$A = -V_o/\pi \quad \text{y} \quad B = V_o$$

Es decir

$$V(\varphi) = V_o \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)$$

3) *Resistencia*

La resistencia del sector viene dada por

$$R = \frac{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}} = \frac{V_o}{\gamma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}$$

Tenemos que obtener en primer lugar el campo eléctrico, que en coordenadas cilíndricas viene dado por,

$$\mathbf{E} = -\nabla V(\varphi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi = \frac{V_o}{\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Y el flujo de corriente en una sección transversal, teniendo en cuenta que  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ , será:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \gamma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

El área elemental es  $d\mathbf{s} = \delta d\rho \mathbf{u}_\varphi$ , por tanto,

$$\gamma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{V_o}{\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi \cdot \delta d\rho \mathbf{u}_\varphi = \frac{V_o \delta}{\pi} \ln(b/a)$$

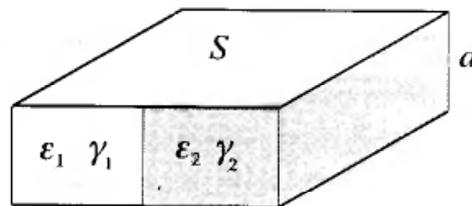
Y llevando el resultado anterior a la ecuación que define la resistencia tendremos

$$R = V_o \left( \gamma \frac{V_o \delta}{\pi} \ln(b/a) \right)^{-1} \rightarrow R = \frac{\pi}{\delta \gamma \ln(b/a)} \quad [\Omega]$$

**PROBLEMA 8.16**

Entre dos placas planoparalelas, de superficie  $S$  y separadas por una distancia  $d$ , se introducen dos materiales cuya permitividad y conductividad es respectivamente  $\varepsilon_1, \gamma_1$  y  $\varepsilon_2, \gamma_2$ . Cada material ocupan la mitad del volumen entre placas como muestra la figura P8.16.

Comprobar si el sistema cumple la condición  $RC = \varepsilon/\gamma$ , donde  $\varepsilon$  y  $\gamma$  son la permitividad y conductividad equivalente del conjunto. Razonar la respuesta.

**Figura P8.16****Solución**

Calculamos por separado la capacidad de cada trozo de material usando la fórmula  $C_i = \varepsilon_i(S/d_i)$ , donde  $d_i = d$  en ambos casos:

$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{S}{d} ; C_2 = \varepsilon_2 \frac{S}{d}$$

La capacidad total, dado que están en paralelo, viene dada por

$$C = C_1 + C_2 = \frac{S}{d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Hacemos lo mismo con la resistencia, calculando primero la resistencia parcial de cada material mediante la fórmula

$$R_i = \frac{1}{\gamma_i} \frac{d}{S}$$

Las resistencias respectivas serán,

$$R_1 = \frac{1}{\gamma_1} \frac{d}{S} ; R_2 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{d}{S}$$

La resistencia total, dado que están en paralelo, es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{d}{S} \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

El producto  $RC$  vale

$$RC = \frac{S}{d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{d}{S} \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Si la permitividad y conductividad equivalente son respectivamente,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 ; \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

el producto  $RC$  se puede escribir de la forma

$$RC = \varepsilon/\gamma$$

Esta relación muestra que se cumple la condición pedida.

### PROBLEMA 8.17

A través de dos medios cuyas constantes respectivas son:  $\gamma_1 = 100 \text{ S/m}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ;  $\gamma_2 = 10 \text{ S/m}$ ,  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ , circula una densidad de corriente. Los dos medios son homogéneos e isótropos.

1) Si la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  incide sobre la superficie de separación con un ángulo de  $30^\circ$  como indica la figura P8.17, calcular la dirección de  $\mathbf{J}$  en el medio (2).

2) En el medio (1)  $J = 2 \text{ A/m}^2$ . Calcular la densidad de carga en la superficie de separación.

### Solución

#### 1) Densidad de corriente

Resolvemos el problema aplicando la ecuación  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$  y las condiciones de frontera para  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{E}$ . Como la corriente es constante y no hay fuentes en la frontera, las condiciones son:

$$E_{t1} = E_{t2} \rightarrow \frac{J_{t1}}{\gamma_1} = \frac{J_{t2}}{\gamma_2} ; \quad J_{n1} = J_{n2}$$

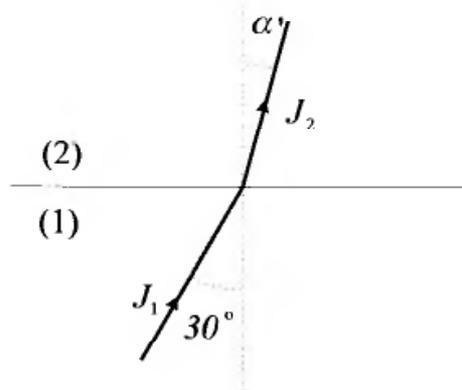


Figura P8.17

La relación entre los ángulos  $\alpha$  y  $\alpha'$  ( $\alpha = 30^\circ$ ), se obtiene de la forma siguiente:

$$\tan \alpha = \frac{J_{t1}}{J_{n1}} ; \quad \tan \alpha' = \frac{J_{t2}}{J_{n2}}$$

Sustituyendo en  $\tan \alpha'$   $J_{t2}$  y  $J_{n2}$  por los valores del medio (1) proporcionados por las condiciones en los límites,

$$\tan \alpha' = \frac{\gamma_2 J_{t1}}{\gamma_1 J_{n2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \tan \alpha$$

$$\tan \alpha' = \frac{10}{100} \tan \frac{\pi}{6} \simeq 0,057$$

$$\alpha' \simeq \arctan 0,057 \simeq 3,26^\circ \simeq 3^\circ 15' 44''$$

La dirección de  $\mathbf{J}$  forma un ángulo  $\alpha' = 3^\circ 15' 44''$  con la normal al plano de separación en el medio (2).

2) *Densidad de carga en la superficie*

Ahora vamos a comprobar que las componentes normales del vector  $\mathbf{D}$  no son continuas en la superficie de separación, y como consecuencia debe existir una densidad superficial de carga en ella. Aplicaremos las condiciones de frontera y las relaciones,  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ .

$$\text{De } J_{n1} = J_{n2} \rightarrow \gamma_1 E_{n1} = \gamma_2 E_{n2} \rightarrow E_{n1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} E_{n2} = \frac{J_{n1}}{\gamma_1}$$

$$\text{De } D_{n1} - D_{n2} = \sigma \rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma$$

Sustituyendo  $E_{n2}$  en función de  $E_{n1}$  en la última ecuación,

$$\sigma = E_{n1} \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) = \frac{J_{n1}}{\gamma_1} \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)$$

$$\sigma = J_{n1} \left( \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \right)$$

$$J_{n1} = J \cos \alpha = J \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \quad [\text{A/m}^2]$$

Sustituyendo los valores de las constantes y  $J_{n1}$  en la relación anterior para  $\sigma$ , podemos calcular su valor numérico.

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{19}{100} \sqrt{3} \simeq -0,329 \varepsilon_0$$

### PROBLEMA 8.18

En un instante dado la distribución de corriente en un sistema es:  $\mathbf{J} = K(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z)$ .

Dentro del sistema consideramos un cubo de lado  $L$  y centro el origen de coordenadas. Suponemos que en un instante dado existe una carga  $Q$  dentro del cubo.

Calcular  $dQ/dt$  en ese instante. ¿Aumenta o disminuye  $Q$ ?

**Solución**

Se trata de un problema en el que la carga en un volumen determinado depende del tiempo, por tanto se debe aplicar la ecuación de continuidad siguiente:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt}$$

Utilizando la densidad de corriente dada calculamos el flujo de corriente sobre las cara del cubo.

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{L}{2} L^2 K (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x - \mathbf{u}_x \cdot (-\mathbf{u}_x) + \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y - \mathbf{u}_y \cdot (-\mathbf{u}_y) + \\ &\quad \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z - \mathbf{u}_z \cdot (-\mathbf{u}_z)) \\ \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} &= 3KL^3 \end{aligned}$$

Llevando este resultado a la ecuación de continuidad, obtenemos,

$$3KL^3 = -\frac{dQ}{dt}$$

De la ecuación anterior se deduce que  $Q$  disminuye.

**PROBLEMA 8.19**

Tenemos una esfera de radio  $a$  y centro en un punto  $P$  de un medio indefinido, homogéneo e isótropo, de permitividad  $\varepsilon$  y conductividad  $\gamma$ . En la esfera se sitúa una densidad de carga, que en el instante inicial ( $t = 0$ ) es uniforme e igual  $\rho_0$ . Esta carga, debido a las fuerzas de repulsión electrostática, se dispersa.

Calcular la densidad de corriente sobre la superficie esférica de radio  $r$  ( $r > a$ ) y centro  $P$ , en el instante  $t = \varepsilon/\gamma$ .

**Solución**

En primer lugar nos interesa conocer la variación espacio temporal de la densidad de carga. Como vimos en la introducción teórica, mediante la combinación de la ley de Gauss en forma diferencial ( $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ), la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{J} = \partial\rho/\partial t$  y las ecuaciones constitutivas  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ , se obtiene la ecuación (8.28),

$$\rho(\mathbf{r}', t) = \rho_0 e^{-(\gamma t/\varepsilon)} = \rho_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon}\right)$$

El flujo a través de una superficie esférica de radio  $r$ , dado que la simetría de la distribución es esférica, y las componentes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  son radiales, es:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 J = - \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} dv' = \frac{\gamma}{\varepsilon} \int_V \rho_o \exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon}\right) dv'$$

En el instante  $t = \varepsilon/\gamma$  se verifica que,

$$4\pi r^2 J = \frac{\gamma}{\varepsilon} e^{-1} \int_V \rho_o dv'$$

La integral de volumen anterior representa la carga inicial que se distribuye sobre la esfera de radio  $a$ , es decir

$$\int_V \rho(\mathbf{r}', t) dv' = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_o$$

Sustituyendo en la relación anterior, se deduce que:

$$J = \frac{\gamma}{\varepsilon} e^{-1} \frac{a^3}{3r^2}$$

### PROBLEMA 8.20

Disponemos de una esfera de radio  $R$ , cuyo material es homogéneo e isotrópico de permitividad  $\varepsilon$  y conductividad  $\gamma$ .

En un instante  $t = 0$ , se sitúa una distribución de carga uniforme sobre la esfera de radio  $a$  indicada en la figura P8.20. Debido a las fuerzas electrostáticas, las cargas se dispersan hasta situarse sobre la superficie de la esfera de radio  $R$ .

Si consideramos el volumen de la capa esférica comprendida entre los radios  $b$  y  $c$ , ¿cual es la densidad de carga en el interior de la citada capa durante el tiempo que tardan las cargas en dispersarse?

#### Solución

Como la distribución es de simetría esférica, suponemos que el campo  $\mathbf{E}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  son radiales.

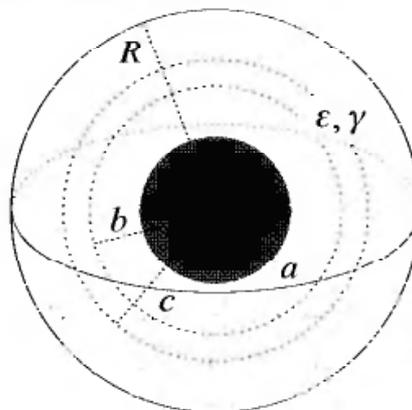


Figura P8.20

El comportamiento de la carga en la capa esférica se calcula mediante la ecuación de continuidad,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = - \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} dv'$$

La aplicación del teorema de Gauss sobre una superficie de radio  $r$  ( $r > a$ ), nos da el siguiente valor del campo,

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Donde  $Q$  representa la carga en el interior de la esfera de radio  $r$  en cada instante.

Mediante la ecuación constitutiva  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ , obtenemos,

$$J_r = \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

El flujo de  $J_r$  a través de las superficies que limitan la capa esférica, teniendo en cuenta que para la superficie de radio  $b$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_r$  y en la de radio  $c$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$ , será,

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \gamma \frac{4\pi c^2 Q}{4\pi\epsilon c^2} - \gamma \frac{4\pi b^2 Q'}{4\pi\epsilon b^2} = \frac{\gamma}{\epsilon} (Q - Q')$$

Donde  $Q$  y  $Q'$  son respectivamente la carga dentro de la esfera de radio  $c$  y  $b$ .

Si la carga en el volumen de la capa es,

$$q = \int_V \rho dv'$$

entonces,

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\gamma}{\epsilon} (Q - Q')$$

En el instante inicial ( $t = 0$ )  $Q = Q'$ , ya que toda la carga está sobre la esfera de radio  $a$ , por tanto,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

Si la derivada de  $q$  es cero, significa que no hay variación de carga con el tiempo. Como en  $t = 0$  sobre la capa no había ninguna carga, podemos concluir que no existirá tampoco en instantes posteriores.

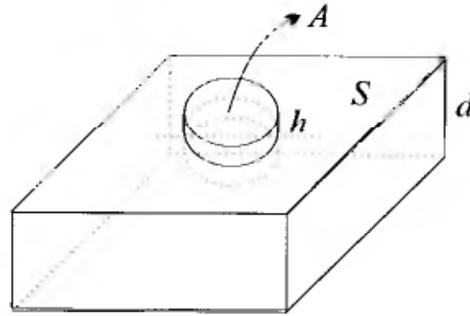
### PROBLEMA 8.21

Entre las placas de un condensador plano de superficie  $S$  y espesor  $d$ , existe un medio de permitividad  $\epsilon = 10\epsilon_0$  y conductividad  $\gamma$ . Mediante una batería cargamos el condensador e inmediatamente después desconectamos la batería, de forma que en el instante  $t = 0$  la carga en las placas sea  $Q_0$ . Diez segundos después la carga en las placas es  $Q_0/e$ .

¿Cual es la conductividad  $\gamma$  del medio?

**Solución**

Como consecuencia de la conductividad del material el condensador se descarga a través de dicho material. Para encontrar la variación de la carga en cada placa, utilizaremos la ecuación de continuidad aplicada al volumen de una caja de sección  $A$  y altura  $h$  dispuesta como indicada la figura P8.21.

**Figura P8.21**

Para calcular  $\mathbf{J}$  comenzamos por calcular  $\mathbf{E}$  entre las placas. Como suponemos despreciables los efectos de borde, el campo es uniforme en el interior del condensador, y su valor se obtiene aplicando el teorema de Gauss a la caja citada anteriormente; es decir,

$$E A = \frac{Q}{\epsilon S} A \rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon S} \text{ en } t = 0 \quad E_o = \frac{Q_o}{\epsilon S}$$

Como  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ , el flujo de  $\mathbf{J}$  en la caja es,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \gamma E A = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{S} A \right)$$

Sustituyendo el valor de  $E$ , obtenemos,

$$\gamma \frac{Q}{\epsilon} = -\frac{dQ}{dt}$$

La solución de la ecuación anterior es,

$$Q = K \exp \left( -\frac{\gamma t}{\epsilon} \right)$$

Para  $t = 0$ ,  $Q = Q_o$ , por tanto  $K = Q_o$ .

$$Q = Q_o \exp \left( -\frac{\gamma t}{\epsilon} \right)$$

Transcurridos diez segundos la carga es  $Q_o/e$ , es decir, el término entre paréntesis de la expresión anterior es igual a  $-1$ ,

$$\frac{\gamma}{\epsilon} 10 = 1$$

Sabemos que  $\epsilon = 10\epsilon_o = 10 \times 8,85 \times 10^{-12}$ , por tanto,

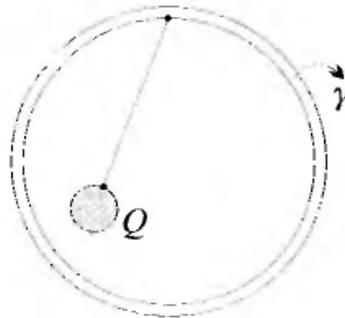
$$\gamma = \frac{10\epsilon_o}{10} = 8,85 \times 10^{-12} \quad [\Omega^{-1}\text{m}]$$

**PROBLEMA 8.22**

Disponemos de una capa esférica metálica, de radio  $R$  y conductividad  $\gamma$ . En su interior, colgada de un hilo aislante como indica la figura P8.22, hay una bola metálica de radio  $R/10$  con una carga  $Q$ .

Mediante un impulso mecánico iniciamos la oscilación de la bola metálica, sin que toque a la capa esférica. Suponemos que el sistema está aislado. ¿Se notará la oscilación de la bola en puntos exteriores a la capa esférica?

Suponiendo que no existen rozamientos mecánicos debidos al aire y al punto de sujeción, ¿disminuirá la oscilación de la bola hasta pararse? Razonar ambas respuestas.



**Figura P8.22**

**Solución**

La oscilación de la bola no se notará fuera de la esfera metálica puesto que ésta, como conductor que es, se mantiene siempre al mismo potencial y cualquier observador externo verá siempre una superficie equipotencial; lo que está ocurriendo es que las cargas libres de la esfera se están acomodando a la oscilación de la carga de la bola, de tal forma que todas las superficies metálicas se encuentren al mismo potencial en todo momento. La carga libre en la esfera será capaz de seguir las oscilaciones de la bola siempre que

$$T > \tau$$

donde  $T$  es el periodo de oscilación y  $\tau$  el tiempo de respuesta de las cargas en la esfera y que es igual a  $\varepsilon_0/\gamma$ , donde  $\gamma$  es la conductividad del metal de la esfera; es decir, el periodo de oscilación tiene que ser mayor que el tiempo que tardan las cargas libres en reorganizarse. Un movimiento pendular normal tiene un periodo del orden de un segundo

$$T \sim 1 \text{ s}$$

mientras que, para un metal con  $\gamma \sim 10^8 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  y  $\varepsilon_0 = 8,82 \times 10^{-12} \text{ (F/m)}$ , tenemos que

$$\tau = \varepsilon_0/\gamma \sim 10^{-20} \text{ s}$$

por lo que se cumple la condición arriba expresada.

Por otra parte, este movimiento de las cargas al reagruparse representa pequeñas corrientes. Dado que la conductividad no es infinita, estas corrientes disipan algo de energía en forma de calor. Por el principio de conservación de la energía éste calor tiene que provenir de alguna fuente de energía, que en este caso es la bola oscilando, por lo que se parará cuando se haya transferido toda la energía cinética de la bola en forma de calor a la esfera. El calor transferido depende sólo de la masa de la bola y la amplitud inicial del movimiento pendular, y el tiempo que tarda en pararse depende de  $Q$ ,  $T$  y  $\tau$ .

### PROBLEMA 8.23

Tenemos un dispositivo formado por dos placas conductoras planoparalelas y de conductividad  $\gamma$  muy superior a la del resto de los materiales. Dichas placas están conectadas por un conductor externo. Entre las placas existen dos materiales de distinta conductividad,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , y la misma permitividad  $\epsilon_0$ , dispuestos como muestra la figura P8.23.

En un instante  $t = 0$  se aplica en la superficie de separación entre los conductores una densidad superficial de carga  $\sigma_0 = 10^{-6}$  (C/m<sup>2</sup>).

Calcular los campos y densidades de corriente en los dos materiales en el instante  $t = 0,25$  s.

$$\gamma_2 = 2\gamma_1, \quad \gamma_1 = (1/12\pi) 10^{-9} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}, \quad d_2 = 2d_1, \quad d_1 = 10^{-1}(\text{m}).$$

$$\epsilon_0 = (1/36\pi) 10^{-9} (\text{F} \cdot \text{m}^{-1}).$$

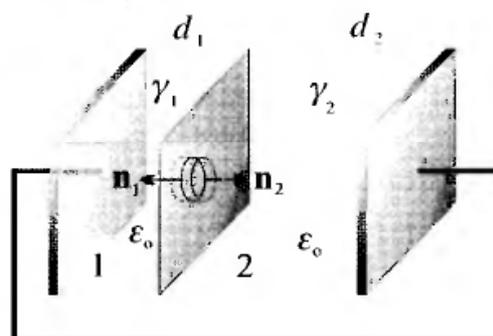


Figura P8.23

### Solución

Aplicamos las diversas ecuaciones que tienen que cumplir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ , y  $\mathbf{J}$  en cada instante. Por la simetría del problema todos los vectores tendrán la misma dirección, perpendicular a las placas. El sentido de los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{J}$  es hacia la derecha en el medio 2 y hacia la izquierda en el 1.

En primer lugar, por estar ambas placas unidas externamente significa que tienen el mismo potencial, en consecuencia la integral del campo eléctrico a lo largo de una línea que una ambas placas tiene que ser 0,

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_1 d_1 + E_2 d_2 = 0$$

y esta ecuación se cumple en todo momento,

$$-E_1(t)d_1 + E_2(t)d_2 = 0$$

Por otro lado, en la frontera que separa los medios donde se aplica la densidad de carga inicial  $\sigma_o$ , el vector desplazamiento presenta una discontinuidad debida a la carga aplicada:

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma(t)$$

donde  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  son los vectores normales a la superficie de separación en su lado correspondiente. Como  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  y los vectores  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$  tiene respectivamente los sentidos de  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$ , tenemos,

$$D_1(t) + D_2(t) = \sigma(t)$$

Por último aplicamos la ecuación de continuidad en un volumen que incluya la discontinuidad entre los dos medios. Considerando los sentidos de los vectores normales y la densidad de corriente queda la siguiente ecuación,

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = -\frac{d\sigma(t)}{dt}$$

De forma análoga al vector  $\mathbf{D}$ , se transforma en

$$J_1(t) + J_2(t) = -\frac{d\sigma(t)}{dt}$$

Expresando las tres ecuaciones anteriores en función del campo eléctrico, aplicando la ecuación constitutiva,  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  y la ley de Ohm,  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  en ambos materiales (con  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o$ ) tendremos,

$$-E_1 d_1 + E_2 d_2 = 0$$

$$E_2 + E_1 = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_o}$$

$$E_2 \gamma_2 + E_1 \gamma_1 = -\frac{d\sigma(t)}{dt}$$

Así pues tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas,  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$ ,  $\sigma(t)$ . De la primera ecuación despejamos  $E_1$ ,

$$E_1 = E_2 \frac{d_2}{d_1}$$

y lo sustituimos en las otras dos,

$$E_2 \frac{d_1 + d_2}{d_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

$$E_2 \frac{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1}{d_1} = -\frac{d\sigma}{dt}$$

Despejando  $E_2$  en la primera de las ecuaciones anteriores,

$$E_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\epsilon_o}$$

y sustituyendo en la segunda tenemos,

$$\frac{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\epsilon_o} = -\frac{d\sigma}{dt}$$

Trasponiendo términos,

$$\sigma = -\epsilon_o \frac{d_1 + d_2}{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1} \frac{d\sigma}{dt}$$

que es una ecuación diferencial de primer grado. Para simplificar definimos  $\tau$  mediante la siguiente igualdad,

$$\epsilon_o \frac{d_1 + d_2}{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1} = \tau$$

que transforma la ecuación anterior en,

$$\tau \frac{d\sigma}{dt} = -\sigma$$

y entonces la solución, aplicando la condición inicial  $\sigma(0) = \sigma_o$ , es,

$$\sigma(t) = \sigma_o e^{-t/\tau}$$

Todos los campos que aparecen en el problema tienen la misma expresión funcional y sólo hay que tener cuidado en su valor inicial.

$$E_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} e^{-t/\tau} ; \quad E_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} e^{-t/\tau}$$

$$D_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \sigma_o e^{-t/\tau} ; \quad D_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} \sigma_o e^{-t/\tau}$$

$$J_2 = \frac{d_1 \gamma_2}{d_1 + d_2} \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} e^{-t/\tau} ; \quad J_1 = \frac{d_2 \gamma_1}{d_1 + d_2} \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} e^{-t/\tau}$$

Sustituyendo los datos del enunciado tenemos que,

$$\tau = \frac{\epsilon_o (d_1 + d_2)}{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1} = 0,25 \text{ s.}$$

por tanto, cuando haya transcurrido un tiempo  $t = 0,25$  s. los campos toman los siguientes valores:

$$E_2(0,25) = \frac{0,1}{0,3} \frac{10^{-6}}{(1/36\pi) \times 10^{-9}} e^{-1} \simeq 1,39 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$E_1(0,25) \simeq 2,77 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$D_2(0,25) \simeq 1,23 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 ; \quad D_1(0,25) \simeq 2,45 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$J_2(0,25) \simeq 7,36 \times 10^{-7} \text{ A/m}^2 ; \quad J_1(0,25) \simeq 7,36 \times 10^{-7} \text{ A/m}^2$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= -E_1 \mathbf{u}_y & ; & & \mathbf{E}_2 &= E_2 \mathbf{u}_y \\ \mathbf{D}_1 &= -D_1 \mathbf{u}_y & ; & & \mathbf{D}_2 &= D_2 \mathbf{u}_y \\ \mathbf{J}_1 &= -J_1 \mathbf{u}_y & ; & & \mathbf{J}_2 &= J_2 \mathbf{u}_y\end{aligned}$$

**PROBLEMA 8.24**

Entre dos placas conductoras cuadradas, de lado  $L$  y separadas la distancia  $d$ , se disponen dos medios materiales que ocupan cada uno la mitad del espacio entre placas. El medio (1) tiene una permitividad  $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$  y conductividad  $\gamma_1 = 17.832 \times 10^{-12} \Omega \text{ m}^{-1}$ ; en el medio (2)  $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$  y  $\gamma_2$  no se conoce.

Inicialmente se cierra el interruptor  $S$  y se carga el condensador al potencial  $V_0$ . A continuación, en un instante que consideramos  $t = 0$  se abre el interruptor  $S$ .

Transcurrido un segundo la diferencia de potencial (d.d.p.) entre las placas se reduce a  $V = V_0/e$  ( $e =$  base de logaritmos neperianos).

Calcular la conductividad  $\gamma_2$ .

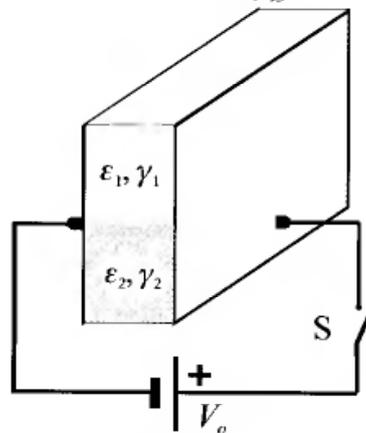
Suponemos despreciables los efectos de borde. ( $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ).

**Ayuda:** Aplicar la ecuación de continuidad a un volumen que englobe una de las placas conductoras.

**Solución**

Para obtener  $\gamma_2$  debemos conocer cómo varía la diferencia de potencial entre placas del condensador con el tiempo. Esto se consigue mediante la aplicación de la ecuación de continuidad y el teorema de Gauss a una superficie que rodee una de las placas. Es decir, debemos aplicar,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt} \quad ; \quad \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$

**Figura P8.24**

Además, en ambas zonas entre las placas se verifica que,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = V$$

Es decir,

$$E_1 = E_2 = \frac{V}{d}$$

Aplicando las dos primeras ecuaciones a una superficie que rodee una de las placas,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} &= J_1 \frac{S}{2} + J_2 \frac{S}{2} = -\frac{dQ}{dt} \\ \frac{1}{2} S (J_1 + J_2) &= -\frac{dQ}{dt} \end{aligned} \quad (8.24.1)$$

Aplicando la relación entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} &= \varepsilon_1 E_1 \frac{S}{2} + \varepsilon_2 E_2 \frac{S}{2} = Q \\ \frac{1}{2} S (\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2) &= Q \end{aligned}$$

Como  $E_1 = E_2 = V/d$  y  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,

$$S \varepsilon_1 \frac{V}{d} = Q \quad (8.24.2)$$

Ahora, para conectar las dos ecuaciones debemos tener en cuenta la ecuación que relaciona la densidad de corriente con el campo eléctrico,  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ . Llevando esta relación a la ecuación (8.24.1), tenemos,

$$\frac{1}{2} S (\gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2) = -\frac{dQ}{dt}$$

Dado que  $E_1 = E_2 = V/d$

$$\frac{1}{2} S \frac{V}{d} (\gamma_1 + \gamma_2) = -\frac{dQ}{dt} \quad (8.24.3)$$

Si sustituimos el valor de  $Q$  obtenido en la ecuación (8.24.2) en la (8.24.3), tendremos,

$$\frac{1}{2} S \frac{V}{d} (\gamma_1 + \gamma_2) = -\frac{d}{dt} \left( S \varepsilon_1 \frac{V}{d} \right) = -\frac{S \varepsilon_1}{d} \frac{dV}{dt}$$

Simplificando la ecuación anterior queda,

$$\frac{1}{2} V (\gamma_1 + \gamma_2) = -\varepsilon_1 \frac{dV}{dt}$$

Separando las variables,

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{2\varepsilon_1} (\gamma_1 + \gamma_2) dt$$

Integrando,

$$\ln V = -\frac{1}{2\varepsilon_1}(\gamma_1 + \gamma_2)t + C_o$$

De donde se deduce que,

$$V = K \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon_1}(\gamma_1 + \gamma_2)t\right)$$

Dado que  $V = V_o$  en el instante  $t = 0 \rightarrow K = V_o$ , por tanto,

$$V = V_o \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon_1}(\gamma_1 + \gamma_2)t\right)$$

Transcurrido un segundo  $V = V_o/e$ , es decir,

$$V_o e^{-1} = V_o \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon_1}(\gamma_1 + \gamma_2)\right)$$

La igualdad anterior nos lleva a la siguiente,

$$\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2\varepsilon_1} = 1 \quad (8.24.4)$$

En la relación (8.24.4) conocemos  $\gamma_1 = 17,832 \times 10^{-12}$ ,  $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_o = 4 \times 8,854 \times 10^{-12}$

$$\gamma_2 = 2\varepsilon_1 \times 1 - \gamma_1$$

Por tanto,

$$\gamma_2 = 70,832 \times 10^{-12} - 17,832 \times 10^{-12}$$

La solución para  $\gamma_2$  es,

$$\gamma_2 = 53 \times 10^{-12} \quad [\Omega \text{ m}^{-1}]$$

### PROBLEMA 8.25

Entre dos placas conductoras de radio  $a$  y conductividad  $\gamma'$ , existe una barra conductora cilíndrica de radio  $a$ , longitud  $L$ , permitividad  $\varepsilon \simeq \varepsilon_o$  y conductividad  $\gamma = \gamma_o(1 + y/L)$ . Se aplica una diferencia de potencial  $V_o$  entre las placas.

1) Calcular la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el cilindro.

2) Calcular la potencia disipada en un disco de espesor  $e$ , cuyo borde está situado a una distancia  $L/2$  del origen  $O$ .

Suponemos que la conductividad  $\gamma' \gg \gamma$ .

#### Solución

1) *Densidad de corriente*

A partir del enunciado del problema se pueden establecer las siguientes conclusiones:

1a) La diferencia de potencial entre los extremos de la barra es igual a  $V_o$ . Esta condición se expresa en la siguiente ecuación:

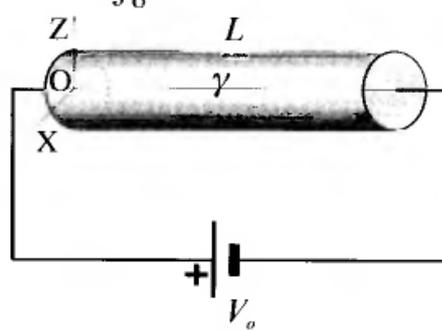
$$\int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o$$


Figura P8.25

1b) No existen sumideros ni fuentes de carga a lo largo de la barra. Por tanto, en condiciones estacionarias la ecuación de continuidad establece que la densidad de corriente es constante a lo largo de la barra.

$$\text{De } -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} \text{ como } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

y, por tanto, se deduce que las componentes normales de  $\mathbf{J}$  son continuas,

$$\mathbf{J} = J_o \mathbf{u}_y$$

Teniendo en cuenta la relación constitutiva  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  entre el campo eléctrico y la densidad de corriente

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} \quad \text{con} \quad \gamma = \gamma_o(1 + y/L)$$

$$\mathbf{E} = \frac{J_o}{\gamma_o(1 + y/L)} \mathbf{u}_y$$

Por otra parte, en el camino de integración que elegimos  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{u}_y$ .

Sustituyendo los valores anteriores en la primera expresión, obtenemos

$$\int_0^L \frac{J_o}{\gamma_o(1 + y/L)} \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y dy = V_o$$

Operando

$$V_o = \frac{L J_o}{\gamma_o} [\ln(1 + y/L)]_0^L = \frac{L J_o}{\gamma_o} \ln 2$$

De donde se deduce el valor de  $J_o$ ,

$$J_o = \frac{V_o \gamma_o}{L \ln 2}$$

Una vez obtenido  $J_o$  los vectores de campo en cada punto vienen dados por,

$$\mathbf{J} = \frac{V_o \gamma_o}{L \ln 2} \mathbf{u}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{V_o}{L \ln 2} \frac{1}{(1 + y/L)} \mathbf{u}_y$$

2) *Potencia disipada*

La potencia o energía disipada por unidad de tiempo en el disco de espesor  $e$  definido en el enunciado vendrá dada por

$$P = \int_{L/2}^{L/2+e} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv$$

con  $dv = \pi a^2 dy$

Sustituyendo las expresiones para los vectores de campo

$$P = \int_{L/2}^{L/2+e} \frac{V_o^2 \gamma_o}{L^2 \ln^2 2} \frac{1}{1+y/L} \pi a^2 dy = \pi a^2 \frac{V_o^2 \gamma_o}{L \ln^2 2} [\ln(1+y/L)]_{L/2}^{L/2+e}$$

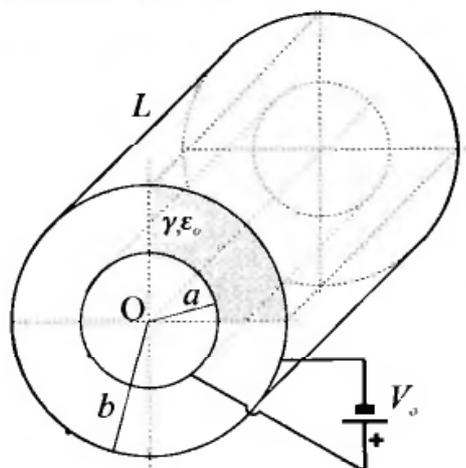
Operando resulta,

$$P = \pi a^2 \frac{V_o^2 \gamma_o}{L \ln^2 2} \ln\left(1 + \frac{2e}{3L}\right)$$

**PROBLEMA 8.26**

En la figura P8.26 se muestra un cable coaxial de longitud  $L$ , radio interior  $a$  y exterior  $b$ . Un sector de corona circular de  $90^\circ$  está ocupado por un material cuya conductividad es  $\gamma$ , siendo su permitividad  $\epsilon_o$ .

Los conductores coaxiales se unen a una batería  $V_o$ . Calcular la potencia disipada en el sector de corona circular.



**Figura P8.26**

**Solución**

Para calcular la potencia disipada tenemos que obtener la expresión para la densidad de corriente  $\mathbf{J}(\rho)$ . Para ello sabemos: 1), que en el sector comprendido entre  $0$  y  $\pi/2$ , la conductividad es  $\gamma$  y 2) que en el sector comprendido entre  $\pi/2$  y  $2\pi$ , la conductividad  $\gamma = 0$ .

Dada la simetría cilíndrica del sistema, suponemos que la corriente  $\mathbf{J}$  es radial para  $a \leq \rho \leq b$ .

En el sector de conductividad nula no habrá corriente, por tanto, la corriente total será,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} J_\rho L \rho d\varphi = J_\rho L \frac{\pi}{2} \rho$$

por tanto,

$$\mathbf{J} = \frac{2I}{\pi L} \frac{\mathbf{u}_\rho}{\rho}$$

Además se debe cumplir que,

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_o$$

En el medio conductor la ecuación constitutiva es,

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma}$$

Utilizando las dos últimas ecuaciones tendremos lo siguiente:

$$V_o = \int_a^b \frac{2I}{\pi L \gamma} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{2I}{\pi \gamma L} [\ln \rho]_a^b = \frac{2I}{\pi \gamma L} \ln \frac{b}{a}$$

De donde se deduce el valor de la corriente

$$I = \gamma V_o \frac{\pi L}{2 \ln(b/a)}$$

Por tanto, ya podemos calcular los vectores  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{J} = \frac{V_o \gamma}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{u}_\rho}{\rho} \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{V_o}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{u}_\rho}{\rho}$$

La potencia disipada en un volumen ocupado por el sector será,

$$P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \int_a^b \int_0^{\pi/2} \gamma \left( \frac{V_o}{\ln(b/a)} \right)^2 \frac{1}{\rho^2} (L \rho d\varphi d\rho)$$

$$P = \gamma \left( \frac{V_o}{\ln(b/a)} \right)^2 L \int_a^b \int_0^{\pi/2} \frac{d\rho d\varphi}{\rho} = \frac{V_o^2}{\ln^2(b/a)} \frac{\pi L \gamma}{2} \ln(b/a)$$

Es decir,

$$P = \gamma V_o^2 \frac{\pi L}{2 \ln(b/a)}$$

## Capítulo 9

# CAMPO MAGNÉTICO I

## 9.1 INTRODUCCIÓN

### 9.1.1 LEYES DE AMPÈRE Y BIOT Y SAVART

Los fenómenos eléctricos provocados por la presencia de cargas eléctricas, se estudiaban de forma independiente de los fenómenos magnéticos observados en la interacción de materiales imanados como la magnetita. En Julio de 1820, Oersted mostró que una corriente eléctrica modificaba la orientación de una aguja magnética, es decir, ejercía una fuerza sobre ella. Con este descubrimiento ponía de manifiesto la conexión entre los fenómenos de origen eléctrico y magnético, y que la corriente crea una perturbación a su alrededor, que tiene como consecuencia una fuerza sobre el material imanado (aguja magnética) similar a la ejercida por otra aguja magnética.

#### *Ley de Ampère*

Transcurridos pocos meses después de conocidos los experimentos de Oersted, el 25 de Septiembre del 1820, Ampère comunicaba sus resultados sobre la fuerza que ejercen entre sí dos hilos recorridos por una corriente. Dichos resultados se conocen como la ley de fuerzas de Ampère, que referida a los circuitos cerrados indicados en la figura 9.1, y en la forma vectorial conocida actualmente es:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.1)$$

Esta fuerza es la que se ejerce sobre el circuito  $C$  debido a la corriente que circula por el circuito  $C'$ . Se supone que la corriente en los dos circuitos es uniforme (continua), es decir, se verifica que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

La ecuación (9.1), aparentemente, no cumple la tercera ley de Newton,  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$ ,  $\mathbf{F}'$  es la fuerza ejercida sobre el circuito  $C'$  debida a la corriente que circula por  $C$ . Mediante unas transformaciones vectoriales, y teniendo en cuenta que tanto  $C$  como  $C'$  son circuitos cerrados, se llega a la expresión siguiente:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_o}{4\pi} I I' \oint_C \oint_{C'} \frac{(d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.2)$$

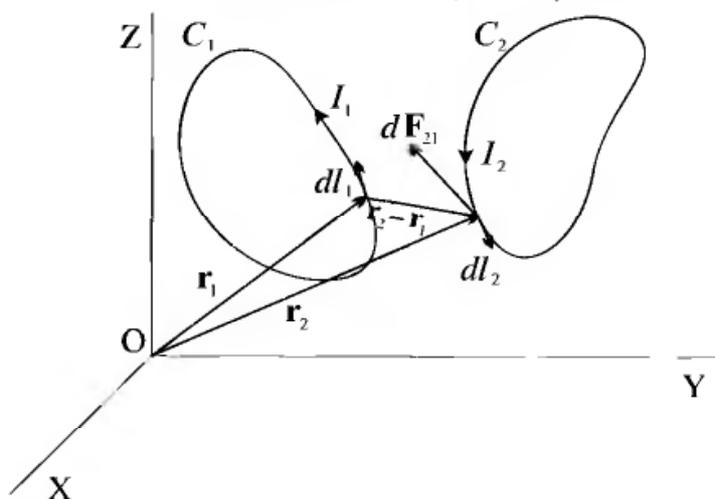


Figura 9.1

La ecuación (9.2) muestra claramente que si cambiamos  $d\mathbf{l} \rightarrow d\mathbf{l}'$  y  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ , el resultado es una fuerza del mismo módulo y dirección pero de sentido contrario, es decir se cumple la tercera ley de Newton.

Para que los dos circuitos se mantengan en una posición dada debe existir una fuerza mecánica de signo contrario a  $\mathbf{F}$ .

La constante de proporcionalidad  $\mu_o/4\pi$  que aparece en las fórmulas anteriores, se debe a que hemos elegido el sistema internacional (S.I.) de unidades. En dicho sistema  $\mu_o$  es la permeabilidad magnética del vacío y su valor es:

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [N/A}^2\text{]} \text{ o [henrio/m] [H/m]} \quad (9.3)$$

Aplicando la ecuación (9.1) al caso de dos conductores rectilíneos paralelos e indefinidos, separados por una distancia  $d$ , se obtiene que la fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I I'}{d}$$

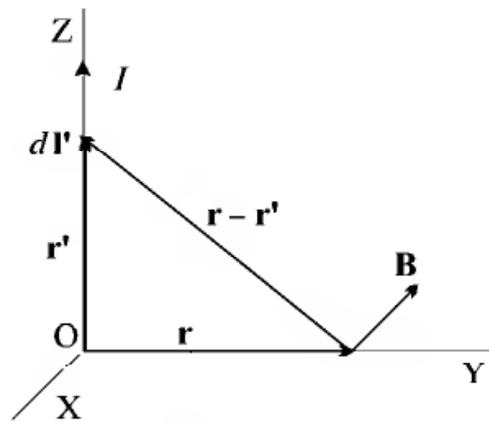
Esta expresión sirve para definir el amperio (A). Sustituyendo  $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ ,  $d = 1 \text{ m}$ ,  $I = I' = 1 \text{ A}$ , la fuerza por unidad de longitud es  $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ .

El amperio es por tanto la corriente que debe circular por los dos conductores rectilíneos paralelos e indefinidos, para que se ejerza una fuerza de  $2 \times 10^{-7}$  newtons (N).

### *Ley de Biot y Savart*

Poco tiempo después de la comunicación de los resultados de Ampère, se hacían públicos los trabajos de Biot y Savart sobre el campo magnético creado por un hilo rectilíneo recorrido por una corriente continua. La ecuación, conocida como ley de Biot y Savart, que expresa sus resultados en la forma conocida actualmente y referida a la corriente indicada en la figura 9.2, es:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.4)$$



**Figura 9.2**

El vector  $\mathbf{B}$ , campo magnético, se define mediante la ecuación (9.4) como el campo magnético creado por un circuito recorrido por una corriente uniforme (continua). La unidad de  $\mathbf{B}$  es el tesla (T). También se usa el weber/m<sup>2</sup>, que está relacionada con la densidad de flujo magnético, denominación que también suele darse al vector  $\mathbf{B}$ .

### *Relación entre las leyes de Ampère y Biot y Savart*

Si tomamos como principio de partida la ley de Biot y Savart, podemos encontrar la expresión de Ampère, a través de la definición de fuerza sobre un elemento de corriente en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B}$ . Esta fuerza, conocida como fuerza de Laplace, para un elemento diferencial es:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (9.5)$$

$\mathbf{B}(\mathbf{r})$  es el campo magnético en el punto donde se considera el circuito elemental  $I d\mathbf{l}$ . Esta fuerza es perpendicular al vector  $\mathbf{B}$  y a  $d\mathbf{l}$ . Si consideramos  $I d\mathbf{l}$  como parte del circuito  $C$  indicado en la figura 9.1, la integración de la ecuación (9.5) sobre  $C$  nos lleva a la relación siguiente,

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (9.6)$$

Sustituyendo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  por el valor dado en la ecuación (9.4), se obtiene,

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

La ecuación anterior es idéntica a la ecuación. (9.1).

También podemos obtener la fuerza en la forma indicada por la ecuación (9.6) a partir de la ley de Ampère, sustituyendo los términos referidos a la integral sobre  $C'$  por  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , es decir, tomando los componentes

$$\frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

e igualándolos a  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Esta igualdad es la ecuación (9.4) que conocemos como ley de Biot y Savart.

### 9.1.2 CAMPO MAGNÉTICO DEBIDO A CORRIENTES Y CARGAS EN MOVIMIENTOS

#### *Distribuciones de corriente*

Las distribuciones de corriente usuales son las de volumen y superficiales. La primera se caracteriza por la densidad  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  y la segunda por  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ .

Si tenemos una distribución de corriente  $\mathbf{J}$  sobre un volumen  $V'$ , como indica la figura 9.3, podemos encontrar la ecuación para el campo magnético  $\mathbf{B}$  sustituyendo en la ecuación (9.4)  $I' d\mathbf{l}'$  por  $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}' \cdot d\mathbf{l}' = \mathbf{J} dv'$ . Integrando sobre el volumen  $V'$  la ecuación citada se transforma en

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.7)$$

Esta ecuación nos proporciona el campo magnético en un punto  $\mathbf{r}$  debido a una distribución de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  en el volumen  $V'$ .  $\mathbf{J}$  tiene dimensiones de  $\text{A}/\text{m}^2$ .

En una distribución superficial de corriente  $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$ , se procede de forma análoga al caso anterior, con la diferencia de sustituir  $I' d\mathbf{l}'$  por  $(\mathbf{K} \cdot d\mathbf{w}) d\mathbf{l}' = \mathbf{K} ds'$ , y  $ds'$  es la superficie elemental donde se sitúa  $\mathbf{K}$ .  $\mathbf{K}$  tiene dimensiones de  $\text{A}/\text{m}$ . Llevando  $\mathbf{K} ds'$  a la ecuación (9.4) tendremos,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.8)$$

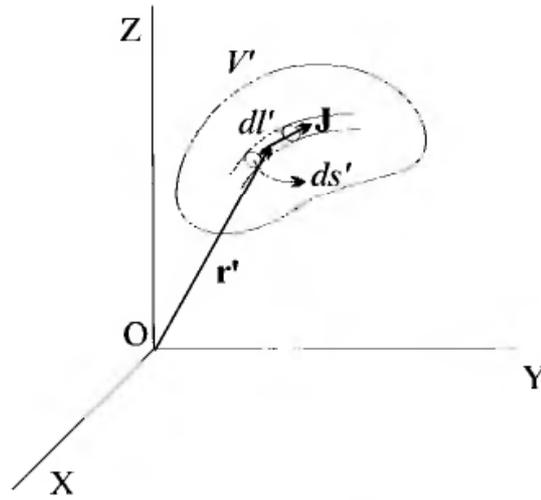


Figura 9.3

*Cargas en movimiento*

Si un volumen  $V'$  que tiene una densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}')$  se mueve con velocidad uniforme  $\mathbf{v}'$ , siendo  $\mathbf{v}'$  mucho menor que la velocidad de la luz  $c$ , este movimiento de cargas crea un campo magnético  $\mathbf{B}$ , que se puede calcular sustituyendo en la ley de Biot y Savart, ecuación (9.4),  $I d\mathbf{l}'$  por  $\rho(\mathbf{r}')\mathbf{v}' dv'$ , e integrando sobre el volumen  $V'$ , ya que  $I' = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{v}' \cdot d\mathbf{s}'$  y  $d\mathbf{s}' \cdot d\mathbf{l}' = dv'$ . El resultado es la ecuación siguiente:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.9)$$

Si toda la distribución de carga  $\rho$  estuviera concentrada en un volumen tan pequeño que podemos considerarla como una carga puntual  $q = \rho dv'$ , entonces la ecuación (9.9) se simplifica, quedando de la forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.10)$$

Esta ecuación expresa el campo magnético creado por una carga puntual con movimiento uniforme y  $v' \ll c$ .

**9.1.3 FUERZA DE LORENTZ**

Nos interesa encontrar la forma que adoptan las ecuaciones (9.5) y (9.6) en el caso de distribuciones de corriente y cargas en movimiento. Además ve-

remos como se puede expresar el par de fuerzas, y terminaremos enunciando la fuerza de Lorentz.

*Distribuciones de corriente*

En el caso de una distribución de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , situada en presencia de un campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , se sustituye  $I d\mathbf{l}$  por  $\mathbf{J} dv$ , por tanto las ecuaciones respectivas se transforman en las siguientes:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv \quad (9.11)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv \quad (9.12)$$

Cuando se trata de una distribución superficial  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ , se procede de forma similar al caso anterior, sustituyendo  $I d\mathbf{l}$  por  $\mathbf{K} ds$ , con lo cual obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) ds \quad (9.13)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{K}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) ds \quad (9.14)$$

*Cargas en movimiento*

Cuando tratamos de calcular la fuerza sobre una distribución de cargas  $\rho(\mathbf{r})$  que se mueve con velocidad uniforme  $\mathbf{v}$ , con  $v \ll c$ , la fuerza se obtiene cambiando  $I d\mathbf{l}$  por  $\rho v dv$ , en consecuencia tendremos,

$$d\mathbf{F} = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv \quad (9.15)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv \quad (9.16)$$

Si consideramos una distribución de carga en un volumen tan pequeño que podemos considerar  $q = \rho dV$ , la ecuación (9.16) se reduce a la siguiente expresión,

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (9.17)$$

El subíndice  $m$  expresa que la fuerza es magnética, con lo cual la distinguimos de la debida a un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , que es,

$$\mathbf{F}_e = q \mathbf{E}$$

*Fuerza de Lorentz*

Una carga  $q$  en movimiento, en el seno de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y un campo magnético  $\mathbf{B}$ , sufre una fuerza, conocida con el nombre de **fuerza de Lorentz**, que es la suma de las dos fuerzas anteriores  $\mathbf{F}_m$  y  $\mathbf{F}_e$ ,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (9.18)$$

*Par de fuerzas*

El par de fuerzas sobre una distribución de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , se define mediante la ecuación,

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dv \quad (9.19)$$

Cuando se trata de corrientes filiformes la ecuación anterior se simplifica y queda en la forma siguiente:

$$\mathbf{T} = \int_C \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (9.20)$$

Si se trata de una distribución superficial de corriente, la forma del par será:

$$\mathbf{T} = \int_C \mathbf{r} \times (\mathbf{K}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) ds \quad (9.21)$$

De forma análoga podremos obtener las expresiones para otras distribuciones de corriente o cargas con movimiento uniforme.

## 9.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 9.1

El dispositivo indicado en la figura P9.1.1, está formado por un conductor rectilíneo indefinido en la dirección  $Z > 0$ , unido a un plano conductor indefinido. La corriente  $I$  que circula por el conductor se distribuye con simetría radial por el plano.

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P del eje Z ( $z < 0$ ), debida a las corrientes en el conductor y plano.



Figura P9.1.1

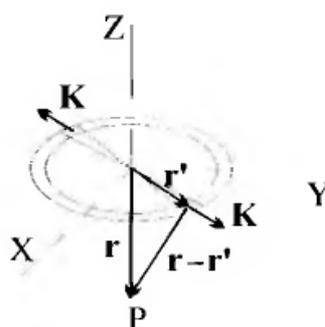


Figura P9.1.2

#### Solución

Para obtener la solución, procedemos calculando de forma independiente el campo magnético debido al conductor rectilíneo y el que corresponde al plano, después sumamos vectorialmente los dos.

a) *Campo B debido a la corriente rectilínea.*

Utilizamos la ley de Biot y Savart en la forma dada por la ecuación (9.4), con los siguientes valores para los vectores de posición y  $d\mathbf{l}'$ :

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r}' = z'\mathbf{u}_z ; \quad d\mathbf{l}' = dz\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

En este caso el numerador es nulo ya que,

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = dz\mathbf{u}_z \times (z - z')\mathbf{u}_z = 0$$

por tanto el campo creado es nulo.

$$\mathbf{B}_1 = 0$$

b) *Campo B debido a la corriente en el plano.*

Vamos utilizar la ley de Biot y Savart en la forma indicada por la ecuación (9.8).

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}') = |\mathbf{K}(\mathbf{r}')| \mathbf{u}_\rho$$

La figura P9.1.2 muestra que para cada superficie elemental  $ds'$  hay otra simétrica que tiene una densidad de corriente  $\mathbf{K}$  del mismo módulo y dirección pero sentido contrario, por tanto al sumar (integrar) los elementos simétricos se anulan y como consecuencia el campo magnético es nulo, es decir,

$$\mathbf{B}_2 = 0$$

La respuesta definitiva es,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 0$$

**PROBLEMA 9.2**

Mediante la ley de Biot y Savart, calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P  $(0, 1, \sqrt{3})$  indicado en la figura P9.2.1.

Las dos corrientes son indefinidas en la dirección positiva de los ejes Y y Z.

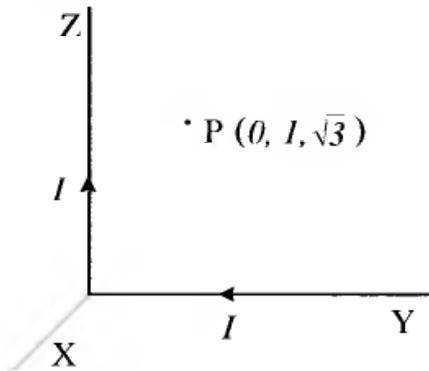


Figura P9.2.1

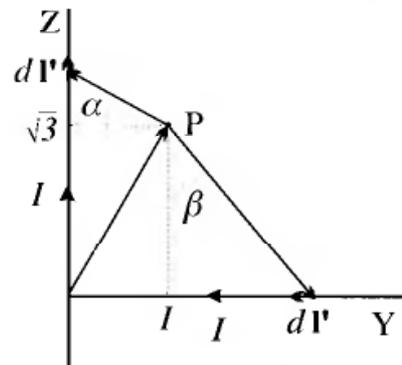


Figura P9.2.2

**Solución**

El campo  $\mathbf{B}$  en P será la suma del producido por la corriente que circula por el eje Z más el debido a la corriente sobre el eje Y.

a) Campo  $\mathbf{B}_1$  debido a la corriente sobre el eje Z.

Aplicamos la ley de Biot y Savart en la forma expresada por la ecuación (9.4),

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$d\mathbf{l}' = dz\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{u}_y + \sqrt{3}\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r}' = z\mathbf{u}_z$$

Con estos valores el numerador de la integral se reduce al siguiente,

$$I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = I dz\mathbf{u}_z \times (\mathbf{u}_y + \sqrt{3}\mathbf{u}_z - z\mathbf{u}_z) = -I dz\mathbf{u}_x$$

Observando la figura P9.2.2 y haciendo el cambio de variable  $z' = z - \sqrt{3}$ , queda,

$$z' = \tan \alpha; \quad dz' = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la integral, obtenemos,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{C'} I (\cos^3 \alpha) \left( \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{C'} \mathbf{u}_x I \cos \alpha d\alpha$$

Los límites de integración son:

$$-\arcsen(\sqrt{3}/2) = -\pi/3 \quad \text{y} \quad \pi/2$$

por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_o}{4\pi} \mathbf{u}_x \int_{-\pi/3}^{\pi/2} I \cos \alpha d\alpha = -\frac{\mu_o}{4\pi} I [\text{sen } \alpha]_{-\pi/3}^{\pi/2} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_o}{4\pi} I \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \mathbf{u}_x \quad (9.2.1)$$

b) Campo  $\mathbf{B}_2$  debido a la corriente sobre el eje Y.

Procedemos de forma similar al caso anterior. Ahora los vectores de posición y  $d\mathbf{l}'$  son:

$$d\mathbf{l}' = -dy \mathbf{u}_y; \quad \mathbf{r} = \mathbf{u}_y + \sqrt{3}\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = y\mathbf{u}_y$$

$$I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -I dy \mathbf{u}_y \times (\mathbf{u}_y + \sqrt{3}\mathbf{u}_z - y\mathbf{u}_y) = -I \sqrt{3} dy \mathbf{u}_x$$

Haciendo el cambio variable  $y' = y - 1$ , nos queda,

$$y' = \sqrt{3} \tan \beta; \quad dy' = dy = \frac{\sqrt{3} d\beta}{\cos^2 \beta}; \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} = \frac{1}{9} \sqrt{3} \cos^3 \beta$$

Los límites de integración en este caso son:

$$-\arcsen(1/2) = -\pi/6 \quad \text{y} \quad \pi/2$$

Utilizando la relaciones anteriores y operando queda,

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{u}_x \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = -\frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{\sqrt{3}}{3} [\text{sen } \beta]_{-\pi/6}^{\pi/2}$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_x \quad (9.2.2)$$

Sumando las expresiones (9.2.1) y (9.2.2) obtenemos el campo magnético total  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o}{4\pi} I \left( 1 + \sqrt{3} \right) \mathbf{u}_x$$

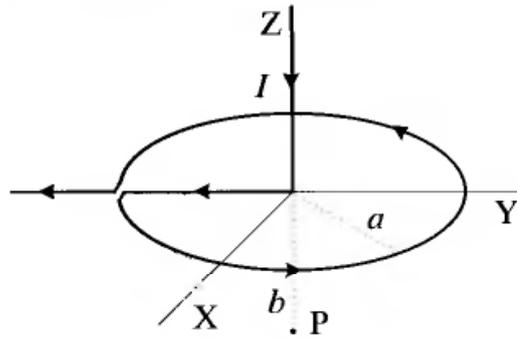
**PROBLEMA 9.3**

Disponemos de un conductor cuya forma es la indicada en la figura P9.3.1. Este conductor se prolonga hasta  $y = -\infty$  y  $z = \infty$ . Por dicho conductor circula la corriente  $I$ .

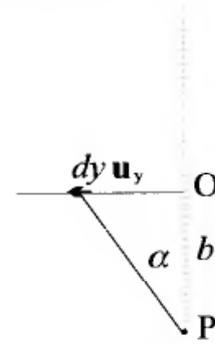
Calcular el campo magnético en el punto  $P(0, 0, b)$ .

**Solución**

El cálculo de  $\mathbf{B}$  se hace mediante la ley de Biot y Savart, ecuación (9.4), descomponiendo el circuito en los tramos siguientes: 1) Corriente rectilínea sobre la parte positiva del eje Z. 2) Corriente rectilínea sobre la parte negativa del eje Y. 3) Corriente sobre la circunferencia de radio  $a$ .



**Figura P9.3.1**



**Figura P9.3.2**

1)

En este tramo  $d\mathbf{l}'$  es paralela a  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ,  $d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = 0$$

2)

Los vectores correspondientes a este tramo son:

$$d\mathbf{l}' = dy\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r} = -b\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r}' = y\mathbf{u}_y$$

Observando la figura P9.3.2, podemos establecer que,

$$y = b \tan \alpha ; \quad dy = b \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} ; \quad b = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \alpha$$

Llevando las relaciones anteriores a la ecuación (9.4), obtenemos,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I dy \mathbf{u}_y \times (-b\mathbf{u}_z - y\mathbf{u}_y)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I b \int_{C'} \frac{-dy \mathbf{u}_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El sentido de la corriente determina que los límites de integración sean 0 y  $-\pi/2$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I b \mathbf{u}_x \int_{C'} b \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \left( \frac{\cos \alpha}{b} \right)^3 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \mathbf{u}_x \int_0^{-\pi/2} \cos \alpha d\alpha$$

La integración produce el siguiente valor del campo,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{4\pi b} \mathbf{u}_x$$

3)

En la circunferencia los vectores son:

$$d\mathbf{l}' = ad\varphi \mathbf{u}_\varphi; \quad \mathbf{r} = -b\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{C'} \frac{Iad\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (-b\mathbf{u}_z - a\mathbf{u}_\rho)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Cada elemento  $ad\varphi$  tiene un simétrico que al multiplicarlo por  $b\mathbf{u}_z$  produce un término del mismo módulo y signo opuesto, en consecuencia, al integrar se anulan los términos correspondientes.  $\mathbf{B}_3$  queda de la forma,

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{C'} \frac{-Iad\varphi \mathbf{u}_\varphi \times a\mathbf{u}_\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Ia^2 d\varphi \mathbf{u}_z}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

El campo magnético total será la suma de los valores obtenidos en los tres apartados anteriores, es decir

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left( \frac{1}{b} \mathbf{u}_x + \frac{2\pi a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \right)$$

#### PROBLEMA 9.4

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el origen de coordenadas debido a las espiras indicadas en la figura P9.4 por las que circula una corriente  $I$ .

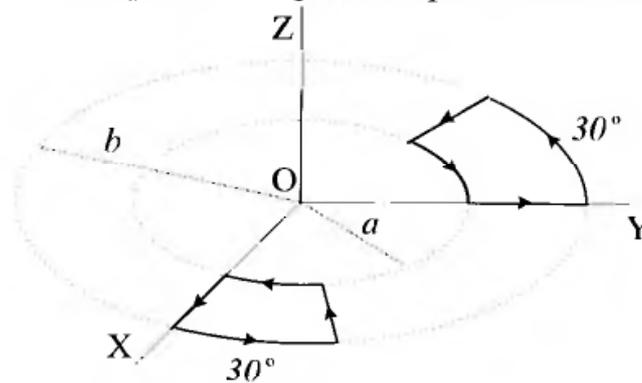


Figura P9.4

#### Solución

Como en los problemas anteriores utilizaremos la ley de Biot y Savart para encontrar la solución.

Cada espira se compone de dos tramos rectos radiales y dos arcos de circunferencia. En los tramos rectos  $\mathbf{r}' = \rho'\mathbf{u}_\rho$  y  $d\mathbf{l}' = d\rho'\mathbf{u}_\rho$ ; además  $\mathbf{r} = 0$ ,

por tanto  $d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ . Es decir, los tramos rectos no contribuyen al campo magnético en el origen.

En el arco interior de la espira 1,  $\mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho$ ;  $I d\mathbf{l}' = -I a d\varphi \mathbf{u}_\varphi$ ;  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a$

En el arco exterior de la espira 1,  $\mathbf{r}' = b\mathbf{u}_\rho$ ;  $I d\mathbf{l}' = I b d\varphi \mathbf{u}_\varphi$ ;  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = b$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (9.4), queda,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_0^{\pi/6} \left( \frac{-a d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (-a\mathbf{u}_\rho)}{a^3} + \frac{b d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (-b\mathbf{u}_\rho)}{b^3} \right)$$

Integrando y realizando operaciones, obtenemos,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{24} I \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_z$$

La espira 2 se trata de forma similar a la anterior, lo único que cambia son los límites de integración, que ahora son:  $\pi/2$  y  $2\pi/3$ . Por lo que,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \left( \frac{-a d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (-a\mathbf{u}_\rho)}{a^3} + \frac{b d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (-b\mathbf{u}_\rho)}{b^3} \right)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o}{24} I \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_z$$

El campo total será:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o}{12} I \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 9.5

Por la espira indicada en la figura 9.5 pasa una corriente  $I$ . La espira se sitúa en el plano XY. Calcular el campo magnético en el punto P(0, 0, R).

#### Solución

Aplicamos la ley de Biot y Savart a cada uno de los tramos que componen la espira. El campo magnético en el punto P vendrá dada por la suma de las contribuciones de cada uno de los tramos.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

1) Tramo recto sobre el eje X

Los vectores de posición y la longitud elemental son:

$$\mathbf{r} = R\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = x\mathbf{u}_x; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -x\mathbf{u}_x + R\mathbf{u}_z; \quad d\mathbf{l} = dx\mathbf{u}_x$$

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -R dx \mathbf{u}_y; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (x^2 + R^2)^{1/2}$$

Sustituyendo en la expresión para el campo magnético

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^R \frac{-I R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y = \frac{\mu_o R I}{4\pi} \left[ \frac{-x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \right]_0^R \mathbf{u}_y$$

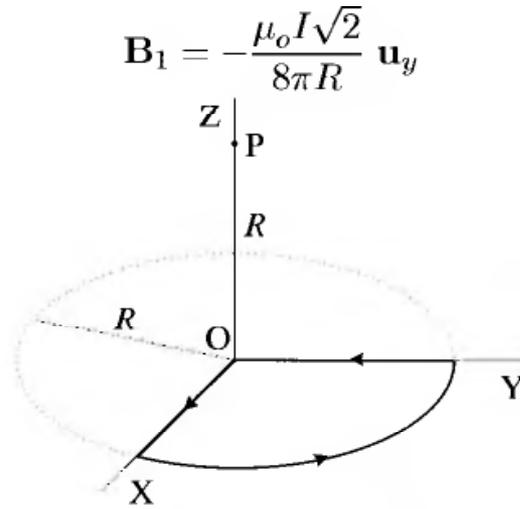


Figura P9.5

2) Tramo recto sobre el eje Y

Los vectores de posición y la longitud elemental son:

$$\mathbf{r} = R\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = y\mathbf{u}_y; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -y\mathbf{u}_y + R\mathbf{u}_z; \quad d\mathbf{l} = dy\mathbf{u}_y$$

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R dy \mathbf{u}_x; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + y^2)^{1/2}$$

Sustituyendo en la expresión para el campo magnético, y teniendo en cuenta que la corriente tiene sentido contrario a  $\mathbf{u}_y$ ,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^R \frac{-I R dy}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_o R I}{4\pi} \left[ \frac{y}{R^2 \sqrt{y^2 + R^2}} \right]_0^R \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o I \sqrt{2}}{8\pi R} \mathbf{u}_x$$

3) Tramo curvo de radio R

$$\mathbf{r} = R\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_\rho; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R\mathbf{u}_\rho + R\mathbf{u}_z; \quad d\mathbf{l} = R d\varphi \mathbf{u}_\varphi$$

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R^2 d\varphi \mathbf{u}_z + R^2 d\varphi \mathbf{u}_\rho; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R\sqrt{2}$$

Sustituyendo en la expresión para el campo magnético

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{I R^2 d\varphi (\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_\rho)}{R^3 2\sqrt{2}}$$

Considerando que  $\mathbf{u}_\rho = \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \varphi \mathbf{u}_y$ , la expresión anterior se transforma en la siguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3 &= \frac{\mu_o I}{8\pi R \sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} (\mathbf{u}_z + \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \varphi \mathbf{u}_y) d\varphi \\ &= \frac{\mu_o I}{8\pi R \sqrt{2}} \left( [\varphi]_0^{\pi/2} \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_x [\sin \varphi]_0^{\pi/2} + \mathbf{u}_y [-\cos \varphi]_0^{\pi/2} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I \sqrt{2}}{16\pi R} \left( \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \frac{\pi}{2} \mathbf{u}_z \right)$$

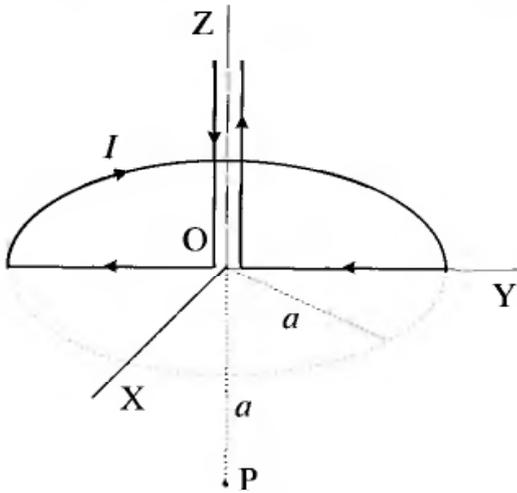
El campo total vendrá dado por la suma de las tres contribuciones

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I \sqrt{2}}{16\pi R} \left( -\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + \frac{\pi}{2} \mathbf{u}_z \right)$$

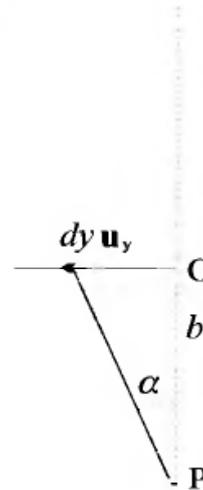
**PROBLEMA 9.6**

Un conductor formado por una semicircunferencia de radio  $a$  y cuatro tramos rectos, dispuesto como indica la figura P9.6.1, soporta el paso de una corriente  $I$ .

Calcular el campo magnético en el punto P  $(0, 0, -a)$ .



**Figura P9.6.1**



**Figura P9.6.2**

**Solución**

Suponemos que los conductores verticales están muy cerca, de forma que prácticamente coinciden sobre el eje Z, y en consecuencia los tramos sobre el eje Y prácticamente no se interrumpen en el origen de coordenadas.

Calculamos  $\mathbf{B}$  en el punto P mediante la ecuación (9.4), considerando dicho campo magnético como la suma de las aportaciones de cuatro tramos de corriente: 1) Los dos verticales sobre el eje Z. 2) Dos tramos sobre el eje Y. 3) La semicircunferencia de radio  $a$ .

1) *Tramos sobre el eje Z*

Dado que coinciden con el eje Z y cada uno lleva una corriente de sentido contrario, su aportación es nula. Además  $d\mathbf{l}'$  y  $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  son paralelos, por lo que  $d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0$ .

$$\mathbf{B}_1 = 0$$

## 2) Tramos sobre el eje Y

Como el final del tramo de la derecha prácticamente continúa con el tramo de la izquierda, se puede considerar como un conductor de corriente  $I$  entre  $a$  y  $-a$ .

Los vectores de posición y  $d\mathbf{l}'$  en este caso son:

$$\mathbf{r} = -a\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = y\mathbf{u}_y; \quad d\mathbf{l}' = dy\mathbf{u}_y; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a\mathbf{u}_z - y\mathbf{u}_y$$

Observando la figura P9.6.2, comprobamos que,

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = dy\mathbf{u}_y \times (-a\mathbf{u}_z - y\mathbf{u}_y) = -ady\mathbf{u}_x$$

$$y = a \tan \alpha \rightarrow dy = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (a^2 + y^2)^{1/2} = \frac{a}{\cos \alpha}$$

Sustituimos los valores anteriores en la ecuación (9.4). Tenemos en cuenta que los límites de integración, determinados por los extremos y el sentido de la corriente, son  $a$  y  $-a$ , que corresponden a los ángulos  $\pi/4$  y  $-\pi/4$ . En definitiva queda,

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^{-a} \frac{ady\mathbf{u}_x}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^{-a} \left( \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} \right) \frac{a^2 \mathbf{u}_x}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_a^{-a} \mathbf{u}_x \cos \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_x \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \cos \alpha d\alpha$$

Integrando obtenemos,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{4\pi a} \mathbf{u}_x$$

3) Arco de circunferencia de radio  $a$ 

Los vectores correspondientes a este tramo son:

$$\mathbf{r} = -a\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho; \quad d\mathbf{l}' = ad\varphi\mathbf{u}_\varphi; \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (-a\mathbf{u}_z - a\mathbf{u}_\rho)$$

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -a^2 d\varphi (\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}_z); \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a\sqrt{2}$$

Como  $\mathbf{u}_\rho = \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \varphi \mathbf{u}_y$ .

Llevando los valores anteriores a la integral de la ecuación (9.4), y teniendo en cuenta que los límites de integración ahora son  $3\pi/2$  y  $\pi/2$ , queda,

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2 d\varphi (\cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \varphi \mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z)}{2\sqrt{2} a^3}$$

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{4\pi 4a} (2\mathbf{u}_x + \pi \mathbf{u}_z)$$

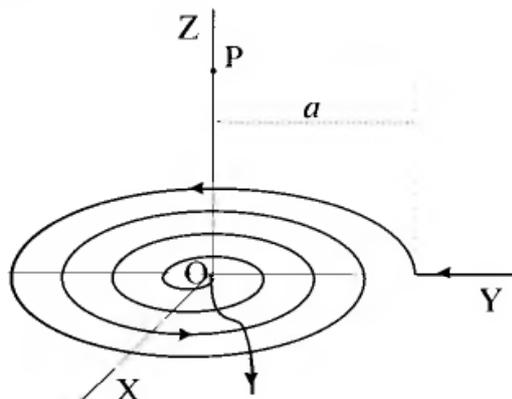
El campo magnético en P será:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{4\pi 4a} (2\mathbf{u}_x - \pi \mathbf{u}_z)$$

**PROBLEMA 9.7**

Utilizando la ley de Biot y Savart, calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  creado por la corriente en espiral en el punto P  $(0, 0, a)$ .

Los hilos de la espiral indicada en la figura P9.7 están en el plano XY, muy próximos entre sí, de forma que existen  $n$  conductores por unidad de longitud en la dirección radial.

**Figura P9.7****Solución**

Suponemos que la espiral se compone de espiras elementales cuya corriente es  $dI = nI d\rho$ .

Cada espira elemental produce un campo magnético  $d\mathbf{B}$  sobre el eje Z que se calcula de aplicando la ley de Biot y Savart a una espira circular.

Los vectores de posición son:

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}' = \rho\mathbf{u}_\rho ; d\mathbf{l}' = \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$$

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (z\mathbf{u}_z - \rho\mathbf{u}_\rho) = \rho d\varphi \mathbf{u}_\rho + \rho^2 d\varphi \mathbf{u}_z$$

Cada término  $\rho d\varphi \mathbf{u}_\rho$  tiene un simétrico de signo contrario en la parte opuesta de la espira, por tanto al integrar se anulan estos términos en la dirección de  $\mathbf{u}_\rho$ . Queda sólo la componente  $\mathbf{u}_z$ , que se obtiene llevando los valores anteriores a la ecuación (9.4), con los límites de integración 0 y  $2\pi$ :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(nId\rho) \rho^2 d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_o}{2} \frac{(nId\rho) \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

El campo magnético sobre el punto P del eje Z se obtiene integrando la expresión anterior entre 0 y la distancia  $a$  que existe entre el origen y el extremo de la espira.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{2} \int_0^a \frac{nI \rho^2 d\rho \mathbf{u}_z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o nI}{2} \left[ \frac{-\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} + \ln \left( \rho + (\rho^2 + z^2)^{1/2} \right) \right]_0^a \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{-a}{(a^2 + z^2)^{1/2}} + \ln \left( a + (a^2 + z^2)^{1/2} \right) - \ln z \right) \mathbf{u}_z$$

En el punto P donde  $z = a$ ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 9.8

Por el circuito indicado en la figura P9.8 circula una corriente  $I$ . Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto O (0, 0, 0).

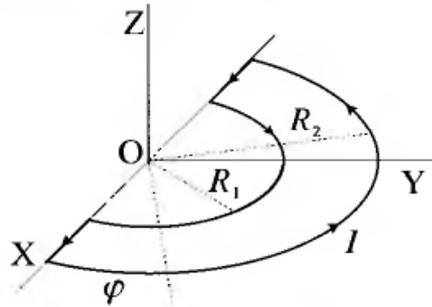


Figura P9.8

### Solución

Se aplica la ley de Biot y Savart expresada por la ecuación (9.4).

El circuito se compone de los siguientes tramos: 1) Dos tramos rectos alineados con el punto A. 2) Una semicircunferencia de radio  $R_1$  y centro en O. 3) Otra de radio  $R_2$  y el mismo centro.

#### 1) Tramos rectos

Los dos tramos rectos se caracterizan por que  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  es paralelo a  $d\mathbf{l}'$ , y como consecuencia el producto vectorial que figura en el numerador de la ley de Biot y Savart  $d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_o = 0$$

#### 2) Semicircunferencia de radio $R_1$

Los vectores de posición y  $d\mathbf{l}'$  correspondientes a ese arco son:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = R_1 \mathbf{u}_\rho; \quad d\mathbf{l}' = R_1 d\varphi \mathbf{u}_\varphi; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R_1$$

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R_1 d\varphi \mathbf{u}_\varphi (-R_1 \mathbf{u}_\rho) = R_1^2 d\varphi \mathbf{u}_z$$

Llevando los datos anteriores a la ecuación (9.4), y teniendo en cuenta que los límites de integración determinados por los extremos y el sentido de la corriente son  $\pi$  y 0.

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\pi^0 \frac{R_1^2 d\varphi}{R_1^3} \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_0 I}{4R_1} \mathbf{u}_z$$

3) Semicircunferencia de radio  $R_2$ 

Procedemos de forma análoga al caso anterior. La diferencia estriba en que se cambia  $R_2$  por  $R_1$ , y que, siendo la corriente en sentido contrario, los límites son ahora 0 y  $\pi$ . Con estas condiciones,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} \mathbf{u}_z$$

El campo magnético en A será,

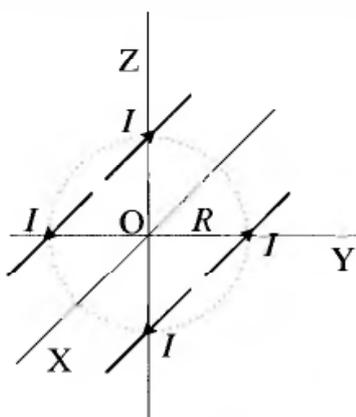
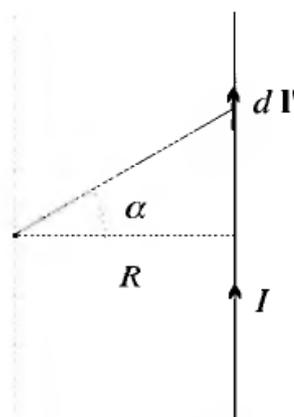
$$\mathbf{B}(A) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 9.9**

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el origen de coordenadas debido a cuatro corrientes rectilíneas indefinidas, situadas como indica la figura P9.9.1.

**Solución**

Obtendremos el campo magnético sumando las cuatro componentes que corresponden a cada conductor indefinido.

**Figura P9.9.1****Figura P9.9.2**

1) Conductor paralelo al eje X, que corta al eje Y en  $y = R$

Aplicamos la ley de Biot y Savart en la forma indicada en la ecuación (9.4). Los vectores de posición respectivos son:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = x\mathbf{u}_x + R\mathbf{u}_y; \quad d\ell' = dx\mathbf{u}_x; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$x = R \tan \alpha \rightarrow dx = R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = dx\mathbf{u}_x \times (-x\mathbf{u}_x - R\mathbf{u}_y) = -R dx \mathbf{u}_z = -R^2 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \mathbf{u}_z$$

Sustituyendo en la ecuación (9.4) y teniendo en cuenta el sentido de la corriente es hacia  $x$  negativa los límites de integración son  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ , obtenemos,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left( \frac{\cos^3 \alpha}{R^3} \right) \left( -R^2 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_o I}{4\pi R} \mathbf{u}_z \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos \alpha d\alpha$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \mathbf{u}_z$$

De forma análoga se calculan las contribuciones de los tres restantes. Únicamente hay que tener en cuenta la posición del conductor con respecto al origen de coordenadas y el sentido de la corriente que determinan el sentido del campo en el origen.

2) Conductor que corta al eje Z en  $z = R$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o I}{2\pi R} \mathbf{u}_y$$

3) Conductor que corta al eje Y en  $y = -R$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \mathbf{u}_z$$

4) Conductor que corta al eje Z en  $z = -R$

$$\mathbf{B}_4 = -\frac{\mu_o I}{2\pi R} \mathbf{u}_y$$

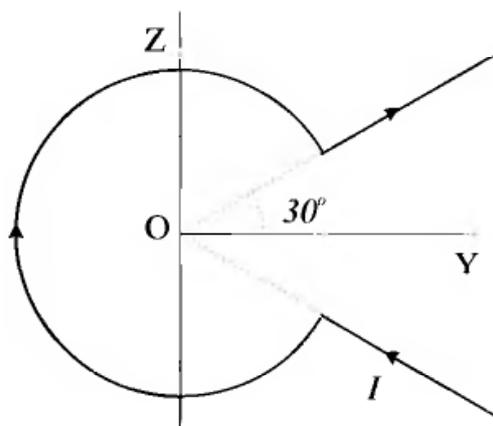
El campo magnético en origen de coordenadas será,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4 = \frac{\mu_o I}{\pi R} (-\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)$$

### PROBLEMA 9.10

Por un conductor cuya forma se indica en la figura P9.10, circula una corriente  $I$ . Calcular el campo magnético en el punto O.

**Solución**



**Figura P9.10**

Para determinar el campo magnético en el punto O aplicamos la ley de Biot y Savart al circuito.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

La contribución de los tramos rectos es nula, ya que  $I d\mathbf{l}$  es paralelo a  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  y el producto  $I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ .

En el tramo curvo tenemos:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho; \quad d\mathbf{l} = ad\varphi\mathbf{u}_\varphi; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a$$

Y por tanto

$$I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = ad\varphi\mathbf{u}_\varphi \times (-a\mathbf{u}_\rho) = a^2 d\varphi\mathbf{u}_x$$

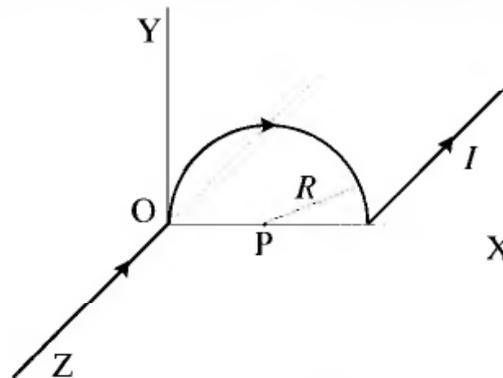
Sustituyendo estos datos y teniendo en cuenta el sentido de la corriente, los límites de integración son  $11\pi/6$  y  $\pi/6$ , por tanto el campo magnético en el punto O será,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{11\pi/6}^{\pi/6} \frac{I a^2 d\varphi}{a^3} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B} = -\frac{5}{12} \frac{\mu_o I}{a} \mathbf{u}_x$$

**PROBLEMA 9.11**

Dado el sistema de conductores filiformes dispuestos como muestra la figura P9.11, por los que circula una corriente  $I$ , calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P situado en el centro de la semicircunferencia.



**Figura P9.11**

**Solución**

La contribución de los conductores rectos se anula como se muestra a continuación. Por ser los dos del mismo tamaño y situados a la misma distancia del punto P deducimos que el módulo de  $\mathbf{B}$  es el mismo en ambos casos; y aplicando la regla de la mano derecha vemos que, para el conductor sobre el eje Z la dirección es  $-\mathbf{u}_y$ , y para el conductor sobre la recta  $z = 2R$ ,  $y = 0$  la dirección es la contraria,  $\mathbf{u}_y$ . La suma de ambas contribuciones es nula.

Por tanto el problema se reduce a calcular la contribución del tramo semicircular.

En el tramo semicircular aplicamos la ley de Biot y Savart, particularizada a corrientes filiformes,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Los vectores de posición y  $d\mathbf{l}'$  son respectivamente,

$$\mathbf{r} = R \mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r}' = R \mathbf{u}_x + R \mathbf{u}_\rho ; \quad d\mathbf{l}' = R d\varphi \mathbf{u}_\varphi$$

Siendo  $\mathbf{u}_\rho$ ,  $\mathbf{u}_\varphi$  los vectores unitarios en las direcciones radial y tangencial respectivamente referidos al punto P.

Haciendo operaciones obtenemos,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R \mathbf{u}_\rho ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$$

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -R d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times R \mathbf{u}_\rho = R^2 d\varphi \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{I R^2 d\varphi}{R^3} \mathbf{u}_z$$

El sentido de la corriente nos indica que debemos integrar entre  $\pi$  y 0,

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = -\frac{\mu_o I}{4\pi R} \int_{\pi}^0 d\varphi \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_o I}{4R} \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 9.12

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el origen de coordenadas O debido a la corriente  $I$  que circula por los arcos de circunferencia dispuestos respectivamente en los planos YZ y XY, véase la figura P9.12.

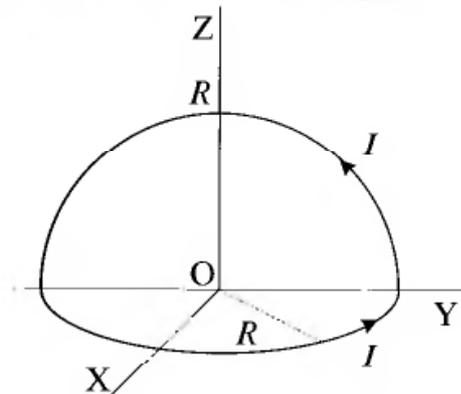


Figura P9.12

### Solución

Aplicamos la ley de Biot y Savart, ecuación (9.4), a cada uno de los tramos semicirculares.

## 1) Tramo semicircular sobre el plano XY

Si tenemos en cuenta la relación entre coordenadas esféricas y cartesianas, los valores para los vectores de posición y  $d\mathbf{l}'$  son,

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = R \cos \varphi \mathbf{u}_x + R \sin \varphi \mathbf{u}_y; \quad d\mathbf{l} = -R \sin \varphi d\varphi \mathbf{u}_x + R \cos \varphi d\varphi \mathbf{u}_y$$

Y por tanto

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R^2 d\varphi \mathbf{u}_z$$

Sustituyendo en la ecuación (9.4), y teniendo en cuenta el sentido de la corriente los límites de integración son  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ . El campo magnético debido a este tramo será,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{IR^2 d\varphi \mathbf{u}_z}{R^3} = \frac{\mu_o I}{4R} \mathbf{u}_z$$

## 2) Tramo semicircular sobre el plano YZ

Los valores para las coordenadas son ahora

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = R \sin \theta \mathbf{u}_y + R \cos \theta \mathbf{u}_z; \quad d\mathbf{l} = R \cos \theta d\theta \mathbf{u}_y - R \sin \theta d\theta \mathbf{u}_z$$

De forma similar al tramo anterior,

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -R^2 d\theta (\sin \theta \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z) \times (\cos \theta \mathbf{u}_y - \sin \theta \mathbf{u}_z) = -R^2 d\theta \mathbf{u}_x$$

Sustituimos los valores en la ecuación (9.4) y consideramos que el sentido de la corriente determina los límites de integración, que son  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ . El campo magnético debido a este tramo será,

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{IR^2 d\theta \mathbf{u}_x}{R^3} = \frac{\mu_o I}{4R} \mathbf{u}_x$$

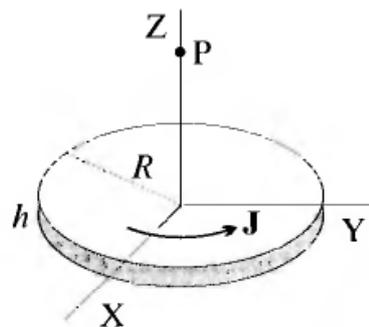
Y el campo magnético total es,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{4R} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z)$$

**PROBLEMA 9.13**

Sobre un disco conductor de radio  $R$  y altura  $h$  existe una distribución de corriente  $\mathbf{J} = J_o \rho \mathbf{u}_\varphi$ .

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P indicado en la figura P9.13.  $OP = R$ . ( $R \gg h$ ).



**Figura P9.13**

**Solución**

Dado que  $R \gg h$ , suponemos que las coronas elementales tomadas sobre el círculo se comportan como espiras de volumen elemental  $dv' = h \rho d\varphi d\rho$ .

Calculamos  $\mathbf{B}$  mediante la ley de Biot y Savart en la forma indicada por la ecuación (9.7). Los vectores de posición son:

$$\mathbf{r} = R\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r}' = \rho\mathbf{u}_\rho ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + \rho^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = J_o \rho \mathbf{u}_\varphi \times (R\mathbf{u}_z - \rho\mathbf{u}_\rho) = J_o \rho (R\mathbf{u}_\rho + \rho\mathbf{u}_z)$$

La componente  $\mathbf{u}_\rho$  debida a un volumen elemental tiene otra simétrica del mismo módulo pero con sentido opuesto, por tanto al integrar se anulan dichas componentes. Con los datos anteriores y los límites de integración siguientes: 0 a  $2\pi$  para  $\varphi$  y 0 a  $R$  para  $\rho$ ,  $\mathbf{B}$  será,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{J_o h \rho^3 d\rho d\varphi}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_o J_o h}{2} \left[ \frac{R^2}{(R^2 + \rho^2)^{1/2}} + (R^2 + \rho^2)^{1/2} \right]_0^R \mathbf{u}_z$$

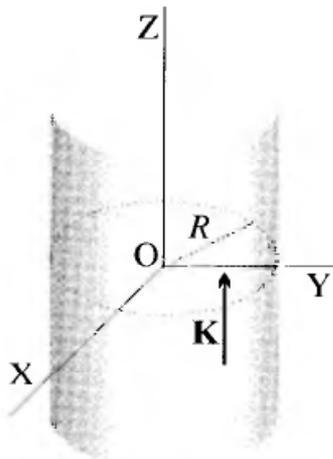
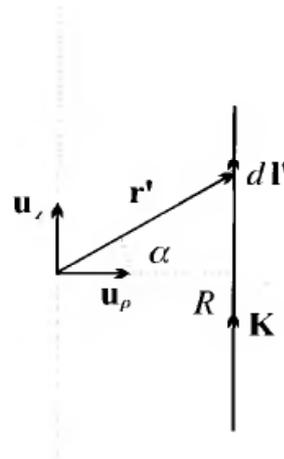
Realizando operaciones, obtenemos,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{2} J_o h R \left( \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \right) \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 9.14**

Por la superficie de un cilindro de radio  $R$ , e indefinido en la dirección del eje  $Z$ , circula una corriente cuya distribución superficial es de la forma  $\mathbf{K} = K_o \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_z$  (A/m), véase la figura P9.14.1.

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el origen de coordenadas.

**Solución****Figura P9.14.1****Figura P9.14.2**

Calculamos  $\mathbf{B}$  mediante la aplicación de la ley de Biot y Savart en la forma indicada por la ecuación (9.8). La superficie elemental  $ds' = R d\varphi dz$  y los vectores de posición respectivos son:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_\rho + z\mathbf{u}_z; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{K} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = K_o \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_z \times (-R\mathbf{u}_\rho - z\mathbf{u}_z) = -K_o R \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_\varphi$$

En este caso las corrientes elementales simétricas con respecto al eje Z son de signo opuesto, ya que  $\operatorname{sen} \varphi = -\operatorname{sen}(\pi + \varphi)$ , por tanto los términos en  $\mathbf{u}_\varphi$  tienen el mismo sentido. La integración con respecto a  $\varphi$  se puede hacer entre 0 y  $\pi$ , multiplicando por dos. Como la corriente  $\mathbf{K}$  depende del ángulo  $\varphi$ , nos interesa poner el vector unitario  $\mathbf{u}_\varphi$  en función de los vectores unitarios cartesianos:

$$\mathbf{u}_\varphi = -\operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_x + \operatorname{cos} \varphi \mathbf{u}_y$$

La integración con respecto a  $z$  se hace de forma similar al caso de hilo indefinido. Los valores de  $dz$  y  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , observando la figura P9.14.2, se pueden expresar de la forma siguiente:

$$z = R \tan \alpha \rightarrow dz = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{R}{\cos \alpha}$$

Dado el sentido de la corriente los límites para  $\alpha$  son  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .

Teniendo en cuenta las consideraciones de los dos párrafos anteriores podemos obtener la expresión para  $\mathbf{B}$  de la forma siguiente:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} 2 \int_0^\pi K_o R^2 \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_x - \operatorname{cos} \varphi \mathbf{u}_y) d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{R \operatorname{cos}^3 \alpha d\alpha}{R^3 \operatorname{cos}^2 \alpha} \right)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} 2 \int_0^\pi K_o \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_x - \operatorname{cos} \varphi \mathbf{u}_y) d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{cos} \alpha d\alpha$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o K_o}{2\pi} \left( \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4} \right]_0^\pi \mathbf{u}_x - \left[ \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \right]_0^\pi \mathbf{u}_y \right) [\operatorname{sen} \alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

Operando queda,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_o K_o \mathbf{u}_x$$

### PROBLEMA 9.15

Utilizamos un electrón para medir los campos existentes en una región del espacio vacía. Se realizan tres tipos de medidas:

- 1) Se sitúa el electrón en reposo y este adquiere una aceleración  $\mathbf{a} = a_2 \mathbf{u}_y$ .
- 2) Se introduce el electrón con una velocidad  $\mathbf{v}_o = v_o \mathbf{u}_x$  y adquiere una aceleración  $\mathbf{a} = a_2 \mathbf{u}_y + a_3 \mathbf{u}_z$ .
- 3) Introducimos el electrón con velocidad  $\mathbf{v} = v_o \mathbf{u}_y$  y se observa que no se acelera en la dirección  $\mathbf{u}_z$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en la región considerada.

La masa del electrón es  $m$  y su carga  $e$ .

### Solución

Resolvemos este problema mediante la fuerza de Lorentz, ecuación (9.18),

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Cada experimento proporciona una ecuación de fuerzas,

1)

$$F_y = m a_2 = -e E_y$$

2)

$$\mathbf{F} = m(a_2 \mathbf{u}_y + a_3 \mathbf{u}_z) = -e(\mathbf{E} + v_0 \mathbf{u}_x \times \mathbf{B})$$

Las componentes son,

$$m a_2 \mathbf{u}_y = (-e E_y + e v_0 B_z) \mathbf{u}_y$$

$$m a_3 \mathbf{u}_z = -(e E_z + e v_0 B_y) \mathbf{u}_z$$

3)

$$F_z = 0 = (-e E_z + e v_0 B_x)$$

De la primera ecuación se deduce que el campo eléctrico sólo tiene componente  $E_y$  y su valor es,

$$E_y = -a_2 \frac{m}{e}$$

La tercera ecuación nos permite comprobar que,

$$B_x = 0 \text{ ya que } E_z = 0$$

Con la dos ecuaciones del segundo experimento y los valores anteriores, obtenemos,

$$B_y = -\frac{m a_3}{e v_0}; \quad B_z = 0$$

El resultado final es que,

$$\mathbf{E} = -\frac{m}{e} a_2 \mathbf{u}_y; \quad \mathbf{B} = -\frac{m a_3}{e v_0} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 9.16

El dispositivo indicado en la figura P9.16.1 está constituido de la forma siguiente: G es un cañón que lanza electrones con velocidad  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_y$ . C es una placa metálica con un orificio muy pequeño alineado con G. P y P' son dos placas conductoras paralelas, colocadas a una distancia  $d$  y unidas a una batería de f.e.m.  $V_0$ . Un electroimán, que no figura en el dibujo, genera el campo magnético  $\mathbf{B} = -B \mathbf{u}_x$  entre las placas, siendo  $\mathbf{B} = 0$  fuera de ellas.

1) Calcular la velocidad  $\mathbf{v}$  de los electrones, que partiendo de G, atraviesan el orificio de la placa C.

2) Eliminando  $\mathbf{B}$  y manteniendo invariables los otros elementos, calcular la desviación de los electrones cuando llegan a la placa C.

La carga del electrón es  $e$  y su masa  $m$ . Se desprecian los efectos de borde y la fuerza gravitatoria.

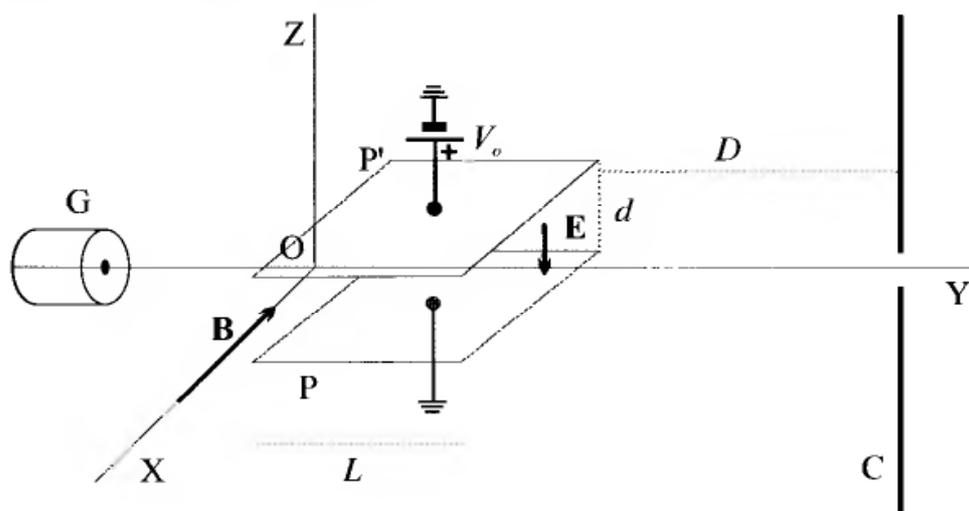


Figura 9.16.1

### Solución

1)

Las fuerzas eléctrica y magnética son:

$$\mathbf{F}_e = eE \mathbf{u}_z; \quad \mathbf{F}_m = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F}_m = -e v \mathbf{u}_y \times (-B \mathbf{u}_x) = -e v B \mathbf{u}_z$$

El módulo del campo eléctrico es,

$$E = \frac{V_0}{d}$$

Los electrones lanzados por G alcanzan la rendija de C, cuando,  $\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_m$ , es decir, en el caso de que,

$$v = \frac{V_0}{Bd}$$

2)

Cuando se suprime  $\mathbf{B}$ , la única fuerza que actúa es  $\mathbf{F}_e$ . Dicha fuerza tiende a desviar los electrones en la dirección del eje Z, dejando sin modificar la componente de la velocidad en la dirección del eje Y. En estas condiciones, al atravesar por la zona entre placas, los electrones sufren una fuerza  $\mathbf{F}_e$ , y en consecuencia se aceleran durante el tiempo que tardan los electrones

en atravesar la zona. Debido a la aceleración varía la componente  $v_z$  de la velocidad.

$$v_z = at = \frac{F_e}{m} t = \frac{e V_o}{m d} t$$

Como la componente  $v_y = v$  no varía, los electrones tardan en recorrer la distancia  $L$ , longitud de las placas, el tiempo  $t$ ,

$$t = \frac{L}{v}$$

La velocidad  $v_z$  al terminar de atravesar las placas es:

$$v_z = \frac{e V_o L}{m v d}$$

Sustituyendo  $v$  por el valor calculado en el apartado anterior, obtenemos,

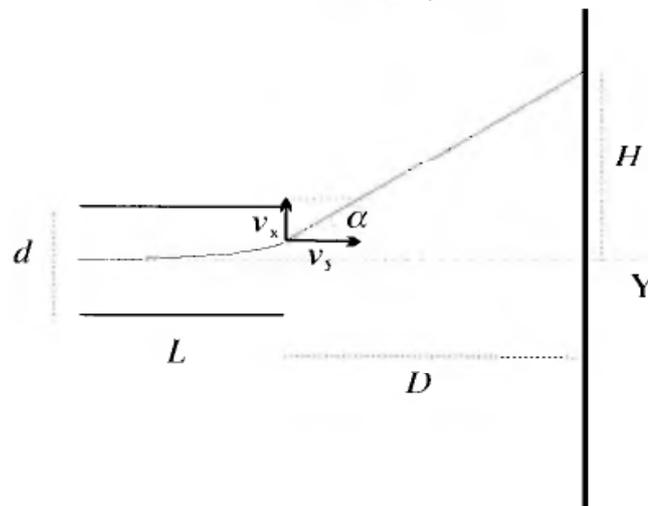
$$v_z = \frac{e}{m} B L$$

Al salir de las placas los electrones tienen las componentes  $v_y = v$  y  $v_z$ . Observando la figura P9.16.2, comprobamos que la tangente del ángulo  $\alpha$  es,

$$\tan \alpha = \frac{v_z}{v} = \frac{e B^2 L d}{m V_o}$$

Por otra parte, del dibujo se deduce que,

$$H = D \tan \alpha + h$$



**Figura P9.16.2**

Siendo  $H$  la desviación vertical en la placa C y  $D$  la distancia entre el borde de las placas y C;  $h$  es la desviación que sufren los electrones dentro de las placas. En conclusión,

$$H = \frac{e}{m} D \frac{B^2 L d}{V_o} + h$$

Calculamos  $h$  teniendo en cuenta que dentro de las placas el movimiento de los electrones es acelerado, por tanto,

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{con} \quad a = \frac{eV_o}{md} \quad \text{y} \quad t = \frac{L}{v} \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \frac{eV_o L^2}{mdv^2}$$

Sustituyendo el valor de  $v = (V_o/Bd)$  tenemos que,

$$h = \frac{1}{2} \frac{e B^2 L^2 d}{m V_o}$$

La desviación  $H$  será,

$$H = \frac{e B^2 L d}{m V_o} \left( D + \frac{L}{2} \right)$$

### PROBLEMA 9.17

El dispositivo indicado en la figura P9.17 está constituido de la forma siguiente: G es un cañón que lanza electrones con una velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$ . C es una placa fosforescente donde se marcan los impactos de los electrones. Dos placas planoparalelas, separadas por una distancia  $d$  y unidas a un generador, cuya f.e.m.  $V$  podemos variar. Una bobina, no indicada en la figura, produce en la zona entre placas un campo magnético  $\mathbf{B} = -B\mathbf{u}_x$ , siendo nula fuera de ella.

Manteniendo fijo  $\mathbf{B}$  y variando  $V$ , realizar las medidas y cálculos oportunos para determinar la velocidad  $v$  y la relación  $e/m$ .

Consideramos despreciables los efectos de borde y la fuerza gravitatoria. La carga del electrón es  $e$  y su masa  $m$ . Suponemos  $\tan \alpha \cong h/(D+L)$ .

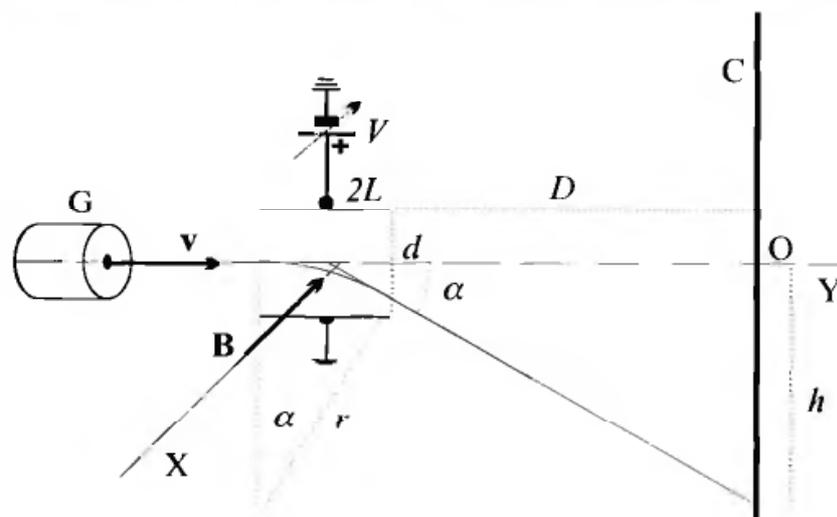


Figura P9.17

### Solución

1) Para encontrar la velocidad de salida de los electrones del cañón G variamos la d.d.p.  $V$  entre placas hasta que se igualen las fuerzas eléctrica

$\mathbf{F}_e$  y magnética  $\mathbf{F}_m$ ; lo que detectaremos por que los electrones alcanzan la pantalla C en el punto O alineado con G.

$$\mathbf{F}_e = -eE(-\mathbf{u}_z); \quad \mathbf{F}_m = -evB\mathbf{u}_y \times (-\mathbf{u}_x) = -evB\mathbf{u}_z$$

El módulo del campo es  $E = V/d$ .

La igualdad entre las dos fuerzas produce la relación siguiente,

$$e\frac{V}{d} = evB$$

de donde,

$$v = \frac{V}{Bd}$$

2)

Suponemos que nos dan la distancia  $D$  desde el borde de las placas a la pantalla C y la anchura de las placas  $2L$ .

La siguiente medida se hace suprimiendo el campo eléctrico, es decir, anulando  $V$ . En estas condiciones los electrones están sometidos a la fuerza magnética, que los hace describir un arco de circunferencia de radio  $r$  entre las placas, saliendo en la dirección de la tangente cuando alcanzan el borde de las placas, véase la figura P9.17. Los electrones harán el impacto en un punto situado a un distancia  $h$  del punto O. Medimos esta distancia  $h$ .

En el arco de circunferencia las fuerzas que se igualan son la magnética y centrípeta, es decir,

$$m\frac{v^2}{r} = evB \rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v}{rB}$$

Para determinar la relación  $e/m$ , ya conocemos  $v$ , por tanto nos falta calcular  $r$ .

Observando la figura P9.17, vemos que,

$$2L = r \operatorname{sen} \alpha$$

Como

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \tan \alpha \simeq \frac{h}{D + L}$$

$$r = 2L \frac{(1 + \tan^2 \alpha)^{1/2}}{\tan \alpha} \simeq \frac{2L}{h} \left( (D + L)^2 + h^2 \right)^{1/2}$$

En definitiva,

$$\frac{e}{m} = \frac{Vh}{2LB^2d} \left( (D + L)^2 + h^2 \right)^{-1/2}$$

Este ejercicio pone de manifiesto que con una serie de medidas podemos calcular la velocidad de salida de los electrones del cañón en un tubo de rayos catódicos, y además la relación carga masa del electrón.

**PROBLEMA 9.18**

Una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  se deja con velocidad inicial nula en el origen de coordenadas, en presencia de un campo gravitatorio que ejerce una fuerza  $-mg\mathbf{u}_z$  y un campo magnético uniforme,  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_y$ .

Formular las ecuaciones del movimiento de la partícula y calcular las distintas componentes de la velocidad.

**Solución**

La ecuación diferencial del movimiento en este caso es:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = mg\mathbf{u}_z + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Como  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_y$ ,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = (-v_z \mathbf{u}_x + v_x \mathbf{u}_z)B$$

La ecuación diferencial para cada componente será,

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -qB v_z \\ m \frac{dv_y}{dt} &= 0 \\ m \frac{dv_z}{dt} &= -mg + qB v_x \end{aligned} \tag{9.18.1}$$

El cálculo de las componentes de la velocidad se hace de la forma siguiente: Derivando la primera de las ecuaciones (9.18.1) y sustituyendo el valor de  $dv_z/dt$  de la tercera, obtenemos la ecuación,

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = - \left( \frac{qB}{m} \right)^2 v_x + \frac{qB}{m} g$$

Si ponemos  $\omega_o = qB/m$  y pasamos al otro miembro  $-\omega_o^2 v_x$ ,

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_o^2 v_x = \omega_o g \tag{9.18.2}$$

La solución de la ecuación diferencial (9.18.2) se compone de una solución particular de dicha ecuación más la solución de la homogénea (ecuación con segundo miembro nulo).

La solución particular se obtiene ensayando en la ecuación (9.18.2) una de la forma,

$$v_x = \frac{g}{\omega_o}$$

La ecuación homogénea,

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_o^2 v_x = 0$$

Su solución es la siguiente,

$$v_x = v_o e^{-j\omega t}$$

En definitiva, la solución general es,

$$v_x = v_o e^{-j\omega t} + \frac{g}{\omega_o}$$

Imponiendo las condiciones iniciales se calcula  $v_o$ .

Para  $t = 0$   $v = 0$ , por tanto,

$$v_o = -\frac{g}{\omega_o}$$

La forma de la ecuación definitiva es

$$v_x = \frac{g}{\omega_o} (1 - e^{-j\omega t}) \quad (9-18.3)$$

Calculamos  $v_z$  llevando (9.18.3) a la primera del sistema (9.18.1), de esta manera obtenemos,

$$v_z = -j \frac{g}{\omega_o} e^{-j\omega t} \quad (9.18.4)$$

De la segunda de las ecuaciones (9.18.1) se deduce que  $v_y$  es nula o constante, como la velocidad inicial es cero, entonces

$$v_y = 0 \quad (9.18.5)$$

Nos interesa poner las componentes de la velocidad en forma real, es decir, tomar la parte real de las soluciones obtenidas. Para ello tenemos en cuenta que,

$$e^{-j\omega_o t} = \cos \omega_o t + j \operatorname{sen} \omega_o t$$

Sustituyendo y realizando operaciones queda:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{g}{\omega_o} (1 - \cos \omega_o t) \\ v_y &= 0 \\ v_z &= \frac{g}{\omega_o} \operatorname{sen} \omega_o t \end{aligned} \quad (9.18.6)$$

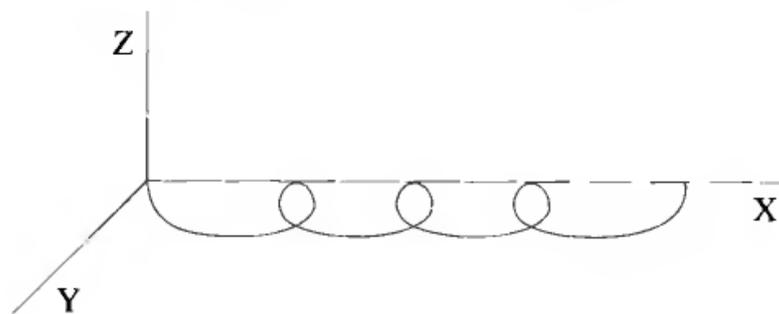
La solución (9.18.6) muestra que la componente  $v_x$  tiene una parte independiente del tiempo, es decir una velocidad de arrastre en la dirección del eje X,

$$v_{xo} = \frac{g}{\omega_o}$$

La trayectoria de las partículas se obtiene integrando las componentes de la velocidad.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{\omega_o} (1 - \cos \omega_o t) \rightarrow x = \frac{g}{\omega_o} \left( t - \frac{1}{\omega_o} \text{sen } \omega_o t \right)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{g}{\omega_o} \text{sen } \omega_o t \rightarrow z = -\frac{g}{\omega_o^2} \cos \omega_o t$$



**Figura P9.18**

La trayectoria que describen las ecuaciones paramétricas en  $x$   $z$  es una trocoide en el plano XZ, véase la figura P9.18, composición de un movimiento circular con un arrastre en la dirección del eje X. Las partículas se mueven avanzando sobre el eje X, perpendicular a la dirección de los campos magnético y gravitatorio, y describiendo una trayectoria tanto más cerrada cuanto mayor sea  $\omega_o$ , es decir cuanto mayor sea el campo magnético  $\mathbf{B}$ .

### PROBLEMA 9.19

Un dispositivo como el indicado en la figura P9.19.1, está formado por dos placas conductoras MN, unidas a una batería y separadas por una distancia  $L$ . En el centro de la placa M existe un pequeño orificio por el que salen electrones con velocidad  $v_o$ , independiente del ángulo, distribuidos en el interior de un cono con vértice en el orificio y ángulo  $60^\circ$ .

Los electrones se mueven en el seno de los campos eléctrico y magnético indicados en la figura,  $\mathbf{E} = -E\mathbf{u}_z$ ,  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ .

1) Calcular los tiempos que tardan en alcanzar la placa N los electrones que salen, respectivamente con los ángulos  $\theta = 0$  y  $\theta = 30^\circ$ .

2) Calcular el radio del círculo sobre el que inciden en la placa todos los electrones que salen por el orificio.

La carga y masa del electrón son respectivamente  $e$  y  $m$ .

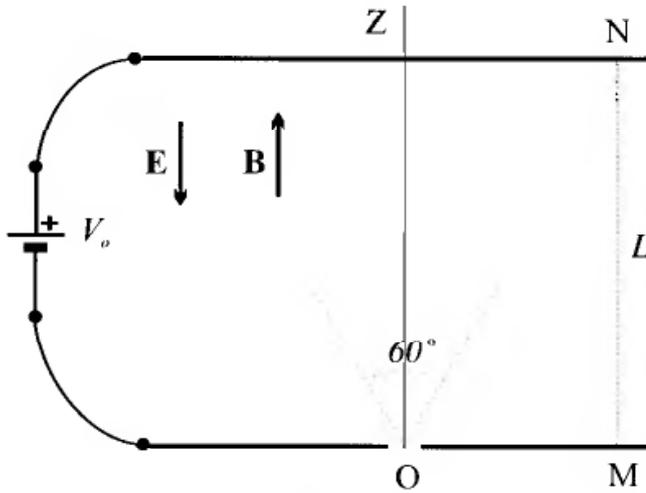


Figura P9.19.1

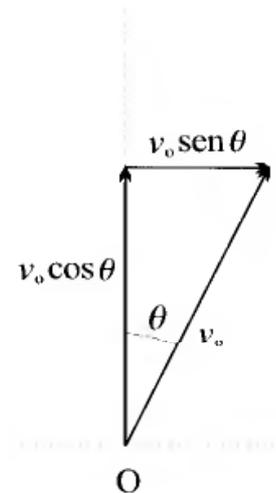


Figura P9.19.2

**Solución**

1) Para calcular los tiempos tenemos que saber la velocidad y aceleración de los electrones, es decir, conocida la velocidad inicial, debemos calcular las fuerzas que actúan sobre ellos. Dichas fuerzas son:

$$\mathbf{F}_e = -eE(-\mathbf{u}_z) = eE\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{F}_m = -e(\mathbf{v} \times B\mathbf{u}_z)$$

El sistema tiene simetría cilíndrica con respecto al eje Z.

Las componentes de la velocidad paralela y perpendicular al eje Z nos permiten calcular el tiempo que tardan en atravesar la placas y el radio del círculo sobre el que inciden en la placa N. Por esta razón nos interesa calcular primero la aceleración en la dirección del eje Z y después la velocidad en la misma dirección, con lo que podemos obtener el tiempo de tránsito entre las dos placas. La aceleración  $\mathbf{a}_z$  es,

$$a_z = \frac{F_e}{m} = \frac{e}{m}E$$

En la figura P9.19.2 se muestran las componentes paralela y perpendicular de la velocidad inicial;  $v_z$  será,

$$v_z = \left( v_0 \cos \theta + \frac{e}{m}Et \right)$$

El espacio recorrido en la dirección del eje Z se obtiene integrando la ecuación anterior, con la condición inicial de que para  $t = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,

$$z = \int_0^t \left( v_0 \cos \theta + \frac{e}{m}Et \right) dt = \left( (v_0 \cos \theta)t + \frac{e}{2m}Et^2 \right)$$

El recorrido de los electrones es la distancia entre placas  $L$ , por tanto se calcula  $t$  mediante la ecuación,

$$(v_0 \cos \theta)t + \frac{e}{2m}Et^2 = L$$

Esta ecuación de segundo grado tiene una solución positiva de la forma,

$$t = \frac{m}{eE} \left( -v_o \cos \theta + \left( v_o^2 \cos^2 \theta + \frac{2eE}{m} L \right)^{1/2} \right)$$

La solución con signo menos de la raíz no tiene sentido físico, pues daría tiempos negativos. Los tiempos de tránsito para  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 30^\circ$  son:

$$t(0^\circ) = \frac{m}{eE} \left( -v_o + \left( v_o^2 + \frac{2eE}{m} L \right)^{1/2} \right)$$

$$t(30^\circ) = \frac{m}{eE} \left( -v_o \frac{\sqrt{3}}{2} + \left( v_o^2 \frac{3}{4} + \frac{2eE}{m} L \right)^{1/2} \right)$$

2) La componente perpendicular  $v_\perp$  es normal a  $\mathbf{B}$ , por tanto provoca un movimiento circular, cuyo radio se obtiene igualando la fuerza magnética a la centrípeta. El módulo de la velocidad  $v_\perp$  no se modifica ya que  $\mathbf{E}$  es perpendicular y la fuerza magnética solo curva la trayectoria de la partícula. El valor inicial de  $v_\perp$ , observando la figura P9.19.2 es,

$$v_\perp = v_o \sin \theta$$

La fuerza magnética, si consideramos  $v_\perp$  en la dirección de  $\mathbf{u}_\varphi$ , será,

$$\mathbf{F}_m = -e B v_o \sin \theta \mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z = -e B v_o \sin \theta \mathbf{u}_\rho$$

Igualando con la fuerza centrípeta tendremos,

$$m \frac{(v_o \sin \theta)^2}{\rho} = e B v_o \sin \theta$$

Despejando  $\rho$  obtenemos la relación,

$$\rho = \frac{m v_o \sin \theta}{e B}$$

Los electrones describen un movimiento helicoidal de radio variable entre el punto de salida y el plano N, dichas hélices tienen un radio  $\rho$  como el calculado anteriormente. El mayor radio posible es el radio del círculo en cuyo interior inciden todos los electrones que salen del orificio con velocidad  $v_o$  y ángulo de salida  $\theta = 30^\circ$ , por tanto,

$$\rho_{\text{máx}} = \frac{m v_o \sin 30^\circ}{e B}$$

### PROBLEMA 9.20

Se lanza una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  con velocidad inicial  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$ , en un espacio donde hay una campo eléctrico  $\mathbf{E} = E \mathbf{u}_x$  y un campo magnético  $\mathbf{B}$ , cuyas componentes en principio desconocemos.

La partícula se mantiene en el plano XY, y la aceleración que adquiere es:  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y$ .

¿Qué componentes tiene el campo magnético  $\mathbf{B}$ ?

### Solución

Veamos en primer lugar cuál será el movimiento de la partícula de acuerdo con el enunciado: La partícula, dada la aceleración  $\mathbf{a}$ , se moverá en el plano XY, es decir su vector velocidad sólo tendrá componentes  $v_x$  y  $v_y$ . En esas condiciones, la fuerza de Lorentz que actúa sobre la partícula será,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = qE\mathbf{u}_x + q \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ v_x & v_y & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

donde ya se refleja que  $v_z = 0$ . Desarrollando la expresión,

$$\mathbf{F} = q\{(E + B_z v_y)\mathbf{u}_x - B_z v_x \mathbf{u}_y + (B_y v_x - B_x v_y)\mathbf{u}_z\}$$

Pero, de acuerdo con la condición expresada en el problema, la componente  $a_z$  de la aceleración es nula, por lo que la componente de la fuerza en la dirección del eje Z tiene que ser 0,

$$F_z = 0 = B_y v_x - B_x v_y$$

Esta condición sólo se cumple si,

$$B_x = B_y = 0$$

Dado que una partícula que se mueve en el plano XY, cualesquiera de las dos componentes del campo magnético daría lugar a una fuerza perpendicular a dicho plano, y como consecuencia la partícula se aceleraría en la dirección del eje Z.

La aceleración que indica el enunciado del problema es  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y$ . Igualando esta aceleración con la que se obtiene mediante la fuerza calculada anteriormente tendremos que,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{m} [(E + B_z v_y)\mathbf{u}_x - B_z v_x \mathbf{u}_y] = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y$$

Igualando las componentes resulta que,

$$a_x = \frac{q}{m} (E + B_z v_y) \quad ; \quad a_y = -\frac{q}{m} B_z v_x$$

Dado que inicialmente  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_x$ , se deduce que  $v_y = 0$  y  $v_x = v$ .

Por lo tanto, realizando operaciones y despejando  $E$  y  $B_z$  tenemos,

$$E = \frac{m}{q} a_x \quad ; \quad B_z = -\frac{m}{qv} a_y$$

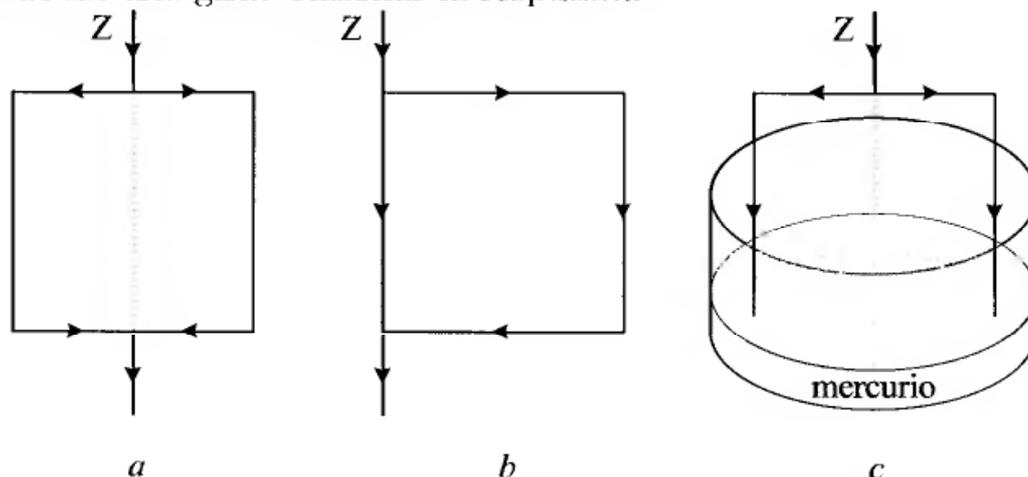
y el campo magnético será de la forma,

$$\mathbf{B} = -\frac{ma_y}{qv} \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 9.21**

Tenemos tres tipos de espiras, situadas en un campo magnético  $\mathbf{B} = -B_0\mathbf{u}_z$ , véase figura P9.21.1a, b y c.

Las tres soportan una corriente  $I$ , y pueden girar alrededor del eje  $Z$ . ¿Cual de las tres gira? Razonar la respuesta.



**Figura P9.21.1**

**Solución**

La fuerza sobre un elemento de corriente en presencia de un campo magnético viene dada por la ecuación (9.5),

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

El par de fuerzas sobre un elemento de corriente en un campo magnético viene dada por la ecuación (9.20)

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

a) La fuerza sobre los tramos paralelos al eje  $Z$  es nula, ya que  $d\mathbf{l}$  es paralelo a  $\mathbf{B}$  y por tanto es nulo el producto vectorial.

En los tramos perpendiculares al eje  $Z$ , el par de fuerzas que se ejerce sobre el tramo superior es del mismo módulo pero de sentido contrario que el ejercido en el tramo inferior, dado que las corrientes respectivas tienen sentidos opuestos, véase la figura P9.21.2a.

En conclusión, la espira **a NO GIRA**.

b) La situación es análoga al caso anterior, en los tramos perpendiculares a  $\mathbf{u}_z$  existen pares de fuerza de sentido opuesto como indica la figura P9.21.2b. En definitiva, la espira **b NO GIRA**.

c) En los tramos paralelos la situación es análoga a los casos anteriores. En el tramo perpendicular se ejerce un par de fuerzas como indica la figura P9.21.2c. En el mercurio se dispersa la corriente, pero además no está unido

rígidamente a la espira por tanto mercurio y espira son independientes en su movimiento. Concluimos que la espira abierta en contacto con el mercurio, **SI GIRA.**

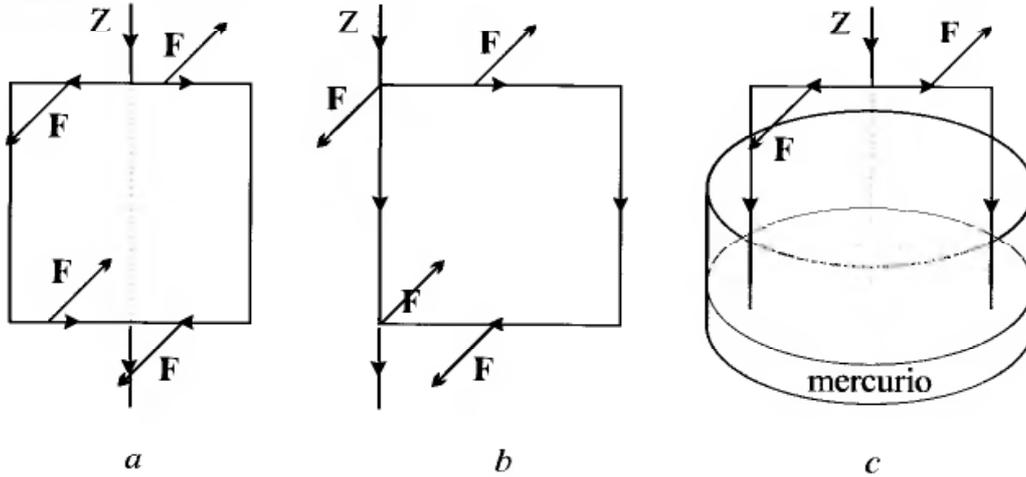


Figura P9.21.2

**PROBLEMA 9.22**

El sistema indicado en la figura P9.22.1 consta de los siguientes elementos: Un vaso metálico invertido, cuyo radio es  $R$ , su momento de inercia  $\mathcal{J}$  y el espesor de las paredes  $e$  ( $e \ll R$ ), que puede girar en torno al eje  $Z$  y está parcialmente sumergido en el mercurio contenido en otro vaso de vidrio mayor. Un contacto deslizante une el centro con un borne de la pila, el otro borne se une mediante un conductor al mercurio. La pila suministra una corriente  $I$ . Todo el sistema está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ .

Si suponemos las fuerzas de rozamiento proporcionales al cuadrado de la velocidad de las paredes cilíndricas del vaso metálico, ¿Cual será la velocidad límite de giro de dicho vaso?

**Solución**

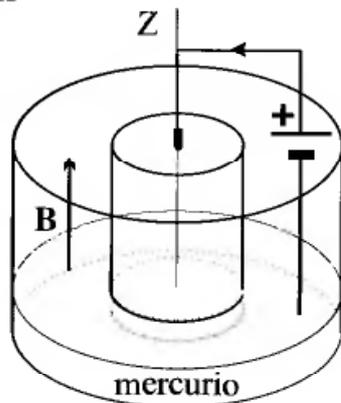


Figura P9.22.1

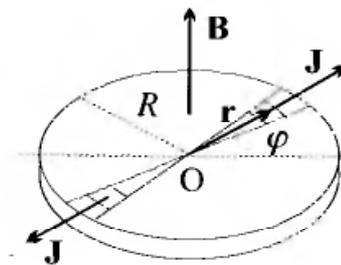


Figura P9.22.2

La corriente que circula por el vaso se distribuye radialmente por el círculo superior y baja por la superficie cilíndrica, que es paralela a  $\mathbf{B}$ .

La fuerza sobre las corrientes en la parte cilíndrica son nulas, ya que  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelas y  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ .

El par de fuerzas sobre la distribución de corriente en el círculo de radio  $R$ , se calcula mediante la ecuación (9.19),

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} = \int_V \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{B}) dv$$

La forma de cada uno de los vectores que intervienen, como muestra la figura P9.22.2, es:

$$\mathbf{J} = J(\rho)\mathbf{u}_\rho; \quad \mathbf{r} = \rho\mathbf{u}_\rho; \quad \mathbf{B} = B\mathbf{u}_z; \quad dv = e\rho d\varphi d\rho$$

$$\mathbf{J}(\rho) \times \mathbf{B} = J(\rho)\mathbf{u}_\rho \times B\mathbf{u}_z = -J(\rho) B\mathbf{u}_\varphi$$

$$\boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{J}(\rho) \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{u}_\rho \times (-J(\rho) B\mathbf{u}_\varphi) = -\rho J(\rho) B\mathbf{u}_z$$

La corriente  $J(\rho)$  se calcula teniendo en cuenta que  $I$  atraviesa la superficie cilíndrica de radio  $\rho$  y altura  $e$ ,

$$I = J(\rho)2\pi\rho e \rightarrow J(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho e}$$

Cada elemento  $dv$  tiene un simétrico que produce, dada la distribución de corriente, un momento del mismo sentido, por tanto el par se puede calcular multiplicado por dos la integral sobre  $\varphi$  entre 0 y  $\pi$ . Los límites para  $\rho$  son 0 y  $R$ .

Con las condiciones anteriores el par queda de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -2 \int_V \frac{I}{2\pi\rho e} \rho B\mathbf{u}_z dv = -\frac{IB}{\pi} \mathbf{u}_z \int_0^\pi d\varphi \int_0^R \rho d\rho \\ \mathbf{T} &= -\frac{1}{2} I B R^2 \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

El vaso metálico se mueve en sentido horario.

La velocidad límite se alcanzará cuando el par  $\mathbf{T}$  sea igual que el par producido por las fuerzas de rozamiento sobre la superficie cilíndrica del vaso metálico.

La fuerza de rozamiento es,

$$F_r = kv^2 = k(\omega R)^2$$

El par correspondiente es,

$$T_r = 2Rk(\omega R)^2 = 2k\omega^2 R^3$$

La relación entre el par  $T$  y la velocidad angular límite se obtiene igualando  $T = T_r$ .

$$\frac{1}{2} I B R^2 = 2 k \omega^2 R^3$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{I B}{k R} \right)^{1/2} ; \quad v = \frac{1}{2} \left( \frac{I B R}{k} \right)^{1/2}$$

**PROBLEMA 9.23**

Tenemos un hilo indefinido coincidente con el eje Z, por el que circula una corriente  $I$ . A una distancia  $a$  se sitúa una espira cuadrada de lado  $a$ , como muestra la figura P9.23. Por dicha espira circula una corriente  $I$ .

Calcular la fuerza que ejerce el campo magnético creado por la corriente del hilo indefinido sobre la espira cuadrada.

**Solución**

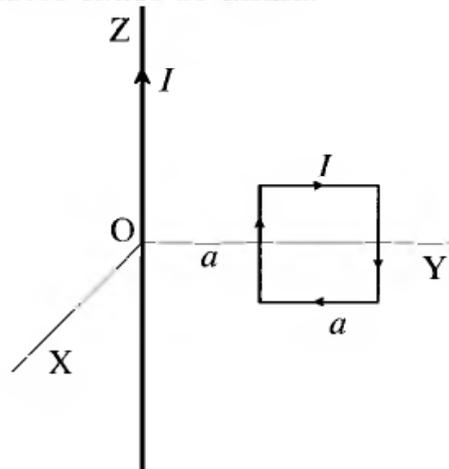
Para un hilo indefinido el campo magnético sobre el plano YZ, considerando que en dicho plano  $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x$  es,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_x$$

La fuerza sobre un elemento de corriente  $I d\mathbf{l}$  viene dada por la expresión

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\rho)$$

La fuerza sobre cada elemento  $dy$  de la espira cuadrada en los lados perpendiculares al hilo indefinido es del mismo módulo **pero de sentido opuesto** en el lado superior con respecto al inferior. En consecuencia la suma de fuerzas sobre estos lados se anula.

**Figura P9.23**

La fuerza sobre el lado paralelo más próximo al hilo es,

$$\mathbf{F}_1 = I a \mathbf{u}_z \times \mathbf{B}(a) = I a \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{u}_z \times (-\mathbf{u}_x) = -\frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \mathbf{u}_y$$

La fuerza sobre el lado paralelo más alejado es

$$\mathbf{F}_2 = Ia(-\mathbf{u}_z) \times \mathbf{B}(2a) = Ia \frac{\mu_0 I}{2\pi 2a} (-\mathbf{u}_z) \times (-\mathbf{u}_x) = \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \mathbf{u}_y$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la fuerza total sobre la espira cuadrada será

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \mathbf{u}_y$$

Esta fuerza tira de la espira hacia el hilo indefinido.

**PROBLEMA 9.24**

Dos tubos conductores de radio  $b$  ( $b \ll L$ ), están dispuestos como muestra la figura P9.24 a una distancia  $L$ . Los tubos son indefinidos en la dirección  $z > 0$ . Una varilla móvil de longitud  $L$  se puede deslizar verticalmente permaneciendo en contacto con los tubos. Por la varilla y tubos circula una corriente  $I$ .

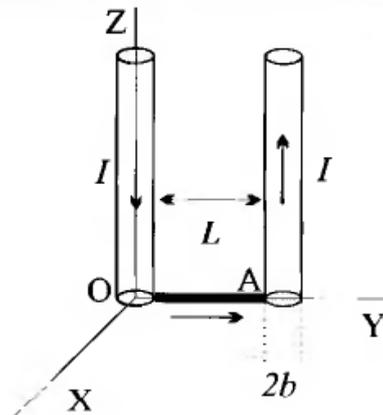
Calcular la fuerza magnética sobre la varilla e indicar su dirección y sentido.

**Solución**

En primer lugar se calcula el campo magnético producido por los dos conductores verticales mediante la ley de Biot y Savart,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

1a) *Campo magnético debido al conductor de la izquierda*



**Figura P9.24**

Los vectores de posición para el conductor de la izquierda cuyo eje coincide con el eje Z son:

$$\mathbf{r} = y \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}' = z \mathbf{u}_z ; \quad d\mathbf{l} = dz \mathbf{u}_z \quad \text{y} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (y^2 + z^2)^{1/2}$$

Teniendo en cuenta el sentido de la corriente los límites de integración son:  $\infty$  y 0. Sustituyendo los datos en la ecuación anterior el campo será:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{I dz \mathbf{u}_z \times (y \mathbf{u}_y - z \mathbf{u}_z)}{(y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{-I y dz \mathbf{u}_x}{(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

La solución de la integral es,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{-\mu_o I y}{4\pi} \left[ \frac{z}{y^2(y^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^0 \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o I}{4\pi y} \mathbf{u}_x$$

1b) *Campo magnético debido al conductor de la derecha*

Para calcular el campo debido al conductor vertical de la derecha, cuyo eje es paralelo al eje Z y situado en  $y = L + 2b$  no hay más que sustituir la coordenada  $y$  por  $y' = (L + 2b) - y$ . Aplicando la regla del tornillo se demuestra que el campo  $\mathbf{B}_2$  también tiene la dirección y sentido de  $\mathbf{u}_x$ . Por tanto,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{4\pi y'} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o I}{4\pi ((L + 2b) - y)} \mathbf{u}_x$$

1c) *Campo magnético debido a los dos conductores*

Dicho campo será la suma vectorial de los dos calculados anteriormente,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{(L + 2b) - y} \right) \mathbf{u}_x$$

2) *Fuerza sobre varilla horizontal*

La fuerza sobre un elemento de longitud es,

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I dy \mathbf{u}_y \times \frac{\mu_o I}{4\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{(L + 2b) - y} \right) \mathbf{u}_x$$

Integrando con respecto a la variable  $y$  entre los límites  $b$  y  $L + b$  se obtiene la fuerza.

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_o I^2}{4\pi} \int_b^{L+b} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{(L + 2b) - y} \right) dy (-\mathbf{u}_z)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_o I^2}{4\pi} \mathbf{u}_z [\ln y - \ln(L + 2b - y)]_b^{L+b}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_o I^2}{4\pi} \mathbf{u}_z \left( \ln \left( \frac{L + b}{b} \right) - \ln \left( \frac{b}{L + b} \right) \right)$$

Simplificando obtenemos la fuerza sobre la varilla:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_o I^2}{2\pi} \ln \left( \frac{L + b}{b} \right) \mathbf{u}_z$$

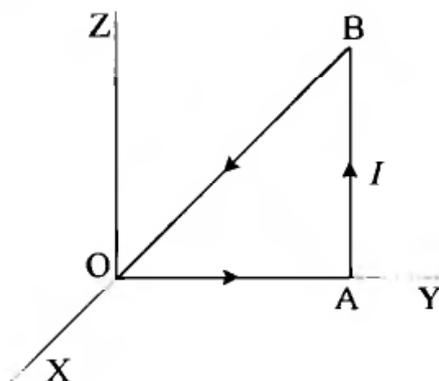
### PROBLEMA 9.25

Disponemos de una espira en forma de triángulo rectángulo como muestra la figura P9.25. Por la espira circula una corriente  $I$  y está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = -ky\mathbf{u}_x$

- 1) Calcular la fuerza sobre la espira.
- 2) Calcular el par de fuerzas con respecto al origen O, suponiendo que la espira permanece unida a ese punto.

**Solución**

La fuerza sobre la espira vendrá dada por la suma de las fuerzas sobre cada uno de los tramos.

**Figura P9.25**

1a) Tramo OA

$$d\mathbf{F}_1 = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

con  $d\mathbf{l} = dy\mathbf{u}_y$  se deduce que,

$$d\mathbf{F}_1 = I dy\mathbf{u}_y \times (-ky\mathbf{u}_x) = I k y dy \mathbf{u}_z$$

Y la fuerza total sobre el tramo OA

$$\mathbf{F}_1 = \int_0^L I k y dy \mathbf{u}_z = \frac{1}{2} I k L^2 \mathbf{u}_z$$

1b) Tramo AB

$$d\mathbf{F}_2 = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

con  $d\mathbf{l} = dz\mathbf{u}_z$  tenemos que,

$$d\mathbf{F}_2 = I dz \mathbf{u}_z \times (-kL\mathbf{u}_x) = -I k L dz \mathbf{u}_y$$

Y la fuerza total sobre el tramo AB será,

$$\mathbf{F}_2 = - \int_0^L I k L dz \mathbf{u}_y = -I k L^2 \mathbf{u}_y$$

1c) Tramo BO

$$d\mathbf{F}_3 = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Ahora el vector elemental sobre la recta  $y = z$  es de la forma  $d\mathbf{l} = dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$ . La fuerza elemental será,

$$d\mathbf{F}_3 = I (dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z) \times (-kL\mathbf{u}_x) = I k y dy \mathbf{u}_z - I k y dz \mathbf{u}_y$$

Teniendo en cuenta la relación entre las coordenadas  $y$  y  $z$ ,  $y = z$ , y que en este tramo el sentido de la corriente determina que los límites de integración sean  $L$  y  $0$ , tenemos,

$$\mathbf{F}_3 = \int_L^0 I k y dy \mathbf{u}_z - \int_L^0 I k y dy \mathbf{u}_y = -\frac{1}{2} k I L^2 \mathbf{u}_z + \frac{1}{2} k I L^2 \mathbf{u}_y$$

Y la fuerza total sobre la espira es

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = -\frac{1}{2} k I L^2 \mathbf{u}_y$$

2) *Par de fuerzas*

Para calcular el par sobre la espira, calculamos el par sobre cada elemento del circuito teniendo en cuenta que

$$d\mathbf{T} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$$

2a) *Tramo OA*

En este caso tenemos

$$d\mathbf{F}_1 = I k y dy \mathbf{u}_z \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = y \mathbf{u}_y$$

Luego

$$d\mathbf{T}_1 = y \mathbf{u}_y \times I k y dy \mathbf{u}_z = I k y^2 dy \mathbf{u}_x$$

Integrando

$$\mathbf{T}_1 = \int_0^L I k y^2 dy \mathbf{u}_x = I k \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^L \mathbf{u}_x = \frac{1}{3} I k L^3 \mathbf{u}_x$$

2b) *Tramo AB*

$$d\mathbf{F}_2 = -I k L dz \mathbf{u}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = L \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$$

por tanto,

$$d\mathbf{T}_2 = (L \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z) \times (-I k L dz \mathbf{u}_y) = I k L z dz \mathbf{u}_x$$

Integrando

$$\mathbf{T}_2 = \int_0^L I k L z dz \mathbf{u}_x = I k L \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^L \mathbf{u}_x = \frac{1}{2} I k L^3 \mathbf{u}_x$$

2c) *Tramo BO*

$$d\mathbf{F}_3 = I k y dy \mathbf{u}_z - I k y dz \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r} = y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z = y (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 &= y (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z) \times (I k y dy \mathbf{u}_z - I k y dz \mathbf{u}_y) \\ &= I k y^2 dy \mathbf{u}_x + I k y^2 dz \mathbf{u}_x \end{aligned}$$

Considerando que en este tramo  $dz = dy$ , y que los límites de integración son  $L$  y  $0$ ,

$$\mathbf{T}_3 = \int_L^0 I k y^2 dy \mathbf{u}_x + \int_L^0 I k y^2 dy \mathbf{u}_x = -\frac{2}{3} I k L^3 \mathbf{u}_x$$

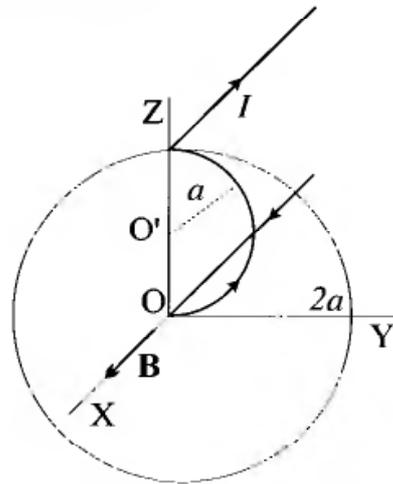
El par total sobre la espira es,

$$\mathbf{T}_t = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 = \frac{1}{6} I k L^3 \mathbf{u}_x$$

**PROBLEMA 9.26**

Sobre un disco de dieléctrico, cuyo radio es  $2a$ , que puede girar en torno al eje  $X$ , se pega un sistema de conductores compuesto por una semiespira circular de radio  $a$  y dos tramos paralelos al eje  $X$  como muestra la figura P9.26. Por los conductores circula una corriente  $I$ . El conjunto disco-conductores está en el seno de un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_x$

- 1) Calcular la fuerza sobre los conductores.
- 2) Obtener el momento de la fuerza con respecto al origen de coordenadas. ¿En qué sentido gira el disco?



**Figura P9.26**

**Solución**

1) *Fuerza*

La fuerza sobre un elemento de corriente por el que circula una intensidad  $I$  viene dada por

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(r)$$

La fuerza sobre los conductores rectos es nula ya que  $I d\mathbf{l}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelos.

Si consideramos un sistema de referencia  $O'X'Y'Z'$ , centrado en la semiespira de radio  $a$ , el elemento de longitud viene dado por

$$d\mathbf{l} = a d\varphi' \mathbf{u}_{\varphi'}$$

Y la fuerza en coordenadas cilíndricas, en las que el eje  $X'$  ahora es equivalente al eje  $Z$  del sistema cilíndrico tradicional, será,

$$d\mathbf{F} = I a d\varphi' \mathbf{u}_{\varphi'} \times B \mathbf{u}_{x'} = I a B d\varphi' \mathbf{u}_{\rho'}$$

con  $\mathbf{u}_{\rho'} = -\cos \varphi' \mathbf{u}_{z'} + \sin \varphi' \mathbf{u}_{y'}$

La fuerza total será

$$\mathbf{F} = \int_0^\pi I a B d\varphi \mathbf{u}_{\rho'} = \int_0^\pi I a B (-\cos \varphi' \mathbf{u}_{z'} + \sin \varphi' \mathbf{u}_{y'}) d\varphi' = 2I a B \mathbf{u}_{y'}$$

Teniendo en cuenta que los vectores unitario cumplen las siguientes relaciones,

$$\mathbf{u}_{x'} = \mathbf{u}_x \quad ; \quad \mathbf{u}_{y'} = \mathbf{u}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_{z'} = \mathbf{u}_z$$

la fuerza será,

$$\mathbf{F} = 2I a B \mathbf{u}_y$$

2) *Momento*

El momento respecto al origen vendrá dado por,

$$\mathbf{T} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$$

El vector de posición  $\mathbf{r} = a\mathbf{u}_z + a\mathbf{u}_{\rho'}$

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F} = a\mathbf{u}_z \times d\mathbf{F} + a\mathbf{u}_{\rho'} \times d\mathbf{F} = a\mathbf{u}_z \times d\mathbf{F} + a\mathbf{u}_{\rho'} \times I a B d\varphi' \mathbf{u}_{\rho'} = a\mathbf{u}_z \times d\mathbf{F}$$

Como  $a\mathbf{u}_z$  es común a todos los elementos de corriente, ya que todas las fuerzas sobre la espira convergen en  $O'$ ,

$$\mathbf{T} = a\mathbf{u}_z \times \int d\mathbf{F} = a\mathbf{u}_z \times \mathbf{F}$$

Sustituyendo,

$$\mathbf{T} = a\mathbf{u}_z \times 2I a B \mathbf{u}_y = -a^2 I B \mathbf{u}_x$$

Luego el disco girará en el sentido de las agujas del reloj.

## Capítulo 10

# CAMPO MAGNÉTICO II

## 10.1 INTRODUCCIÓN

Las características fundamentales de un campo se ponen de manifiesto a través de su divergencia y rotacional; la primera muestra si existe y donde se localizan las fuentes de las líneas de campo, y la segunda si el campo es o no conservativo.

### 10.1.1 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DE $\mathbf{B}$

#### *Flujo magnético*

Se define el flujo magnético sobre una superficie elemental  $ds$  como el producto escalar de  $\mathbf{B} \cdot ds$ ,

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot ds \quad (10.1)$$

El flujo a través de una superficie  $S$  limitada por un contorno  $C$  es:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot ds \quad (10.2)$$

La unidad de flujo en sistema internacional (SI) es el weber (Wb).

El vector  $\mathbf{B}$  también suele ser considerado como la densidad de flujo magnético, así se define  $\mathbf{B}$  como el flujo magnético por unidad de área. Cuando la superficie  $S$  es normal al vector  $\mathbf{B}$ ,

$$B = \frac{\Phi}{S}$$

De esta relación se deriva la unidad de  $\mathbf{B}$ ,  $\text{Wb}/\text{m}^2 = \text{tesla (T)}$ .

#### *Teorema de la divergencia de $\mathbf{B}$*

La definición de  $\mathbf{B}$  viene dada por la ley de Biot y Savart, que en el caso que nos ocupa se expresa mediante la ecuación,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (10.3)$$

Calculamos la  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$ , ( $\nabla$  supone en este caso derivaciones con respecto a la variable representada por  $\mathbf{r}$ ), en la ecuación anterior. Utilizando la relación vectorial,

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

Tomando

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad \text{y} \quad \mathbf{G} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

y teniendo en cuenta que depende de  $\mathbf{r}$ ,  $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ , queda:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv'$$

Por otra parte,

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

y  $\nabla \times \nabla() = 0$ , por tanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10.4)$$

Esta es la forma diferencial del teorema de la divergencia. Su forma integral se puede obtener a través del teorema de la divergencia de un vector, que relaciona el flujo del vector a través de una superficie cerrada  $S$  con la integral de la divergencia del vector sobre el volumen  $V$  limitado por  $S$ ,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv \quad (10.5)$$

En nuestro caso  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , en consecuencia,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (10.6)$$

Esta ecuación expresa que el flujo de  $\mathbf{B}$  a través de una superficie cerrada es nulo, que es una propiedad fundamental del campo magnético, pues muestra que las líneas de campo magnético son cerradas; es decir, no existen manantiales ni sumideros. De otra forma, el vector  $\mathbf{B}$  se debe a las corrientes y no existen monopolos magnéticos en la teoría clásica del campo electromagnético.

En 1931 Dirac postuló la existencia de monopolos magnéticos pero hasta la fecha no han sido observados experimentalmente.

### *Condiciones de frontera*

La ecuación (10.4) nos permite deducir el comportamiento de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  en la frontera entre dos medios o donde se supone una separación entre dos zonas. Se puede demostrar, que si  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie de separación,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = B_{n2} - B_{n1} = 0 \quad (10.7)$$

### 10.1.2 TEOREMA DE AMPÈRE

Este teorema trata de mostrar el comportamiento del rotacional de  $\mathbf{B}$ . Para ello partimos de la ley de Biot y Savart en la forma indicada en el apartado anterior, y calculamos  $\nabla \times \mathbf{B}$  teniendo en cuenta que las corrientes son estacionarias, es decir, corrientes que verifican  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

La ley de Biot y Savart se puede expresar de otra forma. Utilizamos la relación vectorial,

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

Como  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  no es función de  $\mathbf{r}$ ,  $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ . En el apartado anterior vimos la forma que adopta  $\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ , por tanto,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \quad (10.8)$$

Calculamos el  $\nabla \times \mathbf{B}$  utilizando la relación vectorial,

$$\nabla \times \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \nabla^2 \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

Mediante una serie de operaciones se llega a la ecuación siguiente,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (10.9)$$

Esta es la forma diferencial del teorema de Ampère. La ecuación muestra que el campo  $\mathbf{B}$  no es conservativo; es decir, salvo casos particulares donde  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{B}$  no se puede calcular a partir de un potencial escalar.

La forma integral del teorema de Ampère se obtiene aplicando el teorema de Stokes, que relaciona el flujo del  $\nabla \times \mathbf{B}$  a través de una superficie  $S$  limitada por el contorno  $C$  con la integral de línea de  $\mathbf{B}$  sobre el citado contorno, es decir,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{s} \quad (10.10)$$

Sustituyendo la ecuación (10.9) en el segundo miembro de la ecuación anterior queda,

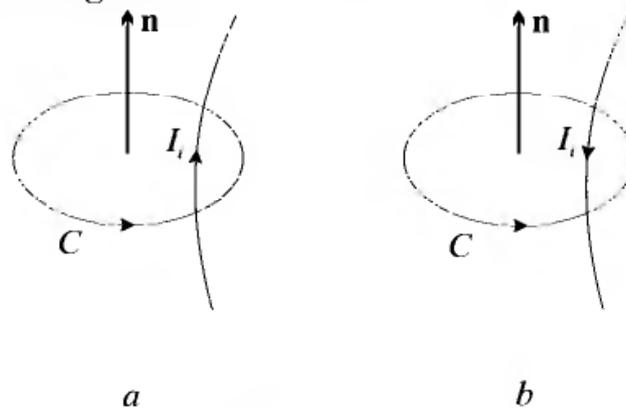
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (10.11)$$

Esta ecuación también se conoce como ley circuital de Ampère, y expresa que la circulación de  $\mathbf{B}$  sobre un camino cerrado  $C$  es igual al flujo de corriente a través de la superficie  $S$  limitada por el contorno  $C$ .

Si la superficie  $S$  es atravesada por  $N$  corrientes filiformes  $I_i$ , la ecuación (10.11) se transforma en la siguiente,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o \sum_1^N I_i \quad (10.12)$$

El sumatorio tiene en cuenta los sentidos de las corrientes  $I_i$  con respecto a la circulación sobre  $C$ , de manera que la corriente que atraviesa como indica la figura 10.1a, se toma como positiva y la que atraviesa como indica la figura 10.1b como negativa.



**Figura 10.1**

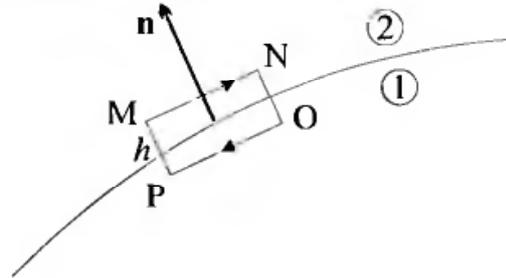
En la ley circuital de Ampère se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones: Cualquier corriente que atraviese dos veces la superficie  $S$  y en sentidos opuestos, no contribuye a la circulación de  $\mathbf{B}$  sobre  $C$  pero si afecta al campo  $\mathbf{B}$ . La posición de una corriente que atraviesa la superficie  $S$  no influye en la circulación de  $\mathbf{B}$  pero si en el valor de  $\mathbf{B}$  en puntos del camino de integración.

Las consideraciones anteriores muestran que se debe utilizar la ley circuital de Ampère con cuidado para calcular  $\mathbf{B}$ . En general solo se puede aplicar

cuando el problema tenga una simetría adecuada y el campo sea paralelo o perpendicular al camino de integración elegido.

#### *Condiciones de frontera*

La ecuación (10.11) nos permite obtener las condiciones que cumplen las componentes tangenciales de  $\mathbf{B}$  en la frontera entre dos medios, o bien superficie que presente una singularidad en la distribución de corriente. Si sobre la frontera circula una corriente superficial  $\mathbf{K}$ , y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie, figura 10.2, se verifica que,



**Figura 10.2**

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (10.13)$$

Si  $\mathbf{K} = 0$ , las componentes tangenciales de  $\mathbf{B}$  son continuas,

$$B_{2t} - B_{1t} = 0 \quad (10.14)$$

### 10.3 POTENCIAL VECTOR MAGNÉTICO

El teorema de Ampère muestra que, en general, no es posible encontrar una función escalar similar al potencial eléctrico que proporcione  $\mathbf{B}$  a partir de dicha función escalar. Por otra parte, la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  nos permite introducir un vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  cuyo rotacional sea igual a  $\mathbf{B}$  ya que la divergencia de un rotacional es nula. Esta relación entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es la ecuación de definición de  $\mathbf{B}$  a partir de  $\mathbf{A}$ , su forma matemática es,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (10.15)$$

Cualquier otro vector de la forma,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \phi$$

cumple la ecuación (10.15), debido a que  $\phi$  es una función escalar y el rotacional del gradiente es nulo.

Un vector queda definido cuando se conoce su divergencia y rotacional. Hemos definido el rotacional de  $\mathbf{A}$ , nos queda la posibilidad adicional de introducir una condición sobre al  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ; en magnetostática se elige,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (10.16)$$

La condición anterior facilita el cálculo de  $\mathbf{A}$ . Si la aplicamos al vector  $\mathbf{A}'$  nos queda  $\nabla^2 \phi = 0$ , ecuación, que si se mantiene en todo el espacio y no hay fuentes en el infinito, determina que  $\phi$  es constante o cero.

Para encontrar la ecuación que relaciona  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  con la distribución de corriente podemos seguir dos procedimientos. En los dos se parte de la ley de Biot y Savart, pero en la forma indicada en la ecuación (10.8). Comparando esta con la ecuación (10.15), vemos que,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.17)$$

El otro procedimiento consiste en sustituir la ecuación (10.15) en la ecuación (10.9) obtenida en el teorema de Ampère. Teniendo en cuenta la relación vectorial,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

e imponiendo la condición  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , se obtiene,

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_o \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (10.18)$$

Esta ecuación, desarrollada en coordenadas cartesianas, produce el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_o J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_o J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_o J_z \end{aligned} \quad (10.19)$$

Se puede observar que son tres ecuaciones similares a la de Poisson en electrostática. Las soluciones de dichas ecuaciones proporcionan el potencial vector  $\mathbf{A}$  en la forma indicada por la ecuación (10.17).

Aunque el procedimiento para obtener  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  es más complejo que en caso del potencial electrostático, la ecuación (10.18) nos permite calcular de una forma general el potencial vector  $\mathbf{A}$  en función de las corrientes y las condiciones en los límites del problema concreto. Una vez obtenido  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , mediante la ecuación (10.15) calculamos  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . También se puede calcular  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  mediante la ecuación (10.17), este procedimiento es manejable para distribuciones de corriente sencillas. Cuando las distribuciones de corriente dependen del tiempo, el potencial vector muestra mejor su utilidad.

Para distribuciones de corriente superficiales, cuya densidad sea  $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$ , el potencial vector viene dado por la ecuación siguiente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.20)$$

En el caso de campo magnético constante, se puede demostrar que la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{A}$  es,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (10.21)$$

*Relación entre  $\mathbf{A}$  y el flujo magnético  $\Phi$*

Es interesante conocer la relación que existe entre  $\mathbf{A}$  y el flujo magnético  $\Phi$ .

Aplicando el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$$

Sustituyendo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  obtenemos,

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \Phi \quad (10.22)$$

Es decir, la integral de línea del vector  $\mathbf{A}$  sobre un contorno  $C$  es igual al flujo del vector  $\mathbf{B}$  a través de una superficie  $S$  cuyo contorno es  $C$ .

*Condiciones en los límites para el vector  $\mathbf{A}$*

Las condiciones en una superficie límite o de frontera para el vector  $\mathbf{A}$  están ligadas al vector  $\mathbf{B}$ .

De la ecuación (10.22) se puede deducir que las componentes tangenciales de  $\mathbf{A}$  son continuas en el límite entre dos zonas, ya que si  $\Phi$  es finito sobre dicha superficie, la integral sobre el camino MNOP indicado en la figura 10.2 es cero cuando  $h$  tiende a cero.

En consecuencia, si  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $S$ ,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = 0 \rightarrow A_{t2} - A_{t1} = 0 \quad (10.23)$$

De la condición  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , se deduce, en forma análoga al caso de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  que,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = 0 \rightarrow A_{n2} - A_{n1} = 0 \quad (10.24)$$

Las ecuaciones (10.23) y (10.24) se pueden condensar en la condición,

$$\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 = 0 \quad (10.25)$$

que verifica  $\mathbf{A}$  sobre la superficie límite en campos estáticos. Esta condición es similar a la que cumple el potencial eléctrico.

#### 10.1.4 DISTRIBUCIÓN DE CORRIENTE

Si tenemos una distribución de corriente localizada como indica la figura 10.3, cuyo volumen es de dimensiones pequeñas comparadas con la distancia al punto donde se desea conocer el potencial vector magnético  $\mathbf{A}$  y el campo  $\mathbf{B}$ , podemos desarrollar en serie el término  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  que figura en la ecuación (10.17).

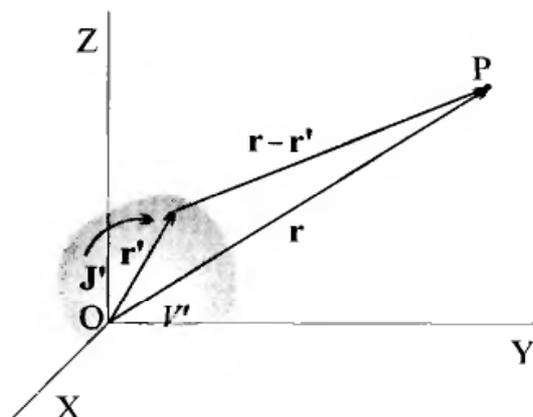


Figura 10.3

Dicho desarrollo produce un potencial vector magnético  $\mathbf{A}$  de la forma siguiente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{r^3} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') dv' + \dots \right) \quad (10.26)$$

Este desarrollo tiene cierta similitud con el multipolar en electrostática. El primer término del segundo miembro se corresponde con el término monopolar. En este caso es cero, por que las corrientes describen circuitos cerrados dentro del volumen  $V'$ , y  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , es decir,

$$\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = 0$$

El segundo término, correspondiente al momento dipolar en electrostática, se puede expresar de otra forma. Utilizamos una serie de transformaciones basadas en que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . El resultado después de operaciones complejas es que,

$$\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') dv' = -\frac{1}{2} \left( \mathbf{r} \times \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dv' \right)$$

En consecuencia, el término dipolar para  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  es,

$$\mathbf{A}_D = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{2} \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dv' \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (10.27)$$

*Momento dipolar magnético*

La ecuación (10.27) tiene una parte entre paréntesis que sirve para definir el momento dipolar magnético de una distribución de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ , dicho momento se suele representar por  $\mathbf{m}$ ,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dv' \quad (10.28)$$

En el caso de una corriente filiforme  $I$ ,

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' \quad (10.29)$$

La integral de la ecuación anterior es el doble del área plana  $S$  cerrada por el camino  $C'$ , por tanto,

$$\mathbf{m} = I \mathbf{S} = I S \mathbf{n} \quad (10.30)$$

Donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $S$ .

*Dipolo magnético*

El término dipolar es el primero no nulo del desarrollo en serie y por tanto el término dominante para puntos alejados de la distribución. El valor de  $\mathbf{A}_D$  corresponde al potencial vector magnético debido a un dipolo magnético puntual. Es decir, el potencial vector magnético debido a un dipolo magnético formado por una espira de pequeñas dimensiones es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (10.31)$$

*Campo debido a un dipolo magnético*

El campo magnético debido a un dipolo magnético puntual, que es el mismo que corresponde al término dipolar de una distribución de corriente, se obtiene calculando el rotacional de  $\mathbf{A}$  dado por la ecuación (10.31). Tomando como variable  $\mathbf{r}$ , teniendo en cuenta la relación vectorial,

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

con  $\mathbf{F} = \mathbf{m}$ ,  $\mathbf{G} = (\mathbf{r}/r^3)$ , y que  $\mathbf{m}$  no depende de  $\mathbf{r}$ ; la ecuación que se obtiene es,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad (10.32)$$

Podemos observar que  $\mathbf{B}$  varía con la inversa de  $r^3$  en lugar de  $r^2$  como ocurre en el caso de corrientes cuya distribución está dentro de un volumen de dimensiones comparables a la distancia  $r$  donde se calcula el campo.

### 10.1.5 PAR DE FUERZAS SOBRE UN DIPOLO

Sobre un dipolo magnético situado en un campo magnético uniforme, cuyo valor es  $\mathbf{B}_o$ , se ejerce un par de fuerzas que se obtiene aplicando la ecuación (9.20) al caso de un circuito cerrado. Aquí el circuito cerrado es una espira cuyo momento dipolar magnético es  $\mathbf{m}$ . Se demuestra que dicho par viene dado por la ecuación siguiente:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_o \quad (10.33)$$

El par de fuerzas tiende a orientar al dipolo en la dirección y sentido del campo magnético  $\mathbf{B}_o$ .

## 10.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 10.1

Dado el sistema constituido por los siguientes elementos: Una corriente  $\mathbf{J} = J\mathbf{u}_z$  distribuida uniformemente sobre un cilindro indefinido de radio  $a$ , véase la figura P10.1.1. Una espira cuadrada de lado  $L = 4a$  sobre el plano que pasa por el eje del cilindro, por la que circula una corriente  $I$ . La espira se puede mover sobre dicho plano.

Calcular la fuerza inicial sobre la espira.

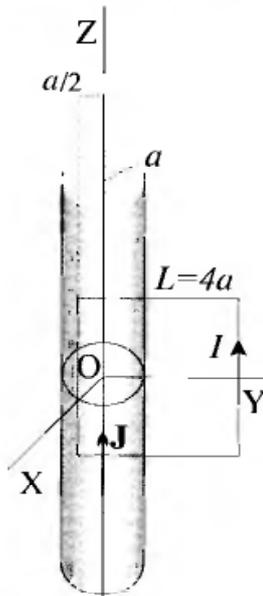


Figura P10.1.1

#### Solución

La fuerza sobre la espira se calcula utilizando la ecuación (9.6) del capítulo anterior. Para aplicar dicha ecuación necesitamos conocer el campo magnético  $\mathbf{B}$  en cada punto de la espira. Podemos obtener  $\mathbf{B}$  de una forma relativamente sencilla aplicando el teorema de Ampère tal como aparece en la ecuación (10.11). Dado que la espira tiene parte en el interior del cilindro de radio  $a$  y parte fuera, debemos calcular  $\mathbf{B}$  en las dos zonas.

1) *Determinación del campo magnético  $\mathbf{B}$*

1a) *Zona  $\rho \geq a$ .*

Dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente y que es indefinida en la dirección de  $\mathbf{u}_z$ , las componentes de  $\mathbf{B}$  son tangenciales a la circunferencias de centro en eje del cilindro, como ocurre en el caso de una corriente filiforme rectilínea e indefinida. Además tienen el mismo módulo sobre una circunferencia de radio  $\rho$  y centro sobre el citado eje.

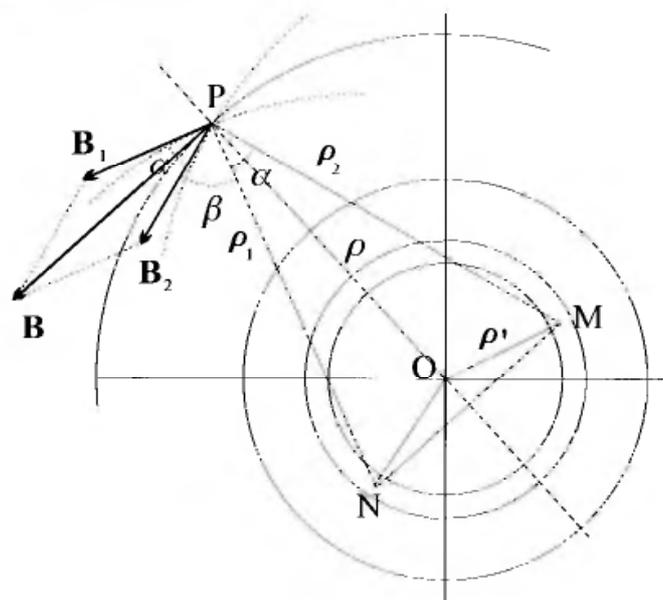


Figura P10.1.2

Para demostrar esto vamos a ver el campo  $B$  debido a dos conductores elementales indefinidos en la dirección del eje y de sección  $ds' = \rho' d\varphi d\rho'$ , correspondientes a un tubo indefinido de sección  $2\pi \rho' d\rho'$  como indica la figura P10.1.2.

Calculamos  $\mathbf{B}$  en el punto P debido a todos los elementos M y N simétricos con respecto a la recta OP, cuyas secciones pertenecen al tubo citado anteriormente. El conductor M crea el campo  $\mathbf{B}_2$  y el N el  $\mathbf{B}_1$ . De la ley de Biot y Savart sabemos que  $\mathbf{B}_2$  es perpendicular a  $\rho_2$  (MP) y  $\mathbf{B}_1$  lo es a  $\rho_1$  (NP). El ángulo  $\alpha$  que forman  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  es igual al formado por  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , dada la perpendicularidad de radios y campos. La suma de los vectores  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  es igual a  $\mathbf{B}$ , que está sobre la bisectriz del ángulo  $\alpha$ , por tanto  $\mathbf{B}$  será perpendicular a la recta OP bisectriz del ángulo formado por  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , ya que si son perpendiculares los lados de dos ángulos lo deben ser las bisectrices. Es decir  $\mathbf{B}$  es tangente a la circunferencia de radio  $\rho$ . Sumados todos los elementos simétricos con respecto a OP, que corresponden al tubo de radio  $\rho'$  y sección  $2\pi \rho' d\rho'$ , obtendríamos un campo  $\mathbf{B}$  tangente a la circunferencia de radio  $\rho$ . Dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, esto mismo sucede con cualquier punto de la circunferencia de radio  $\rho$  y en todos ellos el módulo sería el mismo. En resumen, un tubo de corriente de sección  $2\pi \rho' d\rho'$  produce sobre un circunferencia concéntrica de radio  $\rho$  un campo magnético tangente y del mismo módulo en todos sus puntos.

Para calcular  $\mathbf{B}$  tomamos un tubo elemental de sección  $2\pi \rho' d\rho'$  en el interior del cilindro de radio  $a$  e integramos el segundo miembro de la ecuación (10.11), es decir,  $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ , entre 0 y  $a$ . El primer miembro de dicha ecuación será la circulación de la componente tangencial de  $\mathbf{B}$  a la circunferencia de radio  $\rho$ . De esta forma obtendremos  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_\varphi$ .

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B = \mu_o \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_o \int_0^a J 2\pi \rho' d\rho' = \mu_o J a^2 \pi$$

Despejando el campo tenemos,

$$B = \frac{1}{2}\mu_o \frac{J a^2}{\rho} \rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{2}\mu_o \frac{J a^2}{\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad (10.1.1)$$

b) Zona  $\rho \leq a$

En esta zona se cumplen las condiciones de simetría del caso anterior, pero ahora solo contribuyen los elementos de corriente cuyo radio es inferior a  $\rho$ ,  $\rho \leq a$ , ya que el teorema de Ampère así lo establece. Los límites de integración para  $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$  serán 0 y  $\rho$ .

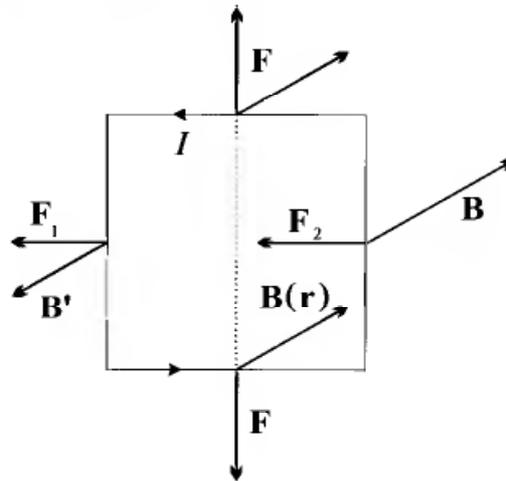
La ecuación (10.11) en este caso queda de la forma,

$$2\pi\rho B' = \mu_o J \pi\rho^2$$

$$B' = \frac{1}{2}\mu_o J \rho \rightarrow \mathbf{B}' = \frac{1}{2}\mu_o J \rho \mathbf{u}_\varphi \quad (10.1.2)$$

2) *Fuerza inicial sobre la espira*

Sobre los tramos horizontales, dado que las corrientes tienen sentido contrario en ellos, la fuerza sobre cada circuito elemental  $I dl'$  en el tramo superior es del mismo módulo y sentido opuesto a la correspondiente al tramo inferior, véase la figura P10.1.3, en consecuencia la fuerza sobre la espira debida a estos tramos es nula.



**Figura P10.1.3**

*Fuerza sobre el lado izquierdo*

Sobre este lado actúa un campo  $\mathbf{B}'(a/2) = -(1/4)\mu_o J a \mathbf{u}_x$ , ya que en el plano YZ  $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x$

La fuerza, como indica la figura P10.1.3, será  $\mathbf{F}_1$ . Esta fuerza se calcula mediante la ecuación (9.6), que en nuestro caso, considerando que la corriente se dirige hacia  $z < 0$ ,  $I d\mathbf{l} = -I dz \mathbf{u}_z$ , y los límites de integración son:  $L/2$  y  $-L/2$ , que en función de  $a$  serán,  $2a$  y  $-2a$ . La fuerza es,

$$\mathbf{F}_1 = \int_{L/2}^{-L/2} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}'(a/2) = \int_{2a}^{-2a} (1/4)\mu_o I J a dz \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = -\mu_o I J a^2 \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{F}_1 = -\mu_o I J a^2 \mathbf{u}_y \quad (10.1.3)$$

*Fuerza sobre el lado derecho*

El campo magnético será  $\mathbf{B}(7a/2)$ . La fuerza en este tramo será como indica la figura P10.1.3,  $\mathbf{F}_2$ . Teniendo en cuenta que ahora la expresión (10.1.1) proporciona  $\mathbf{B}$ , con  $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x$ . Los límites de integración ahora son:  $-2a$  y  $2a$ ; operando de forma análoga al caso anterior, dicha fuerza es,

$$\mathbf{F}_2 = \int_{-2a}^{2a} I dz \frac{1}{2} \mu_0 \frac{2Ja^2}{7a} \mathbf{u}_z \times (-\mathbf{u}_x)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{4}{7} \mu_0 a^2 I J \mathbf{u}_y \quad (10.1.4)$$

La fuerza inicial pedida es la suma de las expresiones (10.1.3) y (10.1.4),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\frac{11}{7} \mu_0 a^2 I J \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 10.2

Por el interior de un tubo de plástico muy largo y rectilíneo circula un líquido ionizado, a una velocidad  $v = 100$  m/s. El número de cargas netas por unidad de volumen que transporta es  $n = 10^6$  electrones/m<sup>3</sup>. El radio del tubo es  $R = 10$  cm. A dicho tubo se arrolla una capa de espiras que forman un solenoide. El número de espiras por unidad de longitud es  $N = 10^4$  espiras/m, y por ellas circula una corriente  $I = 2$  A.

Calcular el campo magnético en el interior y exterior del tubo.

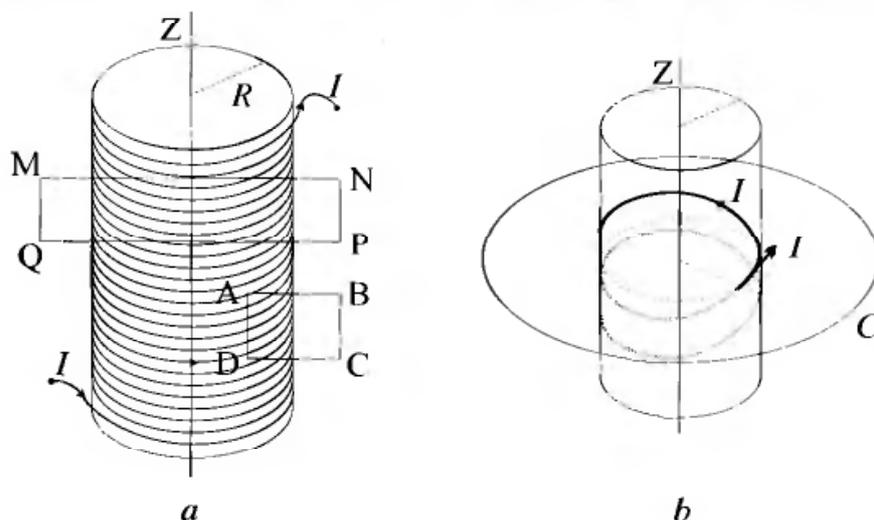


Figura P10.2

### Solución

#### 1) Interior del tubo y solenoide

En un solenoide indefinido con las espiras muy juntas, la componente de  $\mathbf{B}$  en la dirección del eje es nula en el exterior y uniforme en el interior. Esto se demuestra aplicando el teorema de Ampère, ecuación (10.12), al rectángulo MNPQ de la figura P10.2a; la circulación de  $\mathbf{B}$  es nula para cualquier longitud NP, por tanto la componente externa en la dirección del eje es nula.

La aplicación del teorema de Ampère, en la forma indicada por la ecuación (10.12), a un rectángulo ABCD sobre un plano diametral como indica la figura P10.2.a, produce el siguiente valor de  $\mathbf{B}_s$ ,

$$\mathbf{B}_s = \mu_o N I \mathbf{u}_z = \mu_o 2 \times 10^4 \mathbf{u}_z \quad [\text{T}] \quad (10.2.1)$$

El campo producido por la corriente debida al transporte del líquido se obtiene aplicando el teorema de Ampère a un tubo por el que circula una corriente de simetría cilíndrica, y se procede en forma similar al problema 10.1.

La densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es,

$$\mathbf{J} = n e v \mathbf{u}_z$$

Aplicando el teorema de Ampère, ecuación (10.11), cuando la circulación de  $\mathbf{B}$  se hace sobre una circunferencia de radio  $\rho < R$  y centro sobre el eje, obtenemos la siguiente ecuación,

$$B_\varphi 2\pi\rho = \mu_o \pi \rho^2 J = \mu \pi \rho^2 n e v$$

De donde,

$$B_\varphi = \frac{1}{2} \mu_o \rho n e v \rightarrow \mathbf{B}_{ti} = \frac{1}{2} \mu_o \rho n e v \mathbf{u}_\varphi \quad (10.2.2)$$

El campo magnético en el interior del tubo se obtiene sumando las ecuaciones (10.2.1) y (10.2.2),

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_{ti} = \mu_o 2 \times 10^4 \mathbf{u}_z + \frac{1}{2} \mu_o \rho n e v \mathbf{u}_\varphi$$

Si consideramos la permeabilidad del líquido igual  $\mu_o$ , utilizando los valores de  $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$  y  $e = 1,6 \times 10^{-19}$ , la relación anterior toma el valor siguiente.

$$\mathbf{B}_i \simeq 4\pi 10^{-7} (2 \times 10^4 \mathbf{u}_z + 8 \times 10^{-12} \rho \mathbf{u}_\varphi)$$

Vemos que en el interior la contribución de la corriente en el líquido es despreciable frente a la correspondiente al solenoide.

2) *En el exterior del solenoide*

El campo magnético producido por el tubo de corriente se obtiene aplicando el teorema de Ampère cuando la circulación de  $\mathbf{B}$  se hace sobre una circunferencia de radio  $\rho > R$ ,

$$B_\varphi 2\pi\rho = \mu \pi R^2 J = \mu_o \pi R^2 n e v$$

$$\mathbf{B}_{te} = \frac{1}{2} \mu_o R^2 n e v \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi \simeq 8 \times 10^{-14} \mu_o \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad (10.2.3)$$

Para calcular en el exterior el campo debido al solenoide, debemos encontrar la forma de obtener dicha aportación. Considerando el solenoide como una hélice circular, véase la figura P10.2b, a cada plano perpendicular al eje le atraviesa una de las espiras que transporta una corriente  $I$ . El solenoide para el exterior se comporta como un tubo de radio  $R$  por cuyas paredes circula una corriente  $I$  en la dirección de su eje. En este caso la aplicación del teorema de Ampère produce el campo magnético siguiente ( $I = 2A$ ),

$$\mathbf{B}'_s = \mu_o \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi = \mu_o \frac{1}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad (10.2.4)$$

Comparando esta ecuación con la anterior, podemos comprobar que el solenoide produce en el exterior un campo magnético mayor que la corriente transportada por el líquido pero mucho menor (del orden de  $10^4$  veces más pequeña) que el campo creado por el solenoide en su interior.

Generalmente no se considera el campo creado por el solenoide en el exterior, ya que un solenoide ideal es como un conjunto de espiras planas muy juntas dispuestas sobre un cilindro muy largo. El solenoide está formado por dos capas de conductores en espiral con inclinación o pendiente de la hélice en sentido contrario; por una va y por la otra regresa la corriente. De esta forma a cada plano lo atraviesan dos corrientes del mismo módulo pero sentido contrario, con lo cual se elimina el campo en el exterior. Esta disposición es la forma práctica de construir un solenoide o bobina.

El campo magnético en el exterior se obtiene sumando las ecuaciones (10.2.3) y (10.2.4).

$$\mathbf{B}_e \simeq \mu_o \left( 8 \times 10^{-14} + \frac{1}{2\pi} \right) \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Si el solenoide se construye como se indica en el apartado anterior, desaparece el término en  $1/2\pi$  de la expresión anterior. Además vemos que el campo debido al líquido ionizado es muy pequeño, del orden de  $10^{-21}$  T.

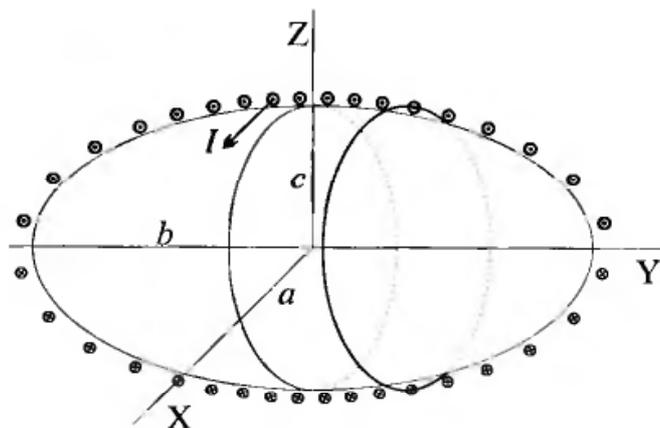
### PROBLEMA 10.3

Sobre un elipsoide de semiejes  $a = c \neq b$  y permeabilidad  $\mu_o$ , se arrollan espiras cuyo plano es perpendicular al eje Y, véase la figura P10.3. El número de espiras por unidad de longitud en la dirección del eje Y es  $n$ , y por ellas circula la corriente  $I$ .

Calcular el campo magnético sobre el eje Y. Demostrar que es uniforme en el interior del elipsoide.

**Solución**

Para lograr el resultado final, debemos calcular primero el campo creado por una espira sobre el eje  $y$ , sumando (integrando) después la contribución de todas.

**Figura P10.3**

Como vimos en el problema 9.7, el campo magnético creado por una espira, con el sentido de la corriente indicado en la figura P10.3, en su eje es:

$$\mathbf{B}_o = \frac{\mu_o}{2} I_o \frac{\rho^2}{(\rho^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y$$

En este caso  $I_o = nI dy$  y  $\rho^2 = x^2 + z^2$ . Además la ecuación del elipsoide es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

como  $c = a$ ,

$$1 - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(x^2 + z^2) = \frac{\rho^2}{a^2}$$

Sustituyendo estos valores en  $\mathbf{B}_o$  y teniendo en cuenta que los límites de integración son  $-b$  y  $b$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o}{2} \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{nI dy}{(a^2(1 - (y/b)^2) + y^2)^{3/2}} \\ B &= \frac{\mu_o}{2} nI \int_{-b}^b ba^2 (b^2 - y^2) \frac{dy}{(a^2b^2 + (b^2 - a^2)y^2)^{3/2}} \\ B &= \frac{\mu_o}{2} nI \int_{-b}^b \frac{1}{ab^2} (b^2 - y^2) \frac{dy}{\left(1 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)y^2\right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

Poniendo

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

y realizando operaciones,

$$B = \frac{\mu_o}{2} n I D^3 \int_{-b}^b \frac{1}{ab^2} (b^2 - y^2) \frac{dy}{(D^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_o}{2} \frac{n I D^3}{a} \left( \int_{-b}^b \frac{dy}{(D^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2} \int_{-b}^b \frac{y^2 dy}{(D^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

La integración nos da la siguiente relación,

$$B = \frac{\mu_o}{2} \frac{n I D^3}{a} \left\{ \frac{2}{D^2} \frac{b}{(D^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{2b}{b^2 (D^2 + b^2)^{1/2}} - \frac{1}{b^2} \ln \left( \frac{(D^2 + b^2)^{1/2} + b}{(D^2 + b^2)^{1/2} - b} \right) \right\}$$

En el logaritmo multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador y tenemos en cuenta que  $\ln x^2 = 2 \ln x$ . Realizando las operaciones correspondiente tenemos,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o n I D^3}{a} \left( \frac{1}{b D^2} (D^2 + b^2)^{1/2} - \frac{1}{b^2} \ln \left( \frac{(D^2 + b^2)^{1/2} + b}{D} \right) \right) \mathbf{u}_y$$

La expresión anterior muestra que el campo magnético es constante sobre el eje Y, dependiendo de los valores respectivos que tengan  $a$  y  $b$ .

En el caso particular de la esfera,  $a = b = c$ , obtenemos el campo a partir de la expresión (10.3.1), cuyo valor ahora es,

$$B = \frac{\mu_o}{2} n I \int_{-b}^b \frac{1}{b^3} (b^2 - y^2) dy$$

Integrando queda.

$$B = \frac{2}{3} \mu_o n I \rightarrow \mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_o n I \mathbf{u}_y$$

Para demostrar que  $\mathbf{B}$  es uniforme en el interior, aplicamos las condiciones que cumplen  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  y  $\nabla \times \mathbf{B}$  en el interior del elipsoide, que en este caso son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

Dada la simetría cilíndrica del sistema con respecto al eje Y, tomamos coordenadas cilíndricas con eje Y. El campo magnético no depende de  $\varphi$ , y  $B_\varphi = 0$  por que  $\mathbf{B}$  es perpendicular a las corrientes y estas tienen dirección de  $\mathbf{u}_\varphi$ . Sobre el eje Y  $B_y$  es constante como hemos visto en el apartado anterior.

En coordenadas cilíndricas,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial y} \right) \mathbf{u}_\rho + \left( \frac{\partial B_\rho}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_y$$

Como  $B$  no depende de  $\varphi$  y  $B_\varphi = 0$ , todas las derivadas con respecto a  $\varphi$  y los términos que tengan  $B_\varphi$  son nulos.

Sobre el eje  $(\partial B_y / \partial y) = 0$ , ya que  $B$  es constante, por tanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) = 0 \rightarrow \rho B_\rho = K \rightarrow B_\rho = \frac{K}{\rho}$$

Esto nos llevaría a que  $B_\rho = \infty$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ , lo que se opone a que  $B$  es constante en el eje, por tanto,

$$B_\rho = 0$$

Con las condiciones anteriores el rotacional y la divergencia se reduce a,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial B_y}{\partial \rho} = 0 \rightarrow B_y \text{ no depende de } \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \rightarrow B_y \text{ no depende de } y$$

Tomando en consideración las condiciones anteriores, se deduce que

**B es uniforme en el interior del elipsoide**

Su valor es el calculado sobre el eje Y.

#### PROBLEMA 10.4

Calcular el campo magnético creado por una capa de corriente plana indefinida, situada sobre el plano XZ, siendo la densidad de corriente  $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{u}_z$  (A/m). Aplicar en primer lugar el teorema de Ampère y después comprobar el resultado aplicando la ley de Biot y Savart.

#### Solución

1) *Aplicando el teorema de Ampère*

La corriente tiene la dirección del eje Z, por tanto el campo magnético, que es perpendicular a la corriente, será perpendicular al eje Z. Como además la corriente es indefinida en la dirección del eje Z,  $\mathbf{B}$  será independiente de esta coordenada.

La corriente es también indefinida en la dirección del eje X, por tanto las líneas de  $\mathbf{B}$  deben ser paralelas al plano XZ, e independientes de la coordenada  $x$ .

En resumen, el campo magnético  $\mathbf{B}$  debe ser,

$$\mathbf{B} = B \mathbf{u}_x$$

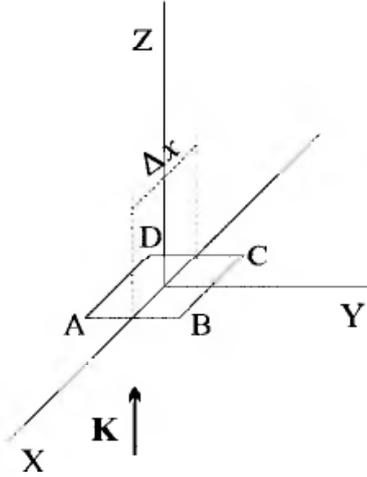


Figura P10.4.1

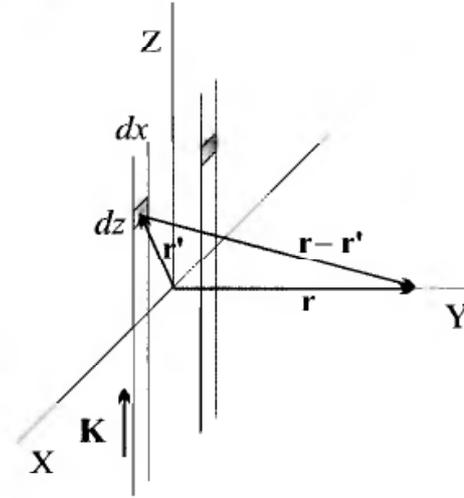


Figura P10.4.2

La constante  $B$  no depende de las variables  $x$  y  $z$ , pero debemos demostrar que tampoco depende de la variable  $y$ . Para ello aplicamos el teorema de Ampère al camino ABCD indicado en la figura P10.4.1,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Delta x K_o$$

En los tramos AB y CD el campo es perpendicular al camino, por lo que su integral será cero. Para cualquier rectángulo ABCD que conserve los lados AD y BC del mismo tamaño, la integral anterior tendrá el mismo valor, en consecuencia  $\mathbf{B}$  no depende de la coordenada  $y$ . Debido al sentido y simetría de la corriente, el campo en los semiespacios separados por el plano XZ será:

$$\mathbf{B} = -B \mathbf{u}_x \text{ para } y > 0 ; \mathbf{B} = B \mathbf{u}_x \text{ para } y < 0$$

Llevando estos valores a la integral anterior tendremos,

$$B 2\Delta x = \mu_0 \Delta x K_o$$

de donde,

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 K_o$$

El campo magnético en la dos regiones es,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 K_o \mathbf{u}_x \text{ para } y < 0 ; \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \mu_0 K_o \mathbf{u}_x \text{ para } y > 0$$

2) Aplicando la ley de Biot y Savart

Utilizamos la forma expresada por la ecuación (9.8),

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}'(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Como muestra la figura P10.4.2, los distintos vectores que intervienen en la integral son:

$$\mathbf{K}'(\mathbf{r}') = K_o \mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r} = y \mathbf{u}_y; \quad \mathbf{r}' = x \mathbf{u}_x + z \mathbf{u}_z; \quad ds' = dx dz$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = y \mathbf{u}_y - x \mathbf{u}_x - z \mathbf{u}_z; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{K}'(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = K_o \mathbf{u}_z \times (-x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y - z \mathbf{u}_z) = -K_o (y \mathbf{u}_x + x \mathbf{u}_y)$$

Dada la simetría de la distribución con respecto al eje Z, como se muestra en la figura P.10.4.2, cada elemento diferencial de superficie tiene un simétrico en relación con el eje Z, por lo que del producto vectorial anterior, al sumar (integrar), desaparece la componente en la dirección del eje Y. La integración, por tanto, se puede hacer sobre el semiplano de  $x > 0$  y multiplicando el resultado por dos.

La ley de Biot y Savart para  $y > 0$  quedará en este caso de la forma,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} 2K_o \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty \frac{-y dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_o}{2\pi} K_o \int_0^\infty \left[ \frac{z}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]_{-\infty}^\infty y dx \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_o}{\pi} K_o y \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + y^2} \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_o}{\pi} K_o y \left[ \frac{1}{y} \arctan \frac{x}{y} \right]_0^\infty \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2} \mu_o K_o \mathbf{u}_x$$

El vector  $\mathbf{B}$  en la zona correspondiente a  $y < 0$  cambia solo de signo, ya que en este caso  $\mathbf{r} = -y \mathbf{u}_y$ , por tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_o K_o \mathbf{u}_x$$

Los resultados obtenidos son idénticos a los que hemos encontrado aplicando el teorema de Ampère.

### PROBLEMA 10.5

Tenemos dos planos conductores perpendiculares, uno situado sobre el plano XZ y el otro sobre el XY como muestra la figura P10.5. El segundo es indefinido en la dirección del eje X y se extiende desde  $y = 0$  hasta  $y = \infty$ .

Por el primero circula una corriente superficial cuya densidad es:  $\mathbf{K} = K \mathbf{u}_x$ , y por el segundo otra  $\mathbf{K}' = 2K \mathbf{u}_x$ .

Calcular de forma aproximada el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto  $P(0, l, h)$ , considerando  $l \gg h$ . Razonar las condiciones en que se realiza la aproximación.

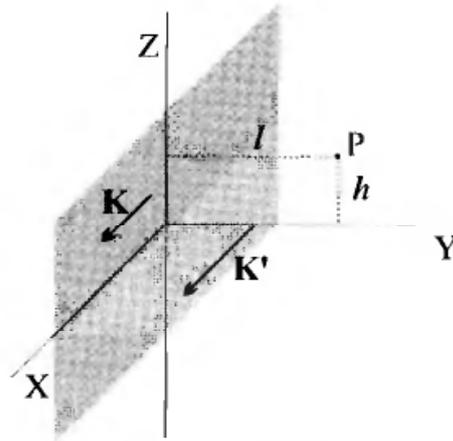


Figura P10.5

### Solución

El campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto  $P$  será la suma de los campos debidos a la corriente en el plano  $XZ$  más la corriente en el semiplano  $XY$ .

#### 1) Plano vertical $XZ$

El campo magnético debido a esta distribución superficial de corriente se obtiene aplicando el teorema de Ampère sobre un camino rectangular elemental, situado en el plano  $YZ$ , y que incluya parte de la corriente, véase el problema 10.4. El resultado para el módulo del campo magnético es,

$$B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 K$$

La dirección y sentido de dicho campo es la que corresponde a  $\mathbf{u}_z$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_0 K \mathbf{u}_z$$

#### 2) Semiplano horizontal

Aunque el plano no es indefinido en la zona de  $y < 0$ , dado que  $l \gg h$ , podemos considerar dicho semiplano como indefinido en el cálculo de  $\mathbf{B}$  en el punto  $P$ . Con esta consideración, el campo creado por la distribución de corriente  $\mathbf{K}'$  se obtiene de forma aproximada por el procedimiento utilizado en el caso anterior. En este caso la dirección y sentido del campo coincide con  $-\mathbf{u}_y$ . En el punto  $(x, l, h)$ , teniendo en cuenta la solución del problema 10.4, la integral para el campo es,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 K'}{4\pi} \int_{-l}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-h dx}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y = -\frac{\mu_0 K' h}{4\pi} \int_{-l}^{\infty} \frac{2dy}{y^2 + h^2} \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o}{2\pi} K' \left[ \arctan \frac{y}{h} \right]_{-l}^{\infty} \mathbf{u}_y = -\frac{\mu_o}{2\pi} K' \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-l}{h} \right) \mathbf{u}_y$$

Como  $l \gg h \rightarrow \arctan(-l/h) \simeq -\pi/2$ , y por tanto,

$$\mathbf{B}_2 \simeq -\frac{1}{2} \mu_o K' \mathbf{u}_y \simeq -\mu_o K \mathbf{u}_y$$

El campo total será,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \simeq \mu_o K \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}_z - \mathbf{u}_y \right)$$

**PROBLEMA 10.6**

En el dispositivo que muestra la figura P10.6. G es un cañón y C un tubo de radio muy pequeño. G y C están alineados. P es una placa metálica indefinida, recorrida por una corriente uniforme cuya densidad superficial es  $\mathbf{K} = -K \mathbf{u}_y$ .

Calcular la velocidad de salida de las partículas cargadas, que partiendo de G atraviesan el tubo C.

Suponemos que cañón y tubo no perturban la fuerza entre la carga y plano metálico. Se desprecia la fuerza gravitatoria.

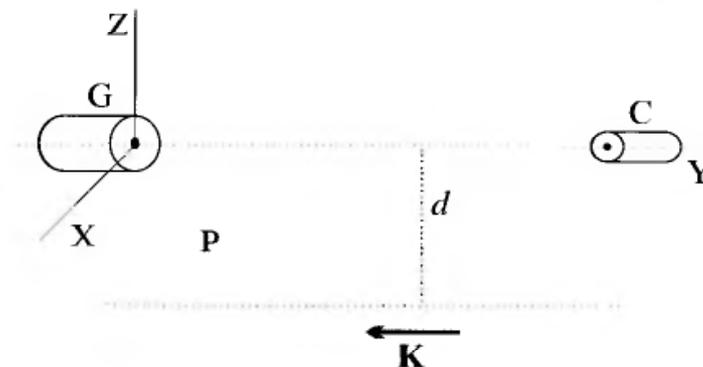
**Solución**

Para que la trayectoria de la partícula cargada no se modifique, la fuerza perpendicular a dicha trayectoria debe ser nula.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

$\mathbf{F}_e$  es la fuerza electrostática y  $\mathbf{F}_m$  la magnética.

$\mathbf{F}_e$  se calcula aplicando el método de imágenes y  $\mathbf{F}_m$  mediante la ecuación (9.17).



**Figura P10.6**

El método de imágenes, en el caso de una carga puntual  $q$  frente a un plano indefinido unido a tierra, nos permite obtener la fuerza,

$$\mathbf{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Para calcular  $\mathbf{F}_m$  utilizamos el valor del campo magnético encontrado en el problema 10.4, es decir, en nuestro caso el campo  $\mathbf{B}$  por encima del plano es:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 K \mathbf{u}_x$$

Dado que  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$ , la fuerza magnética será:

$$\mathbf{F}_m = -q\frac{1}{2}\mu_0 K v \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x = q\frac{1}{2}\mu_0 K v \mathbf{u}_z$$

Como la suma de las fuerzas electrostática y magnética debe ser nula,

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \mathbf{u}_z + q\frac{1}{2}\mu_0 K v \mathbf{u}_z = 0$$

De donde se deduce que,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} = q\frac{1}{2}\mu_0 K v$$

Despejando la velocidad obtenemos,

$$v = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\mu_0} \frac{q}{K d^2} \rightarrow \mathbf{v} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\mu_0} \frac{q}{K d^2} \mathbf{u}_y$$

### PROBLEMA 10.7

Por el plano XZ circula una corriente cuya densidad superficial es  $\mathbf{K} = K\mathbf{u}_z$ . Desde el punto  $P(0, -d, 0)$  se lanza una carga  $q$ , de masa  $m$ , con una velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$ , véase la figura P10.7. Encontrar la trayectoria de  $q$  despreciando la fuerza gravitatoria. Calcular el mínimo valor de  $K$  para que la carga no atraviese el plano XZ

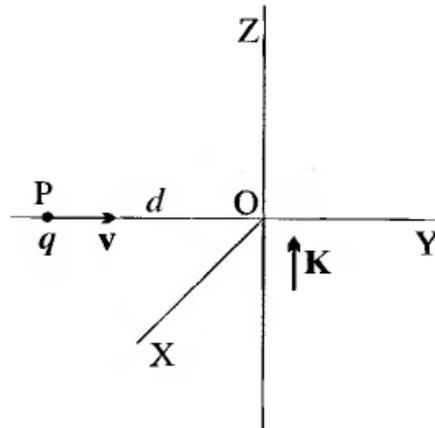


Figura P10.7

**Solución**

El campo magnético debido a la corriente que circula por el plano se obtiene procediendo de forma análoga al caso del problema 10.4.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

Tomando una espira rectangular perpendicular al plano y de anchura  $a$ , obtenemos

$$B2a = \mu_0 I = \mu_0 K a$$

Luego

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 K \mathbf{u}_x$$

La fuerza que actúa sobre la partícula es.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = qv\mathbf{u}_y \times \frac{1}{2} \mu_0 K \mathbf{u}_x = -\frac{1}{2} qv\mu_0 K \mathbf{u}_z$$

Ahora bien, una partícula que se desplaza con velocidad  $v$  en el seno de un campo magnético uniforme, realiza un movimiento circular. Por tanto la fuerza que ejerce el campo debe ser igual a la fuerza centrípeta.

$$F_c = m \frac{v^2}{R} = \frac{1}{2} qv\mu_0 K$$

de donde

$$R = \frac{2mv}{\mu_0 qK}$$

Cuando el radio de la trayectoria sea igual a la distancia  $d$ , dicha trayectoria es tangente al plano y no lo atravesará. El valor mínimo de  $K$  será,

$$K = \frac{2mv}{\mu_0 qd}$$

Para valores menores de  $K$ , el radio de la trayectoria será mayor y la carga atravesará el plano, y con valores mayores la trayectoria de la carga no toca el plano XZ.

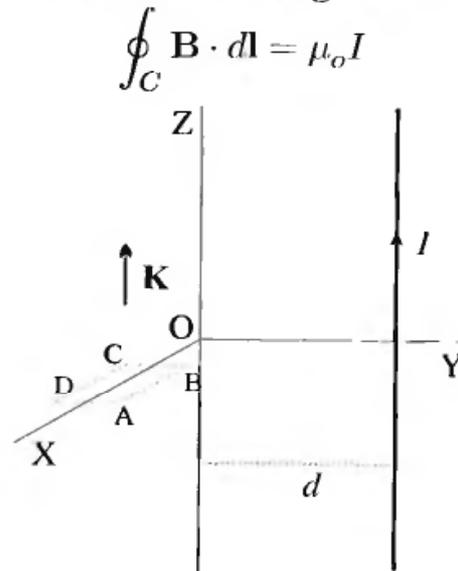
**PROBLEMA 10.8**

Tenemos un plano conductor indefinido en X y Z, coincidente con el plano XZ. Por dicho plano circula una densidad de corriente  $\mathbf{K} = K \mathbf{u}_z$ . A una distancia  $d$  del plano se sitúa un hilo indefinido como muestra la figura P10.8. Por el hilo circula una corriente  $I$

Calcular la fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre el hilo.

**Solución**

En primer lugar determinamos el campo magnético en el espacio a la derecha del plano indefinido. Aplicamos el teorema de Ampère a un circuito rectangular ABCD como se indica en la figura P10.8.

**Figura P10.8**

Teniendo en cuenta que por simetría el producto  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  es distinto de cero únicamente en los tramos AB y CD, y que  $I = K l$  siendo  $l$  la longitud del tramo AB; Tendremos

$$2B_x l = \mu_o K l$$

Luego

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2}\mu_o K \mathbf{u}_x$$

Ahora, la fuerza sobre un elemento de circuito  $I d\mathbf{l}$  viene dada por la expresión

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Con  $I d\mathbf{l} = I dz \mathbf{u}_z$

Luego

$$d\mathbf{F} = -\frac{I\mu_o K}{2} dz (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x) = -\frac{I\mu_o K dz}{2} \mathbf{u}_y$$

Y la fuerza por unidad de longitud será

$$\frac{d\mathbf{F}}{dz} = -\frac{1}{2} I \mu_o K \mathbf{u}_y$$

**PROBLEMA 10.9**

Sobre un plano coincidente con el XZ circula una densidad de corriente superficial  $\mathbf{K} = K \mathbf{u}_z$ . A una distancia  $a$  disponemos un conductor doblado

en ángulo recto como muestra la figura 10.9. donde  $b = 2a$ . Por dicho conductor circula una corriente  $I$ .

Calcular la fuerza que ejerce el campo creado por la densidad de corriente  $\mathbf{K}$  sobre el conductor doblado.

**Solución**

Como hemos visto en el problema 10.4 y posteriores, el campo que produce la lámina indefinida es,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 K}{2} \mathbf{u}_x \quad ; \quad y > 0$$

Para calcular la fuerza aplicamos  $\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}$

*Tramo 1*

Segmento paralelo al plano,  $\mathbf{l} = a \mathbf{u}_z$ .

$$\mathbf{F}_1 = I a (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x) \left( -\frac{\mu_0 K}{2} \right) = -\frac{I a \mu_0 K}{2} \mathbf{u}_y$$

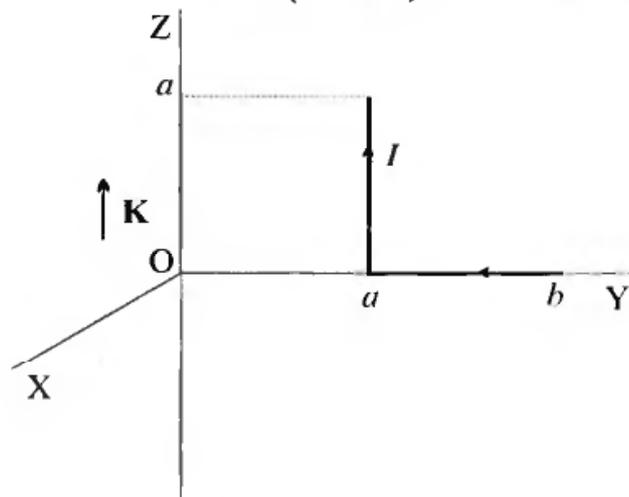


Figura P10.9

*Tramo 2*

Segmento perpendicular al plano,  $\mathbf{l} = (b - a) \mathbf{u}_y$ . Aplicando  $b = 2a$ ,  $\mathbf{l} = a \mathbf{u}_y$ . Y dado que la corriente tiene el sentido de  $-\mathbf{u}_y$  la fuerza será,

$$\mathbf{F}_2 = -I a (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x) \left( -\frac{\mu_0 K}{2} \right) = -\frac{I a \mu_0 K}{2} \mathbf{u}_z$$

La fuerza total sobre el conductor doblado es,

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\frac{I a \mu_0 K}{2} (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)$$

**PROBLEMA 10.10**

Por un cilindro indefinido, de radio  $a$  y eje  $Z$ , véase la figura P10.10, circula una densidad de corriente

$$\mathbf{J} = J_0 [1 - \exp(-\rho/a)] \mathbf{u}_z$$

Calcular el campo magnético creado por la citada corriente cuando  $\rho \leq a$  y para  $\rho > a$ .

### Solución

Para encontrar el campo, dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente aplicamos el teorema de Ampère.

Por simetría  $\mathbf{B}$  es paralelo a  $\mathbf{u}_\varphi$  ( $\mathbf{B} \parallel \mathbf{u}_\varphi$ ).

Distinguiremos dos zonas, una para  $\rho > a$  y la otra cuando  $\rho < a$ .

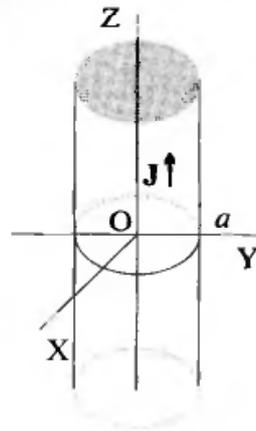


Figura P10.10

Zona exterior,  $\rho > a$ .

La forma general del teorema de Ampère es,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

donde  $C$  es una circunferencia en la que  $\mathbf{B}$  es paralelo a  $d\mathbf{l}$  en todos los puntos. Por tanto,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B$$

Calculamos  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ , con  $d\mathbf{s} = 2\pi\rho d\rho \mathbf{u}_z$ ; la integral se extiende a la sección circular total del cilindro.

Sustituyendo  $\mathbf{J}$  y operando,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi J_o \int_0^a (1 - \exp(-\rho/a)) \rho d\rho = 2\pi J_o \left( \frac{a^2}{2} - \int_0^a \exp(-\rho/a) \rho d\rho \right)$$

La integral de la exponencial entre 0 y  $a$  tiene el siguiente valor,

$$\int_0^a \exp(-\rho/a) \rho d\rho = a^2 \left( 1 - \frac{2}{e} \right)$$

Operando,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \pi a^2 J_o \left( \frac{4}{e} - 1 \right)$$

Despejando  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi = \mu_0 \frac{a^2 J_0}{2\rho} \left( \frac{4}{e} - 1 \right) \mathbf{u}_\varphi$$

Zona interior,  $\rho \leq a$

La circulación del vector  $\mathbf{B}$  tiene la misma expresión, ahora para un circuito con  $\rho < a$ ,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B$$

La corriente total encerrada por este nuevo circuito vale ahora,

$$I' = 2\pi J_0 \int_0^\rho (1 - \exp(-\rho'/a)) \rho' d\rho' = 2\pi J_0 \left( \frac{\rho^2}{2} - \int_0^\rho \exp(-\rho'/a) \rho' d\rho' \right)$$

La integral de la exponencial entre 0 y  $\rho$  tiene el siguiente valor,

$$\int_0^\rho \exp(-\rho'/a) \rho' d\rho' = a^2 (1 - (1 + \rho/a) \exp(-\rho/a))$$

Sustituyendo y operando,

$$I' = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi J_0 \left\{ \frac{\rho^2}{2} - a^2 (1 - (1 + \rho/a) \exp(-\rho/a)) \right\}$$

El campo magnético en la zona interior al cilindro ( $\rho \leq a$ ) será,

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0}{\rho} \left\{ \frac{\rho^2}{2} - a^2 (1 - (1 + \rho/a) \exp(-\rho/a)) \right\} \mathbf{u}_\varphi$$

**PROBLEMA 10.11**

Por dos conductores indefinidos, cuyas secciones transversales respectivas se muestran en la figura P10.11.1, circulan las siguientes densidades de corriente: Sección del círculo de radio  $R$  AMBO  $\mathbf{J}_1 = J \mathbf{u}_x$ . Sección ANBO'  $\mathbf{J}_2 = -J \mathbf{u}_x$ .

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el segmento  $OO'$ .

**Solución**

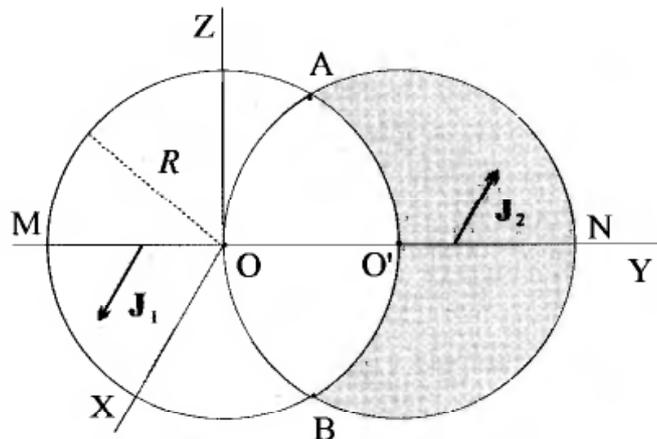


Figura P10.11.1

El sistema diseñado, aplicando el principio de superposición, se comporta como dos distribuciones de corriente  $\mathbf{J}_1$  y  $\mathbf{J}_2$  que circulan respectivamente sobre todo el volumen del cilindro correspondiente;  $\mathbf{J}_1$  sobre el cilindro de radio  $R$  y centro en  $O$  y  $\mathbf{J}_2$  sobre cilindro del mismo radio y centro en  $O'$ .

Calculamos  $\mathbf{B}$  en el segmento  $OO'$  aplicando el teorema de Ampère y el principio de superposición.

El valor de  $B$  en  $OO'$  debido a  $\mathbf{J}_1$  es:

$$\oint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_{\varphi 1} = \mu_o J \pi \rho^2 \rightarrow B_{\varphi 1} = \frac{1}{2}\mu_o J \rho$$

Dada la dirección y sentido de  $\mathbf{J}_1$ , sobre el eje  $Y$  el vector unitario  $\mathbf{u}_{\varphi}$  es igual a  $\mathbf{u}_z$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_o J \rho \mathbf{u}_z$$

El campo  $\mathbf{B}_2$  correspondiente a  $\mathbf{J}_2$  se obtiene aplicando el mismo procedimiento del caso anterior. Ahora, teniendo en cuenta el sentido de la corriente  $\mathbf{J}_2$ , que el centro es  $O'$  y el radio desde  $O'$  es  $\rho'$ , será:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_o J \rho' \mathbf{u}_z$$

Dado que  $\rho + \rho' = R$  en cualquier punto del segmento  $OO'$ , el campo magnético total será:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_o J (\rho + \rho') \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mu_o J R \mathbf{u}_z$$

Se puede demostrar que el campo magnético  $\mathbf{B}$  en todo el hueco del sistema por donde no pasa corriente es uniforme e igual a  $\mathbf{B}$ .

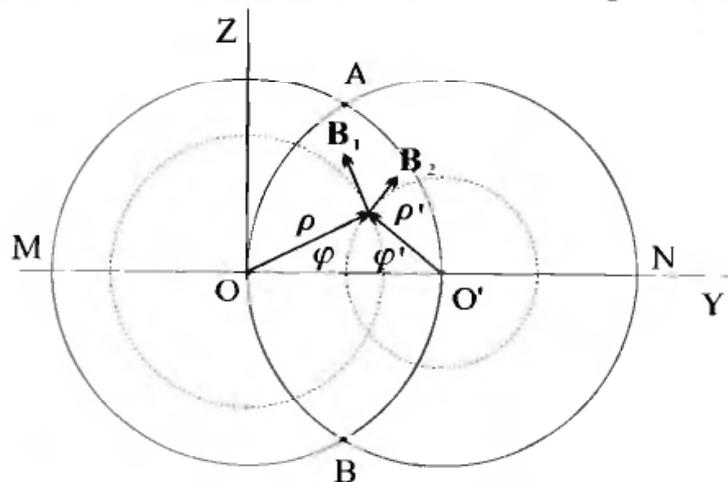


Figura P10.11.2

Si nos fijamos en la figura P10.11.2, las componentes son:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{1}{2}\mu_o J \rho \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_y + \frac{1}{2}\mu_o J \rho \cos \varphi \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_o J \rho' \operatorname{sen} \varphi' \mathbf{u}_y + \frac{1}{2}\mu_o J \rho' \cos \varphi' \mathbf{u}_z$$

en la misma figura podemos ver que,

$$\rho \cos \varphi + \rho' \cos \varphi' = R \quad \text{y} \quad \rho \operatorname{sen} \varphi = \rho' \operatorname{sen} \varphi'$$

En consecuencia, la suma de los dos valores será:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_o J R \mathbf{u}_z$$

que es el valor calculado antes.

### PROBLEMA 10.12

Un sistema de conductores, indefinido en la dirección del eje X, tiene una sección transversal como la indicada en la figura P10.12. Por el conductor con la sección rayada horizontalmente circula una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J} = J_o \mathbf{u}_x$ . Por el que tiene la sección rayada verticalmente la corriente es  $\mathbf{J}' = -2 J_o \mathbf{u}_x$ . Calcular el campo magnético B en el punto  $P = (0, R, 0)$ .

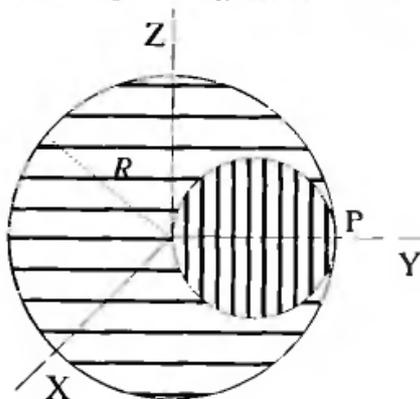


Figura P10.12

### Solución

Aplicando el principio de superposición el sistema dado es equivalente a:

1) Un conductor cilíndrico indefinido en la dirección del eje X, de radio  $R$ , centrado en  $(0, 0, 0)$  y por el que pasa una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J}_1 = J_o \mathbf{u}_x$ . 2) Un conductor cilíndrico indefinido en la dirección del eje X, de radio  $R/2$ , centrado en  $(0, R/2, 0)$  y por el que pasa una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J}_2 = -3 J_o \mathbf{u}_x$ .

La contribución de cada corriente al campo magnético en el punto  $P(0, R, 0)$  se puede calcular mediante el teorema de Ampere,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

eligiendo apropiadamente el circuito de integración que pase por P.

1) Conductor de sección circular, de radio  $R$  y centrado en  $(0, 0, 0)$ .

La corriente total que atraviesa el conductor es,

$$I_1 = \int \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{s} = J_o \pi R^2$$

Sobre el camino de integración de radio  $R$  y centro  $(0, 0, 0)$ , y dada la simetría cilíndrica del sistema,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_1 \mathbf{u}_\varphi \cdot R d\varphi \mathbf{u}_\varphi = B_1 2\pi R$$

aplicando el teorema tenemos la siguiente relación,

$$B_1 2\pi R = J_o \pi R^2$$

despejando  $B_1$  resulta que,

$$B_1 = \frac{1}{2} \mu_o J_o R$$

En el punto P, según la regla del tornillo destrorsum, la dirección del campo es tal que  $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_z$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_o J_o R \mathbf{u}_z$$

2) Siguiendo el procedimiento del caso anterior, elegimos ahora un conductor de sección circular, de radio  $R/2$ , centrado en  $(0, R/2, 0)$ . Ahora la corriente total que atraviesa el círculo es,

$$I_2 = \int \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{s} = -3J_o \pi (R/2)^2 = -\frac{3}{4} J_o \pi R^2$$

y

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_2 \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{u}_\varphi \frac{R}{2} d\varphi = B_2 2\pi \frac{R}{2} = B_2 \pi R$$

de donde,

$$B_2 \pi R = -\frac{3}{4} J_o \pi R^2$$

Aplicando la regla del tornillo, el campo magnético creado en este caso será,

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{3}{4} \mu_o J_o R \mathbf{u}_z$$

El campo total se obtiene sumando las dos contribuciones, por tanto es:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = -\frac{1}{4} \mu_o J_o R \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 10.13

Por un conductor indefinido en la dirección del eje Z y sección transversal como muestra la figura P10.13, circula una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J} = J \mathbf{u}_z$ .

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en los puntos  $(a/2, 0, 0)$  y  $(2a, 0, 0)$ .

### Solución

Resolvemos el problema aplicando el teorema de Ampère y el principio de superposición.

El sistema de corrientes equivalente al propuesto es el siguiente:

- 1) Cilindro indefinido de radio  $a$  y eje  $Z$  centrado en  $(0, 0, 0)$ , por el que circula una corriente  $J\mathbf{u}_z$ .
- 2) Cilindro indefinido de radio  $a/2$  y eje en la dirección de  $Z$ , centrado en  $(a/2, 0, 0)$ , por el que circula una corriente  $-J\mathbf{u}_z$ .
- 3) Cilindro indefinido de radio  $a/2$  y eje en la dirección de  $Z$ , centrado en  $(-a/2, 0, 0)$ , por el que circula una corriente  $-J\mathbf{u}_z$ .

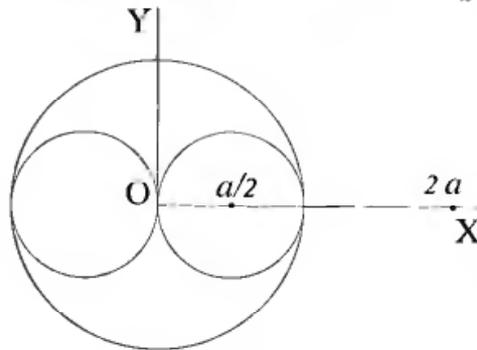


Figura P10.13

Puesto que se trata de conductores prácticamente infinitos en la dirección del eje  $Z$ , podemos aplicar la ley de Ampère a cada una de estas distribuciones parciales para obtener el campo:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Donde  $C$  es la circunferencia de centro coincidente con el de la distribución considerada, y de radio tal que pase por el punto en el que se desea calcular el campo.  $S$  es el área limitada por el camino  $C$ .

Dada la simetría cilíndrica de la corriente  $\mathbf{B}$  es paralelo a  $d\mathbf{l}$  ( $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{l}$ ) y  $\mathbf{J}$  a  $d\mathbf{s}$  ( $\mathbf{J} \parallel d\mathbf{s}$ ). La dirección de  $\mathbf{B}$  es perpendicular a la corriente y al vector de posición, que en los casos propuestos corresponden respectivamente a  $\mathbf{u}_z$  y  $\mathbf{u}_\rho$ , por tanto la dirección de  $\mathbf{B}$  coincide con la de  $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho$ , donde  $\mathbf{u}_\rho$  es el vector unitario radial con respecto al eje de la distribución considerada. El signo de  $\mathbf{u}_z$  depende del sentido de la corriente.

1) Punto  $(a/2, 0, 0)$

#### Distribución 1

El punto considerado es *interior* a la distribución. Aplicando el teorema de Ampère,

$$B_1 2\pi(a/2) = \mu_0 J \pi(a/2)^2$$

En dicho punto

$$\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x$$

El sentido de la corriente es el de  $\mathbf{u}_z$ , por tanto el campo magnético será,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o J (a/2)^2}{2(a/2)} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x) = \frac{\mu_o J a}{4} \mathbf{u}_y$$

### Distribución 2

El punto donde se desea calcular el campo coincide con el centro de la distribución, por tanto:

$$\mathbf{B}_2 = 0$$

### Distribución 3

Procedemos como en la distribución 1,

$$B_3 2\pi(a/2 + a/2) = \mu_o J \pi(a/2)^2$$

El sentido de la corriente es el de  $-\mathbf{u}_z$  y en este caso  $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x$ , en consecuencia,

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o J (a/2)^2}{2a} (-\mathbf{u}_z) \times \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_o J a}{8} \mathbf{u}_y$$

El campo magnético debido a la distribución de corriente en el punto  $(a/2, 0, 0)$  es:

$$\mathbf{B}(a/2, 0, 0) = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o J a}{8} \mathbf{u}_y$$

2) Punto  $(2a, 0, 0)$

Ahora este punto es exterior a todas las distribuciones

### Distribución 1

$$B'_1 2\pi(2a) = \mu_o J \pi a^2 ; \mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}'_1 = \frac{\mu_o J a^2}{4a} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x) = \frac{\mu_o J a}{4} \mathbf{u}_y$$

### Distribución 2

$$B'_2 2\pi(2a - a/2) = \mu_o J \pi(a/2)^2 ; \mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}'_2 = \frac{\mu_o J (a/2)^2}{2(3a/2)} (-\mathbf{u}_z) \times \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_o J a}{12} \mathbf{u}_y$$

### Distribución 3

$$B'_3 2\pi(2a + a/2) = \mu_o J \pi(a/2)^2 ; \mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}'_3 = \frac{\mu_o J (a/2)^2}{2(5a/2)} (-\mathbf{u}_z) \times \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_o J a}{20} \mathbf{u}_y$$

El campo debido a la distribución propuesta en el punto  $(2a, 0, 0)$  es:

$$\mathbf{B}'(2a, 0, 0) = \mathbf{B}'_1 + \mathbf{B}'_2 + \mathbf{B}'_3 = \frac{7}{60} \mu_o J a \mathbf{u}_y$$

## PROBLEMA 10.14

Una placa conductora de espesor  $e$ , prácticamente indefinida en las direcciones  $X$  y  $Z$ , posee un hueco cilíndrico de radio  $c/2$  y eje coincidente con el  $X$  (véase la figura P10.14.1). Por la placa, salvo el hueco, circula una densidad de corriente  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{u}_x$ .

Calcular el campo magnético creado en el punto  $P$  situado sobre el eje  $Y$  a una distancia  $d$  del origen de coordenadas.

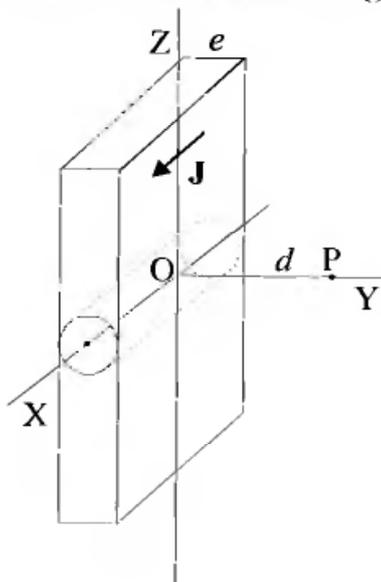


Figura P10.14.1

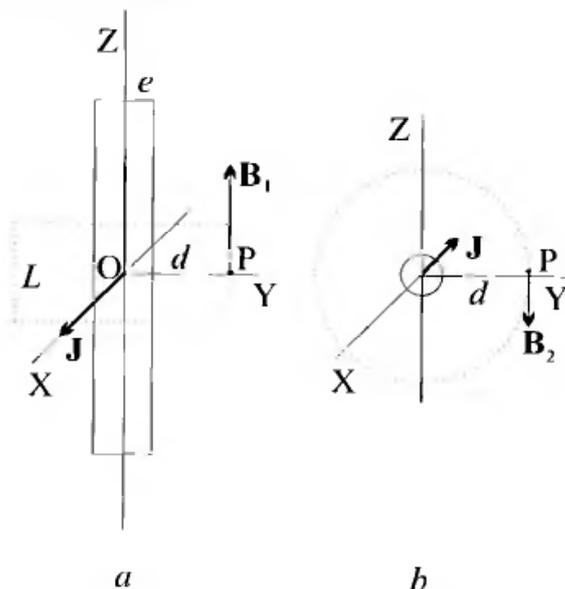


Figura P10.14.2

## Solución

Aplicamos el principio de superposición lineal, y en consecuencia el sistema se comporta como una placa indefinida, como muestra la figura P10.14.2a más un cilindro cuya sección transversal se muestra en la figura P10.14.2b por el que circula una corriente  $\mathbf{J}$  en sentido contrario.

Para calcular el campo magnético debido a la placa indefinida, aplicamos el teorema de Ampère sobre el rectángulo que pasa por  $P$ . Como la placa es indefinida, considerando los resultados obtenidos en el problema 10.4,  $\mathbf{B}_1$  es uniforme e igual a  $B_1 \mathbf{u}_z$  en la parte derecha de la placa, y del mismo módulo pero de sentido contrario en la parte izquierda, por tanto,

$$2LB_1 = \mu_0 J e L \rightarrow \mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 e J \mathbf{u}_z$$

Calculamos la aportación del cilindro mediante la aplicación del teorema de Ampère sobre la circunferencia de radio  $d$  indicada en la figura P10.14.2b.

$$2\pi d B_2 = \mu_0 \pi \left(\frac{e}{2}\right)^2 J$$

En el punto  $P$ ,

$$\mathbf{B}_2 = -\mu_0 \frac{e^2}{8d} J \mathbf{u}_z$$

Sumando las dos aportaciones tendremos el campo magnético en el punto P,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 e J \left(1 - \frac{e}{4d}\right) \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 10.15

Por una espira circular, situada en el plano XY, de radio  $R = 2$  cm y centro en el origen de coordenadas, pasa un corriente  $I = 2$  A.

1) Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en un punto del eje Z.

2) Aplicando las ecuaciones  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  y  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , calcular, en el punto  $(0, 0, 20$  cm), el radio del entorno del eje Z de forma que la variación de la componentes  $B_z$  sea el 2 % de su valor en el citado punto.

3) Comprobar la influencia de la posición sobre el eje Z repitiendo los cálculos en los punto  $(0, 0, 10$  cm) y  $(0, 0, 30$  cm).

### Solución

1) Como vimos en el problema 9.3, el campo magnético debido a una espira circular en el punto  $(0, 0, z)$  del eje Z es:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \quad (10.15.1)$$

Sustituyendo los valores de  $\mu_0$ ,  $I$  y  $R$ , obtenemos,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{4 \times 10^{-4}}{(4 \times 10^{-4} + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

2) En los puntos del eje Z la divergencia y el rotacional de  $\mathbf{B}$  son nulos.

Las expresiones para  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  y  $\nabla \times \mathbf{B}$  en coordenadas cilíndricas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\rho + \left( \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\varphi) - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_z$$

Como la corriente tiene la dirección y sentido de  $\mathbf{u}_\varphi$ , el vector  $\mathbf{B}$  es siempre perpendicular a  $\mathbf{u}_\varphi$ , por tanto  $B_\varphi = 0$ . Las componentes del rotacional son nulas, ya que  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ .

Con las condiciones enunciadas, las dos ecuaciones anteriores quedan de la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (10.15.2)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = 0 \quad (10.15.3)$$

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} = 0 \quad (10.15.4)$$

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} = 0 \quad (10.15.5)$$

De las ecuaciones (10.15.3) y (10.15.4) se deduce en primer lugar que  $B_z$  y  $B_\rho$  no dependen de  $\varphi$ .

Derivamos la ecuación (10.15.1) con respecto a  $z$  y sustituimos el valor obtenido en la ecuación (10.15.2).

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_o I}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ \frac{\partial B_z}{\partial z} &= -\frac{\mu_o I}{2} \frac{3R^2 z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} = -F(z) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) &= \frac{\mu_o I}{2} \frac{3R^2 z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} = F(z) \end{aligned}$$

Integrando la última ecuación se obtiene  $B_\rho$ .

$$d(\rho B_\rho) = \rho F(z) d\rho \rightarrow B_\rho = \frac{1}{2} \rho F(z) + \frac{C}{\rho}$$

Las condiciones para determinar la constante de integración  $C$  son:

Para  $\rho = 0$   $B_\rho = 0$ , por tanto  $C = 0$ . La componente  $B_\rho$  será,

$$B_\rho = \frac{\mu_o I}{4} \frac{3R^2 z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \rho$$

Mediante el valor de  $B_\rho$  obtenido y la ecuación (10.15.5) podemos calcular  $B_z$  en puntos próximos al eje  $Z$ .

$$\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \frac{\partial B_\rho}{\partial z} = \frac{\mu_o I}{4} \frac{3R^2 \rho}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \left( 1 - \frac{5z^2}{(R^2 + z^2)} \right)$$

La integración de la ecuación anterior con respecto a  $\rho$  nos permite calcular  $B_z$  en puntos próximos al eje  $Z$ .

$$B_z = \frac{\mu_o I}{8} \frac{3R^2 \rho^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \left( 1 - \frac{5z^2}{(R^2 + z^2)} \right) + D$$

La constante de integración  $D$  se calcula teniendo en cuenta las condiciones en  $\rho = 0$ .

Para  $\rho = 0$ ,  $B_z = B_z(0, z)$ , valor dado por la ecuación (10.15.1), de donde se deduce  $D$ ,

$$B_z = \frac{\mu_o I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = D$$

Sustituyendo  $D$  en la ecuación anterior, obtenemos  $B_z(\rho, z)$ .

La variación que experimenta  $B_z$  cuando nos desplazamos una distancia  $\rho$  del eje será:

$$\Delta B_z = B_z(0, z) - B_z(\rho, z) = D - B_z(\rho, z)$$

$$\Delta B_z = \frac{\mu_o I}{8} \frac{3R^2 \rho^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \left( \frac{5z^2}{(R^2 + z^2)} - 1 \right)$$

$$\frac{\Delta B_z}{B_z(0, z)} = \frac{3}{4} \frac{\rho^2}{(R^2 + z^2)} \left( \frac{5z^2}{(R^2 + z^2)} - 1 \right)$$

En el caso de que la variación relativa anterior sea 0,02, el valor de  $\rho$  que le corresponde será:

$$\rho^2 = \left( \frac{4}{3} \frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^2 - R^2} 2 \times 10^{-2} \right) \rightarrow \rho = \left( \frac{8}{3} \frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^2 - R^2} 10^{-2} \right)^{1/2}$$

Con los datos del problema:  $R = 0,02$  m, y  $z = 0,2$  m,

$$\rho \simeq 1,65 \times 10^{-2} \text{ m}$$

3)

Utilizando la expresión anterior, calculamos los valores de  $\rho$  cuando  $z = 10$  cm. y  $z = 30$  cm.

$$\text{Para } z = 0,1 \text{ m} \rightarrow \rho \simeq 8,53 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{Para } z = 0,3 \text{ m} \rightarrow \rho \simeq 2,46 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Cuando  $2z < R$  se toma  $\Delta B_z = B_z(\rho, z) - B_z(0, z)$ .

Cuando  $2z = R$ ,

$$\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = 0$$

en los puntos próximos al eje Z.

### PROBLEMA 10.16

Un conductor tubular indefinido, cuyo radio interior es  $a$  y exterior  $b$  ( $b = 2a$ ), tiene un orificio cilíndrico indefinido de radio  $c$  ( $a = 4c$ ) y eje paralelo

al tubo, véase la sección transversal en la figura P10.16(1). Por el conductor circula una corriente  $I$  distribuida uniformemente.

1) Calcular el vector  $\mathbf{B}$  en el interior del cilindro de radio  $c$ .

2) Calcular  $\mathbf{B}$  sobre el eje X, siendo  $OX = \rho = x > b$ .

### Solución

1)  $\mathbf{B}$  en el interior del cilindro

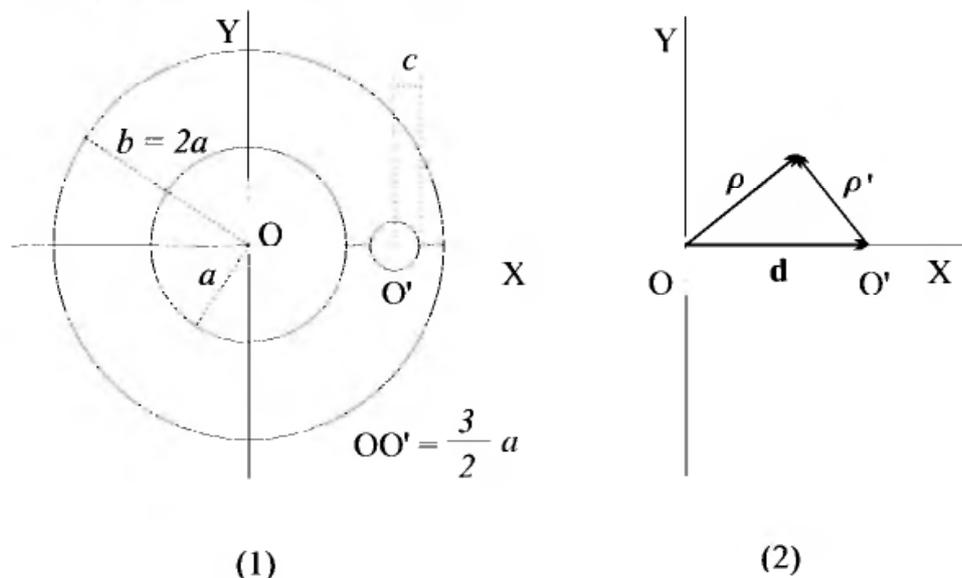


Figura P10.16

El cálculo se hace aplicando el teorema de Ampère y el principio de superposición a tres corrientes cilíndricas uniformes. Una sobre el cilindro de radio  $b$  con dirección y sentido de  $\mathbf{u}_z$ ; otra sobre el cilindro de radio  $c$  y centro en  $O'$ , cuya dirección y sentido sea  $-\mathbf{u}_z$  y la tercera sobre el cilindro de radio  $a$  y centro en  $O$  en la dirección y sentido de  $-\mathbf{u}_z$ .

Como se indica en la figura P10.16(2), en los cilindros de centro en  $O$  se toma la distancia  $\rho$  y en el de centro en  $O'$  se toma  $\rho'$ .

La densidad de corriente para los tres cilindros es,

$$J = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2 - c^2)} = \frac{I}{\pi 47 c^2}$$

Aplicando el teorema de Ampère obtenemos los valores de los campos magnéticos debidos a las corrientes sobre cada cilindro.

**Campo magnético debido al cilindro de radio  $b$**

$$2\pi\rho B_{\varphi 1} = \mu_0 J \pi \rho^2 \rightarrow B_{\varphi 1} = \frac{1}{2} \mu_0 J \rho$$

Sobre el eje X  $\mathbf{u}_{\varphi} = \pm \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_{\rho}$ ; el signo de  $\mathbf{u}_z$  depende del sentido de la corriente en el cilindro considerado.

En este caso  $\mathbf{u}_{\varphi} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_{\rho}$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_o J \rho (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho) = \frac{1}{2}\mu_o J (\mathbf{u}_z \times \rho)$$

**Campo magnético debido al cilindro de radio  $a$**

Operando de forma análoga al caso anterior y teniendo en cuenta que  $\rho > a$ , tenemos que,

$$2\pi\rho B_{\varphi 2} = \mu_o J \pi a^2 \rightarrow B_{\varphi 2} = \frac{1}{2}\mu_o J \frac{a^2}{\rho}$$

Ahora, dado que el sentido de la corriente es hacia  $z < 0$ ,  $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{1}{2}\mu_o J \frac{a^2}{\rho} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho)$$

**Campo magnético debido al cilindro de radio  $c$  y centro en  $O'$**

El punto está en el interior del cilindro de radio  $c$ , en consecuencia,

$$2\pi\rho' B_{\varphi 3} = \mu_o J \pi \rho'^2 \rightarrow B_{\varphi 3} = \frac{1}{2}\mu_o J \rho'$$

Aquí, dado el sentido de la corriente y el cambio de origen  $\mathbf{u}'_\varphi = -\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}'_\rho$ , donde  $\mathbf{u}'_\rho$  es el vector unitario radial con centro en  $O'$ . El campo será,

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{1}{2}\mu_o J \rho' \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}'_\rho = -\frac{1}{2}\mu_o J (\mathbf{u}_z \times \rho')$$

Nos interesa encontrar el valor total  $\mathbf{B}$  en función de la distancia  $\rho$  al centro  $O$ . Para esto, si observamos la figura P10.16(2), podemos comprobar que,

$$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{d} = \rho - \rho' = \rho \mathbf{u}_\rho - \rho' \mathbf{u}'_\rho \quad ; \quad |\mathbf{d}| = \frac{3}{2}a = 6c$$

La suma de los tres valores obtenidos anteriormente nos lleva a,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3) = \frac{1}{2}\mu_o J \left( -\frac{a^2}{\rho} \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho + \mathbf{u}_z \times \mathbf{d} \right)$$

2) *Campo  $\mathbf{B}$  sobre el eje  $X$*

En este caso se procede de forma similar al anterior, pero ahora todos los campos se calculan fuera de la distribución de corriente, es decir,

$$2\pi\rho B'_{\varphi 1} = \mu_o J \pi b^2 \rightarrow \mathbf{B}'_1 = \frac{1}{2}\mu_o J \frac{b^2}{\rho} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho)$$

$$2\pi\rho B'_{\varphi 2} = \mu_o J \pi a^2 \rightarrow \mathbf{B}'_2 = -\frac{1}{2}\mu_o J \frac{a^2}{\rho} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho)$$

$$2\pi\rho' B'_{\varphi 2} = \mu_o J \pi c^2 \rightarrow \mathbf{B}'_3 = -\frac{1}{2}\mu_o J \frac{c^2}{\rho'} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}'_\rho)$$

El campo magnético total  $\mathbf{B}'$  será:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_1 + \mathbf{B}'_2 + \mathbf{B}'_3 = \frac{1}{2}\mu_o J \left( \frac{b^2 - a^2}{\rho} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho) - \frac{c^2}{\rho'} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}'_\rho) \right)$$

Como sobre el eje X

$$\rho = x ; \rho' = x - d = x - 6c ; \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_y ; \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}'_\rho = \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo  $a$ ,  $b$  y  $d$  en función de  $c$ , teniendo en cuenta las relaciones anteriores y que  $J = I/(\pi 47c^2)$ , queda,

$$\mathbf{B}' = \mu_o \frac{I}{94\pi c^2} \left( \frac{64c^2 - 16c^2}{x} \mathbf{u}_y - \frac{c^2}{x - 6c} \mathbf{u}_y \right)$$

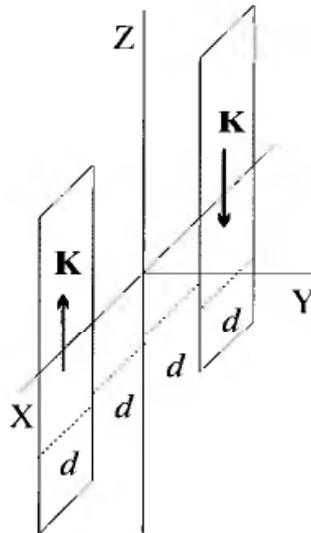
$$\mathbf{B}' = \mu_o \frac{I}{94\pi} \left( \frac{48}{x} - \frac{1}{x - 6c} \right) \mathbf{u}_y$$

**PROBLEMA 10.17**

Calcular el potencial vector magnético en puntos del eje Y debido a la distribución de corriente superficial que muestra la figura P10.17.

Indefinida sobre el eje Z y con,

$$\mathbf{K} = K\mathbf{u}_z \text{ para } \begin{cases} y = 0 \\ d \leq x \leq 2d \end{cases} ; \quad \mathbf{K} = -K\mathbf{u}_z \text{ para } \begin{cases} y = 0 \\ -d \leq -x \leq -2d \end{cases}$$



**Figura P10.17**

**Solución**

Aplicamos la ecuación (10.20) para el caso de corrientes superficiales, que es la siguiente:

$$\mathbf{A}(y) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Para la distribución dada,  $ds' = dx' dz'$ . Los límites de integración son  $d$  y  $2d$  para  $x'$ ,  $-z'$  y  $z'$  en el caso de la variable  $z'$  o  $0$  y  $z'$  multiplicando la integral por 2.  $\mathbf{A}(y)$  es de la forma,

$$\mathbf{A}(y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_d^{2d} dx' \left( 2 \int_0^{z'} \frac{K \mathbf{u}_z dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} - 2 \int_0^{z'} \frac{K \mathbf{u}_z dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|} \right) \right\}$$

Los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'_1$  y  $\mathbf{r}'_2$  son:

$$\mathbf{r} = y \mathbf{u}_y; \quad \mathbf{r}'_1 = x' \mathbf{u}_x + z' \mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}'_2 = -x' \mathbf{u}_x + z' \mathbf{u}_z$$

Dada la simetría de la distribución con respecto al eje Y,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| = (x'^2 + y^2 + z'^2)^{1/2}$$

Como el denominador de las dos integrales que figuran en el interior del paréntesis pequeño es igual, las dos tienen el mismo valor, en consecuencia su diferencia es nula, es decir,

$$\mathbf{A}(y) = 0$$

Dada la simetría de la distribución, el potencial vector magnético es nulo sobre el eje Y. Esto no quiere decir que sea nulo el vector  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , ya que la derivadas de  $\mathbf{A}$  no son todas nulas.

### PROBLEMA 10.18

Dada la distribución superficial de corriente sobre el plano XZ indicada en la figura P10.18, con

$$\mathbf{K} = K \frac{r}{|r|} \mathbf{u}_z$$

- 1) Calcular el potencial vector magnético en puntos del eje Y ( $y > 0$ ).
- 2) Calcular el potencial vector en puntos del plano XY.

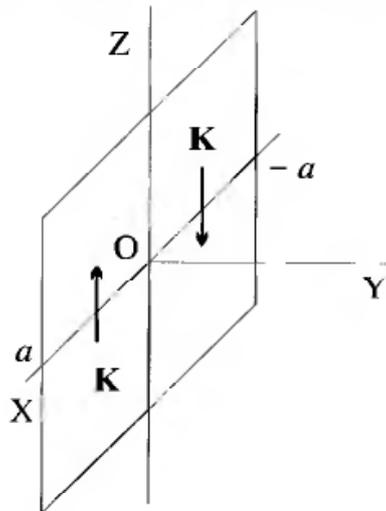


Figura P10.18

**Solución**1) *Potencial vector sobre el eje Y*

Este problema se plantea de forma similar al 10.17. Ahora se toman dos franjas simétricas con respecto al eje Z de anchura  $dx'$ . Los límites de integración para la variable  $x'$  son entre 0 y  $a$ . Los de la variable  $z'$  son de 0 a  $\infty$ , multiplicando por 2 la integral. El potencial vector magnético se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{A}(y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_0^a dx' \left( 2 \int_0^{z'} \frac{K \mathbf{u}_z dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} - 2 \int_0^{z'} \frac{K \mathbf{u}_z dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|} \right) \right\}$$

Los vectores de posición son:

$$\mathbf{r} = y \mathbf{u}_y; \quad \mathbf{r}'_1 = x' \mathbf{u}_x + z' \mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}'_2 = -x' \mathbf{u}_x + z' \mathbf{u}_z$$

Dada la simetría de la distribución con respecto al eje Y,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| = (x'^2 + y^2 + z'^2)^{1/2}$$

La dos integrales entre el paréntesis ( ) curvado son iguales, por tanto el potencial vector  $\mathbf{A}(y)$  es nulo sobre el eje Y.

2) *Potencial vector en puntos del plano XY*

Para calcular el potencial vector en el plano XY, se utiliza la misma expresión y los mismos valores de  $\mathbf{r}'_1$  y  $\mathbf{r}'_2$ . En este caso cambia el vector de posición  $\mathbf{r}$  y las distancias desde el punto determinado por  $\mathbf{r}$  y las fuentes, que son,

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| = ((x - x')^2 + y^2 + z'^2)^{1/2} = (\rho_1^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| = ((x + x')^2 + y^2 + z'^2)^{1/2} = (\rho_2^2 + z'^2)^{1/2}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión inicial obtenemos,

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_0^a K dx' \left( 2 \int_0^z \frac{dz'}{(\rho_1^2 + z'^2)^{1/2}} - 2 \int_0^z \frac{dz'}{(\rho_2^2 + z'^2)^{1/2}} \right) \right\} \mathbf{u}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a K dx' \left\{ \left[ \ln \left( z' + (\rho_1^2 + z'^2)^{1/2} \right) \right]_0^z \right. \\ &\quad \left. - \left[ \ln \left( z' + (\rho_2^2 + z'^2)^{1/2} \right) \right]_0^z \right\} \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a K dx' \left\{ \ln \left( \frac{z + (\rho_1^2 + z^2)^{1/2}}{z + (\rho_2^2 + z^2)^{1/2}} \right) + \ln \left( \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \right)^{1/2} \right\} \mathbf{u}_z$$

Tomando el límite de la función a la que se aplica el logaritmo cuando  $z$  tiende a  $\infty$ , y simplificando el segundo término con logaritmos queda,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left( \ln \left( \frac{z + (\rho_1^2 + z^2)^{1/2}}{z + (\rho_2^2 + z^2)^{1/2}} \right) \right) = 0$$

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{\mu_o K}{4\pi} \int_0^a dx' \ln \left( \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \right) \mathbf{u}_z = \frac{\mu_o K}{4\pi} \int_0^a \ln \left( \frac{(x+x')^2 + y^2}{(x-x')^2 + y^2} \right) dx' \mathbf{u}_z$$

Descomponiendo el logaritmo del cociente en diferencia de logaritmos, tendremos dos integrales de la forma,

$$\int \ln(u^2 + y^2) du = u \ln(u^2 + y^2) - 2u + 2y \operatorname{arctg}(u/y)$$

una con  $u = x + x'$  y la otra con  $u' = x - x'$ . Con estos cambios de variable, se modifican los límites de integración, de forma que para  $u = x + x'$  los límites son  $x$  y  $(x + a)$ , mientras que para  $u' = x - x'$  son  $x$  y  $(x - a)$ . En el primer caso  $du = dx'$  y en el segundo  $du' = -dx'$ .

En definitiva,

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{\mu_o K}{4\pi} \mathbf{u}_z \left\{ [u \ln(u^2 + y^2) - 2u + 2y \operatorname{arctg}(u/y)]_x^{x+a} + [u' \ln(u'^2 + y^2) - 2u' + 2y \operatorname{arctg}(u'/y)]_x^{x-a} \right\}$$

Realizando operaciones obtenemos la expresión final del potencial vector en el plano XY, que es:

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{\mu_o K}{4\pi} \mathbf{u}_z \left\{ 2y \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} + 2y \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} - 4y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right\}$$

Cuando  $x = 0 \rightarrow \mathbf{A}(x, y) = 0$ , que coincide con el resultado de la primera parte.

### PROBLEMA 10.19

Por un cilindro conductor indefinido de radio  $a$ , circula una corriente cuya densidad es:

$$\mathbf{J} = J_o \frac{\rho}{a} \mathbf{u}_z$$

Calcular el potencial vector magnético.

**Ayuda:** Suponer un potencial vector de referencia para  $\rho = a$

### Solución

Para calcular el potencial vector magnético se puede utilizar la ecuación (10.17) o la ecuación (10.18).

Dada la dirección y simetría de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{A}$  sólo tiene componente  $A_z$ , como se puede deducir de la ecuación (10.17). Además con esta simetría  $A_z$  sólo depende del radio y no de las coordenadas  $z$  y  $\varphi$ .

Con las condiciones anteriores, en coordenadas cilíndricas la ecuación diferencial de la componente  $A_z$  es:

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right)$$

Como sólo hay densidad de corriente en  $\rho \leq a$ , la ecuación diferencial en las dos zonas es de la forma siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = -\mu_o J_o \frac{\rho}{a} \quad \text{para } \rho \leq a$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = 0 \quad \text{para } \rho > a$$

La integración de las dos ecuaciones anteriores no permite calcular la componente  $A_z$ .

Cuando  $\rho > a$  la segunda ecuación queda de la forma,

$$\rho \frac{dA_z}{d\rho} = C$$

Mediante una integración tenemos,

$$A_z = C \ln \rho + C'$$

Suponiendo que  $A_z = 0$  en  $\rho = a$ ,

$$C' + C \ln a = 0 \rightarrow C' = -C \ln a$$

y por tanto,

$$A_z = C \ln \frac{\rho}{a} \quad (10.19.1)$$

Para  $\rho \leq a$ , se utiliza la primera ecuación diferencial. Mediante una doble integración se obtiene  $A_z$ .

1ª integración:

$$\rho \frac{dA_z}{d\rho} = -\mu_o J_o \frac{\rho^3}{3a} + D$$

2ª integración:

$$A_z = -\mu_o J_o \frac{\rho^3}{9a} + D \ln \rho + D' \quad (10.19.2)$$

Calculamos las constantes  $C$ ,  $D$  y  $D'$  de la forma siguiente:

1º Por definición  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ; en este problema,

$$\mathbf{B} = -\frac{dA_z}{d\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

El valor de  $\mathbf{B}$  en las dos zonas se calcula aplicando la relación anterior con los respectivos valores dados por las ecuaciones (10.19.1) y (10-19.2):

$$\begin{aligned} \text{Para } \rho > a &\rightarrow \mathbf{B} = -\frac{C}{\rho} \mathbf{u}_\varphi \\ \text{Para } \rho \leq a &\rightarrow \mathbf{B} = \mu_o J_o \frac{\rho^2}{3a} - \frac{D}{\rho} \end{aligned}$$

Como en  $\rho = 0$   $\mathbf{B} \neq \infty$ , ya que  $J(0) = 0$ , se deduce que  $D = 0$ .

Por otra parte las componentes tangenciales de  $\mathbf{B}$  son continuas en  $\rho = a$ , dado que en las dos zonas la permeabilidad es  $\mu_o$  y no hay densidad de corriente superficial sobre el cilindro de radio  $a$ . De esta condición se deduce que.

$$-\frac{C}{a} = \frac{1}{3} \mu_o J_o a \rightarrow C = -\frac{1}{3} \mu_o J_o a^2$$

La constante  $D'$  no influye en el valor de  $\mathbf{B}$ , ya que al derivar se anula, y en consecuencia cualquier valor de la constante  $D'$  daría el mismo resultado para  $\mathbf{B}$ . Se calcula  $D'$  aplicando la continuidad de la componente  $A_z$  en  $\rho = a$ .

$$\begin{aligned} -\mu_o \frac{J_o}{9a} a^3 + D' &= -\frac{1}{3} \mu_o J_o a^2 \left( \ln \frac{a}{a} \right) = 0 \\ D' &= \mu_o \frac{J_o}{9a} a^3 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las constantes calculadas en las ecuaciones (10.19.1) y (10.19.2), queda el potencial vector de la forma,

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{1}{3} \mu_o J_o a^2 \ln \frac{\rho}{a} \quad \text{para } \rho > a \\ A_z &= \mu_o \frac{J_o}{9a} (a^3 - \rho^3) \quad \text{para } \rho \leq a \end{aligned}$$

### PROBLEMA 10.20

Tenemos un solenoide de radio  $a$  y longitud prácticamente indefinida, situado como indica la figura P10.20. Tiene  $n$  espiras por metro y circula por ellas una corriente  $I$ .

Se supone el solenoide ideal, por tanto no existe componente  $B_z$  fuera del solenoide ( $\rho > a$ ) y es uniforme en su interior.

1) Teniendo en cuenta  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , demostrar que existe  $\mathbf{A}$  fuera del solenoide y calcular la variación de la componente  $A_\varphi$  con la distancia al eje.

2) Calcular la circulación de  $\mathbf{A}$  sobre el camino MNPQ indicado en la figura P10.20. ¿Qué conclusiones se deducen del cálculo anterior?

### Solución

1) *Componente del potencial vector magnético*

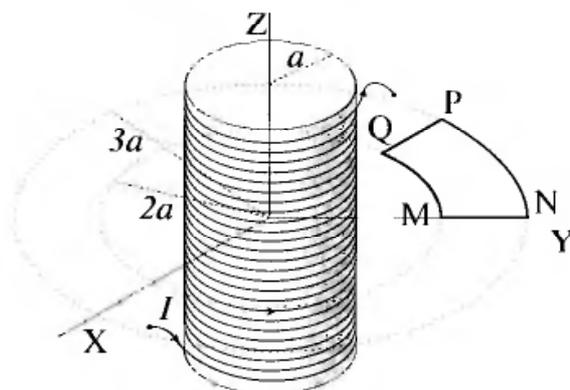
El teorema de Stokes establece que,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

donde  $S$  es la superficie limitada por el contorno  $C$ .

Como  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (10.20.1)$$



**Figura P10.20**

Es decir, la circulación de  $\mathbf{A}$  sobre el contorno  $C$  depende del flujo del vector  $\mathbf{B}$  a través de la superficie  $S$  limitada por  $C$ .

Sólo hay componente  $B_z$  en el interior del solenoide, y esta se demuestra que es  $B_z = \mu_0 n I \mathbf{u}_z$ .

El flujo a través de todo círculo con centro sobre el eje  $Z$  y radio  $\rho > a$  será:

$$\Phi = \int_0^a B_z 2\pi\rho d\rho = B_z \pi a^2 = \mu_0 n I \pi a^2$$

De donde se deduce que,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 n I \pi a^2$$

La relación anterior muestra que  $\mathbf{A}$  es distinto de cero fuera del solenoide, ya que lo es su circulación sobre  $C$ . Es decir, existe  $\mathbf{A}$  en el exterior del solenoide aunque la componente  $B_z$  sea nula en el exterior.

Para calcular la componente  $A_\varphi$  utilizamos la relación anterior y la simetría cilíndrica de la corriente,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} A_\varphi \rho d\varphi = 2\pi\rho A_\varphi = \mu_0 n I \pi a^2$$

Despejando  $A_\varphi$  obtenemos la siguiente relación:

$$A_\varphi = \mu_0 \frac{n I \pi a^2}{2\pi} \frac{1}{\rho}$$

2) *Circulación de A*

Aplicamos la ecuación (10.20.1) deducida anteriormente al camino MNPQ, dado que  $B_z$  es nula, el flujo de  $\mathbf{B}$  será nulo, por tanto,

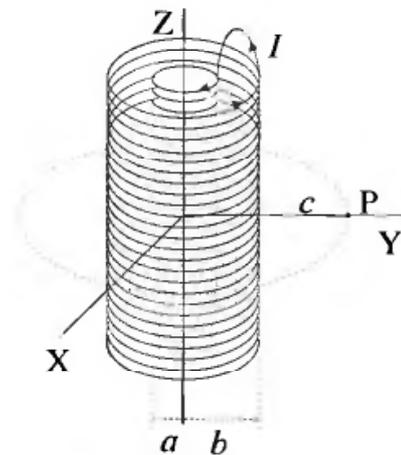
$$\int_{\text{MNPQ}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

En los cálculos realizados se demuestra que en un punto del espacio puede no existir un campo magnético  $\mathbf{B}$  y ser distinto de cero el potencial vector  $\mathbf{A}$ . Por otra parte, siempre que la circulación de  $\mathbf{A}$  es nula lo es  $\mathbf{B}$ , ya que así lo impone la relación que define  $\mathbf{B}$  en función de  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ). En otras palabras,  $\mathbf{B} = 0$  si la circulación de  $\mathbf{A}$  sobre el contorno cerrado es nula.

**PROBLEMA 10.21**

Dos solenoides coaxiales, cuyos radios respectivos son  $a$  y  $b$ , se disponen de forma que su eje común es el Z. El sentido de la corriente  $I$  en las  $n$  espiras por unidad de longitud de cada solenoide se muestra en la figura P10.21. Suponemos dichos solenoides indefinidos en la dirección del eje Z.

Calcular el potencial vector magnético  $\mathbf{A}$  en el punto P situado sobre el eje Y a una distancia  $c$ .



**Figura P10.21**

**Solución**

En un camino cerrado el potencial vector magnético cumple la siguiente condición,

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Es decir, la circulación del vector  $\mathbf{A}$  sobre el camino cerrado  $C$  es igual que el flujo total del campo magnético  $\mathbf{B}$  a través de la superficie limitada por el camino  $C$ .

Dada la simetría cilíndrica del sistema,  $\mathbf{A} = A_\varphi \mathbf{u}_\varphi$ .

En la circunferencia de radio  $c$  se verifica que,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$2\pi c A_\varphi = \Phi_1 + \Phi_2 \rightarrow A_\varphi = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2\pi c}$$

Los flujos magnéticos debidos a los solenoides son,

$$\Phi_1 = \pi b^2 \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_z ; \quad \Phi_2 = \pi a^2 \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}_z$$

El campo dentro de cada solenoide, dado el sentido opuesto de las corrientes, es,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_o n I \mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{B}_2 = -\mu_o n I \mathbf{u}_z$$

Sustituyendo los campos tendremos,

$$\Phi_1 = \pi b^2 \mu_o n I ; \quad \Phi_2 = -\pi a^2 \mu_o n I$$

El flujo total será,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \pi \mu_o n I (b^2 - a^2)$$

El módulo del potencial vector será,

$$A_\varphi = \mu_o n I \frac{(b^2 - a^2)}{2c}$$

En el punto P,

$$\mathbf{A} = \mu_o n I \frac{(b^2 - a^2)}{2c} \mathbf{u}_\varphi = -\mu_o n I \frac{(b^2 - a^2)}{2c} \mathbf{u}_x$$

### PROBLEMA 10.22

Disponemos un conductor de conductividad  $\gamma$  en forma de anillo partido, de espesor  $c$  y radios  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ), siendo la ramura  $G$  de anchura despreciable. En los dos extremos de la ramura se depositan sendas capas metálicas de espesor despreciable y conductividad  $\gamma' \gg \gamma$ . Se conectan dichos extremos a una batería de f.e.m.  $V_o$ . Véase la figura P10.22

Calcular el momento dipolar magnético debido a la corriente que circula por el anillo.

#### Solución

El momento dipolar magnético debido a una distribución de corriente se calcula utilizando la ecuación (10.28).

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} (\mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dv'$$

En nuestro caso  $\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z$  y  $\mathbf{r}' = \rho \mathbf{u}_\rho$ .

Sobre una circunferencia de radio  $\rho$  ( $a \leq \rho \leq b$ ) se calcula  $\mathbf{J}$  teniendo en cuenta la ley de Ohm  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  y, por tanto, tenemos que calcular previamente

el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Por consideraciones de simetría el campo debe ser tangencial y además, dada la situación de la batería, tiene el mismo sentido que el movimiento de las agujas del reloj; es decir  $\mathbf{E} \propto -\mathbf{u}_\varphi$ .

Además, como no hay carga libre,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  lo que significa que  $\mathbf{E}$ , al tener sólo componente tangencial, no depende del ángulo  $\varphi$ .

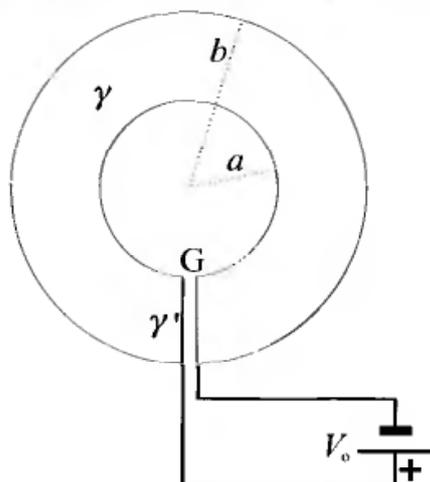


Figura P10.22

Calculamos ahora la integral de línea de  $\mathbf{E}$  sobre cualquier circunferencia que una las dos placas. El resultado tiene que ser igual a  $V_0$ , ya que la conductividad  $\gamma' \gg \gamma$ , se puede suponer que  $V_0$  es el mismo para cualquier radio  $\rho$ . Es decir,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_0$$

$$\int_0^{2\pi} E \rho d\varphi = 2\pi \rho E = V_0$$

por tanto el campo vale

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

y la densidad de corriente será,

$$\mathbf{J} = -\frac{\gamma V_0}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Ahora podemos calcular ya el momento dipolar magnético a través de la fórmula (10.28) indicada anteriormente, donde  $\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z$  y  $dv' = \rho d\rho dz d\varphi$ .

Sustituyendo

$$\mathbf{m} = \frac{\gamma V_0}{4\pi} \int_a^b d\rho \int_0^e dz \int_0^{2\pi} (\rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z) \times (-\mathbf{u}_\varphi) d\varphi$$

Resolvemos primero la integral en  $\varphi$  calculando previamente los productos vectoriales,

$$\rho \mathbf{u}_\rho \times (-\mathbf{u}_\varphi) = -\rho \mathbf{u}_z \quad \text{y} \quad z \mathbf{u}_z \times (-\mathbf{u}_\varphi) = z \mathbf{u}_\rho$$

$$\mathbf{m} = \frac{\gamma V_o}{4\pi} \int_a^b d\rho \int_0^e dz \int_0^{2\pi} (-\rho \mathbf{u}_z + z \mathbf{u}_\rho) d\varphi$$

La integral de la componente  $\mathbf{u}_\rho$  se anula dado que  $\mathbf{u}_\rho(\varphi) = -\mathbf{u}_\rho(\varphi + \pi)$ , es decir cada zona elemental tiene una simétrica donde el sentido de  $\mathbf{u}_\rho$  es opuesto y al integrar se anula dicha componente.

$$\int_0^{2\pi} z \mathbf{u}_\rho d\varphi = 0 \quad ; \quad \int_0^{2\pi} -\rho \mathbf{u}_z d\varphi = -2\pi \rho \mathbf{u}_z$$

Sustituyendo el resultado anterior e integrando en  $\rho$  y  $z$ :

$$\mathbf{m} = -\frac{\gamma V_o}{2} \mathbf{u}_z \int_0^e dz \int_a^b \rho d\rho$$

El momento dipolar magnético debido a la distribución de corriente en el anillo es:

$$\mathbf{m} = -\frac{e\gamma V_o}{4} (b^2 - a^2) \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 10.23

Sobre un disco de radio  $a$  y espesor  $e$  circula una corriente cuya densidad es:

$$\mathbf{J} = J \frac{\rho}{a} \mathbf{u}_\varphi$$

Calcular el momento dipolar magnético  $\mathbf{m}$  debido a la corriente indicada.

#### Solución

De forma análoga al problema anterior calculamos  $\mathbf{m}$  aplicando la ecuación (10.28).

En este caso los distintos vectores y  $dv'$  son:

$$\mathbf{r}' \simeq \rho \mathbf{u}_\rho \quad ; \quad dv' = \rho d\varphi dz d\rho$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{J} = \rho \mathbf{u}_\rho \times J \frac{\rho}{a} \mathbf{u}_\varphi = J \frac{\rho^2}{a} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_z \int_0^e dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a J \frac{\rho^2}{a} \rho d\rho$$

Operando y simplificando obtenemos el momento dipolar magnético,

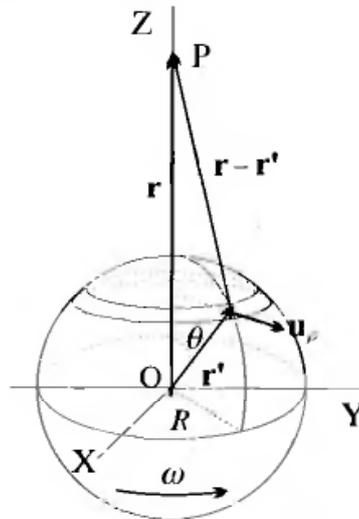
$$\mathbf{m} = \frac{1}{4} \pi e a^3 J \mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 10.24**

Sobre la superficie de una esfera de radio  $R$  se distribuye uniformemente una carga  $Q$ . La esfera gira en torno a un eje que pasa por su centro con velocidad angular  $\omega$ .

1) Calcular el potencial vector magnético en puntos del eje de giro exteriores a la esfera.

2) Calcular, mediante la aproximaciones adecuadas, el potencial vector en puntos alejados de la esfera ( $r \gg R$ ).



**Figura P10.24**

**Solución**

1) *Potencial vector magnético sobre el eje de giro*

El potencial vector magnético debido a una distribución de corriente superficial viene dado por la ecuación,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K} ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

La densidad de corriente  $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$ .

En la figura P10.24 se puede observar que,

$$\mathbf{v} = \omega R \sin \theta \mathbf{u}_\varphi ; \quad ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Sustituyendo estos valores en la integral queda en la forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{u}_\varphi \sigma \omega R \sin \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

El  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  tiene el mismo valor para todas superficies elementales  $ds'$  sobre zona sombreada, por tanto la suma de las componentes vectoriales que tienen lugar en la integración es igual a una constante por la suma de los vectores unitarios  $\mathbf{u}_\varphi$  sobre una circunferencia. Esta suma es nula, pues

$\mathbf{u}_\varphi$  es tangente en cada punto a la citada circunferencia (suma de vectores que comienzan y terminan en un punto).

En consecuencia,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$$

sobre los puntos del eje de giro.

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$  no es nulo en puntos fuera del eje como veremos en la segunda parte del problema.

2) *El potencial vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  fuera del eje*

El potencial vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  fuera del eje, en puntos muy alejados,  $r \gg R$ , se puede calcular considerando la esfera como una espira de momento dipolar magnético  $\mathbf{m}$  situada en el origen. La ecuación (10.30) nos permite obtener  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  si calculamos  $\mathbf{m}$  mediante la ecuación (10.27) modificada para el caso de corrientes superficiales.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{S'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds')$$

Los vectores de la integral son:

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r; \quad \mathbf{K}(\mathbf{r}') = \sigma\omega R \sin\theta \mathbf{u}_\varphi; \quad ds' = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Llevando estos valores a la integral, teniendo en cuenta que los límites de integración para  $\varphi$  son 0 y  $2\pi$  y para  $\theta$ , 0 y  $\pi$ , tenemos,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sigma\omega R^4 \sin\theta (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\varphi) d\theta$$

$$(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\varphi) = -\mathbf{u}_\theta$$

Utilizamos la relación que proporciona las proyecciones del vector unitario  $\mathbf{u}_\theta = \cos\theta \mathbf{u}_\rho - \sin\theta \mathbf{u}_z$  en coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{m} = \pi\sigma\omega R^4 \int_0^\pi \sin^2\theta (-\cos\theta \mathbf{u}_\rho + \sin\theta \mathbf{u}_z) d\theta$$

Al integrar obtenemos como resultado la suma de las proyecciones sobre el eje de giro (eje Z), ya que la suma de las componentes ( $\mathbf{u}_\rho$ ) perpendiculares a dicho eje se anulan por que cada una tiene otra simétrica de sentido opuesto,  $\mathbf{u}_\rho(\varphi) = -\mathbf{u}_\rho(\varphi + \pi)$ . Con estas consideraciones,

$$\mathbf{m} = \pi\sigma\omega R^4 \mathbf{u}_z \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \pi\sigma\omega R^4 \mathbf{u}_z \left[ -\frac{2}{3} \cos\theta - \frac{1}{3} \sin^2\theta \cos\theta \right]_0^\pi$$

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi\sigma\omega R^4 \mathbf{u}_z$$

La carga total sobre la superficie esférica es  $Q$ , por lo que,

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Sustituyendo  $\sigma$  en la ecuación del momento  $\mathbf{m}$  obtendremos.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{3}Q\omega R^2 \mathbf{u}_z$$

El potencial vector, utilizando la ecuación (10.31), es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{12\pi} \frac{Q R^2}{r^3} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{r})$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$  es nulo cuando  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_z$ , es decir, en los puntos sobre el eje de giro, lo que coincide con el resultado obtenido en el apartado 1).

## Capítulo 11

# INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

## 11.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estudiado de forma independiente los campos eléctrico y magnético, de manera que la única relación que podía encontrarse entre ellos se debe a que el campo eléctrico tiene su origen en cargas eléctricas en reposo y el magnético en cargas con movimiento uniforme.

En este capítulo vamos a estudiar la inducción electromagnética, que pone de manifiesto la dependencia entre campo eléctrico y magnético.

### 11.1.1 LEY DE FARADAY

Los experimentos realizados por Faraday en 1831, dieron como resultado que en un circuito se induce una f.e.m.  $\mathcal{E}$  proporcional a la variación del flujo a través de la superficie que limita el circuito. Dicha variación puede ser debida a un cambio del campo magnético  $\mathbf{B}$  con el tiempo o al movimiento o deformación del circuito.

Por otra parte Lenz establecía que la corriente debida a la f.e.m. inducida se opone al cambio de flujo; es decir, la corriente inducida crea un campo magnético que tiende a conservar el flujo. Si disminuye el flujo la corriente inducida crea un campo que se opone a la disminución del flujo. El campo inducido no siempre tiene dirección y sentido apuesto al campo inductor: por ejemplo, si decrece el flujo la corriente inducida crea un campo del mismo sentido para que no disminuya el flujo.

La expresión matemática que resume las dos proposiciones se conoce como ley de Faraday y expresa que la f.e.m. inducida es igual a menos la derivada sustancial (total) del flujo con respecto al tiempo,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11.1)$$

Cuando la variación del flujo está motivada por un desplazamiento del imán o circuito que produce el flujo, esta f.e.m. sólo depende de la velocidad relativa de un componente (circuito) con respecto al otro. La ecuación (11.1) podemos expresarla en función del campo que actúa sobre las cargas en el conductor y del campo magnético  $\mathbf{B}$  que origina el flujo magnético sobre la superficie  $S$  que limita el conductor  $C$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} ; \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (11.2)$$

La ecuación (11.2) representa una ley general que se aplica a cualquier contorno  $C$ , exista o no un conductor sobre  $C'$ . Esta ley muestra que un campo eléctrico puede ser generado por el flujo variable de un campo magnético. Además la ecuación anterior pone de manifiesto que la integral del campo eléctrico a lo largo de un circuito cerrado no es nula, es decir, el campo  $\mathbf{E}'$  no es conservativo.

Aquí tenemos un campo eléctrico no coulombiano, es decir, no conservativo, en el que las líneas de campo no tienen su origen en una carga positiva y su fin en otra negativa.

La variación del flujo puede originarse por distintos procedimientos, bien por que varía el campo magnético con el tiempo, o por que se mueve o deforma el circuito  $C$ . Vamos a estudiar los dos casos aisladamente para terminar expresando la ecuación general que integra las dos formas de inducción.

#### 11.1.1.1 Medios estacionarios

Cuando se estudia el campo en una zona que permanece estacionaria, o el circuito sobre el que se observa la corriente inducida no se mueve ni cambia de forma o tamaño, la variación del flujo magnético sólo se debe al cambio temporal del campo magnético  $\mathbf{B}$ . Por otra parte, el campo  $\mathbf{E}'$  que mediría un observador dentro del conductor coincide con el campo  $\mathbf{E}$  en el sistema de referencia donde se observa el campo magnético  $\mathbf{B}$ .

La ecuación (11.2) en este caso es de la forma,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (11.3)$$

Aplicando el teorema de Stokes a la integral de línea del primer miembro,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$$

Llevando esta relación a la ecuación (11.3) e igualando los términos bajo el signo integral obtenemos,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11.4)$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Faraday; es una ecuación de carácter general y pone de manifiesto que el campo eléctrico no es irrotacional cuando los campos magnéticos son funciones del tiempo; además muestra la dependencia entre los dos campos.

Si en la ecuación (11.4) sustituimos  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y transponemos al primer miembro de la ecuación, queda,

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (11.5)$$

Esta ecuación muestra que el valor entre paréntesis es irrotacional, es decir, deriva de un potencial escalar  $V$  a través del gradiente,

$$-\nabla V = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Despejando  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{E} = -\left( \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (11.6)$$

Ecuación que muestra la dependencia del campo eléctrico no sólo del potencial electrostático  $V$  sino que además es función de la derivada del potencial vector magnético con respecto al tiempo.

La integral de la ecuación (11.6) entre dos puntos es el **voltaje**, que como vemos en la siguiente ecuación es distinto de la diferencia de potencial entre los mismos puntos cuando  $\partial \mathbf{A} / \partial t \neq 0$ .

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (11.7)$$

La ecuación anterior se reduce a la obtenida en electrostática cuando el potencial vector no depende del tiempo; es decir, cuando  $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ .

#### 11.1.1.2 Medios en movimiento

Ahora vamos a estudiar el caso de inducción electromagnética cuando el circuito o medio se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$ . Suponemos que la velocidad

es pequeña comparada con la de la luz, de manera que son aplicables las transformaciones de Galileo entre el sistema de referencia ligado al contorno  $C$  en movimiento y el estacionario donde se observa  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ .

En la ecuación (11.2) debemos calcular el flujo sobre una superficie de contorno  $C$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ . Para ello utilizamos la relación entre la derivada sustancial ( $d/dt$ ) y local ( $\partial/\partial t$ ),

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

Como además  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , la ecuación (11.2) queda de la forma,

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \int_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s}$$

Si aplicamos el teorema de Stokes al primer miembro queda,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \int_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s}$$

Transponiendo términos,

$$\int_S \nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (11.8)$$

Igualando los términos bajo el signo integral obtenemos,

$$\nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{B} \times \mathbf{v}) = - \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (11.9)$$

En la ecuación anterior se mezclan vectores referidos a sistemas de coordenadas distintos,  $\mathbf{E}'$  está referido al sistema que se mueve con el contorno  $C$ , y  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  son los observados en el sistema en reposo. Para establecer una ecuación con todos los vectores en el mismo sistema de referencia aplicamos la igualdad de fuerzas en sistemas que admiten las transformaciones de Galileo, sistemas que se mueven con velocidad constante uno con respecto a otro.

En el sistema en reposo la fuerza de Lorentz sobre un electrón es,

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

En el sistema ligado a  $C$ , como el observador no percibe su movimiento,

$$\mathbf{F}' = -e\mathbf{E}'$$

La igualdad entre las dos fuerzas proporciona la siguiente relación,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.10)$$

Sustituyendo en la ecuación (11.9) queda,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11.11)$$

Esta ecuación es la misma que la obtenida para medios estacionarios, es decir, la ley de Faraday expresada por la ecuación (11.11) es independiente del movimiento del medio.

La ecuación (11.10) que relaciona los campos en los dos sistemas de referencia es válida para velocidades pequeñas. Dicha relación se modifica con velocidades comparables a la de la luz como se demuestra relatividad restringida, es decir, cuando no es aplicable la igualdad de fuerzas en dos sistemas de referencia mediante las transformaciones de Galileo.

La citada ecuación (11.10) muestra que sobre el electrón en movimiento actúan dos tipos de campo, uno  $\mathbf{E}$  debido a la inducción originada por las variaciones temporales de  $\mathbf{B}$  y otro,  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , debido al movimiento. Cuando  $\mathbf{B}$  es independiente del tiempo,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.12)$$

### 11.1.2 INDUCCIÓN MUTUA Y AUTOINDUCCIÓN

En los apartados anteriores hemos expresado la ley de Faraday como una relación entre campos referida a cada punto, ecuación (11.4). Frecuentemente nos interesa tomar un sistema (circuito) como un conjunto y calcular la f.e.m. inducida a través de parámetros geométricos característicos del sistema; a estos parámetros se los conoce con el nombre de **coeficientes de inducción mutua** o **autoinducción**, según que la inducción sea entre dos circuitos o sobre el propio circuito.

Dados dos circuitos como muestra la figura 11.1, la f.e.m. inducida en el circuito (1) debida a la variación del flujo creado por la corriente en el circuito (2) es,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Si los circuitos son estacionarios y no deformables, los cambios de flujo  $\Phi_{12}$  sólo dependen de la corriente  $I_2$ , entonces flujo y corriente son proporcionales, y la constante de proporcionalidad es,

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \quad (11.13)$$

$M_{12}$  es el *coeficiente de inducción mutua incremental*. Cuando además los medios son lineales,

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \quad (11.14)$$

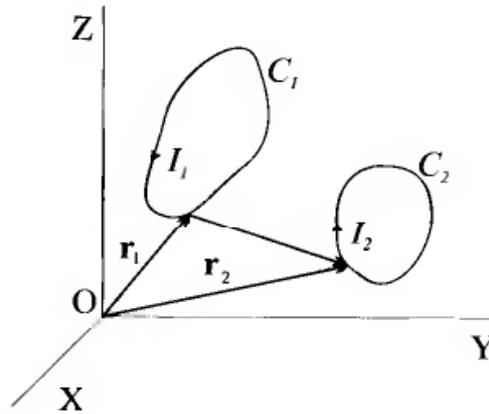


Figura 11.1

$M_{12}$  es el flujo que atraviesa el circuito (1) debido al campo creado por el circuito (2) partido por la corriente en el circuito (2).

Utilizando esta última relación la f.e.m. inducida será,

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (11.15)$$

Ecuación que expresa la f.e.m. inducida en función de un parámetro global, el *coeficiente de inducción mutua*.

Si sólo existe un circuito, la f.e.m. inducida se deberá a la corriente en el propio circuito, en este caso,

$$\mathcal{E}_1 = -M_{11} \frac{dI_1}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt} \quad (11.16)$$

$L_1 = M_{11}$  es el *coeficiente de autoinducción*.

La unidad de medida para los citados coeficientes en SI es el **henrio**.

$$1 \text{ H} = \text{V} \times \text{s/A} = \text{Wb/A}$$

Calculamos  $M_{12}$  para circuitos filiformes siguiendo la definición; es decir, obtenemos el flujo que atraviesa el circuito (1) debido al campo creado por la corriente en el circuito (2) y dividimos por dicha corriente.

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s}_1$$

Considerando que  $\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2$ , el potencial vector debido a la corriente  $I_2$ , y aplicando el teorema de Stokes al flujo del rotacional obtenemos,

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Dividiendo por  $I_2$  encontramos la fórmula de **Neumann** para el **coeficiente de inducción mutua** en circuitos filiformes,

$$M_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (11.17)$$

El intercambio de  $d\mathbf{l}_1$  por  $d\mathbf{l}_2$  no altera la ecuación anterior, por lo que,

$$M_{12} = M_{21} \quad (11.18)$$

En el caso de que se trate del propio circuito, flujo y corriente se producen y atraviesan el mismo circuito, se obtiene el **coeficiente de autoinducción**,

$$M_{11} = L = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}'_1 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1|} \quad (11.19)$$

La ecuación anterior se hace infinita cuando  $d\mathbf{l}_1$  y  $d\mathbf{l}'_1$  coinciden, en cuyo caso  $|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1| = 0$ . Los circuitos reales no tienen conductores de radio nulo (filiformes), por lo que hay que calcular los campos dentro de los conductores, y como se puede demostrar, el campo sobre el eje de un conductor cilíndrico debido a la corriente que circula por él es nulo. La aplicación de las ecuaciones (11.17 - 19) en general es complicada si las formas geométricas no son sencillas. En algunos casos es necesario recurrir a la definición del coeficiente de autoinducción en función de la energía magnética. Este procedimiento se analizará posteriormente.

Como muestran las ecuaciones (11.17 - 19), los coeficientes  $M_{12}$  y  $L$  dependen de la geometría del sistema.

La f.e.m. debida a la autoinducción es,

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (11.20)$$

## 11.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 11.1

Una espira cuadrada de lado  $L$ , partiendo de A, se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$  constante desde A hasta C, véase la figura P11.1.1 En el tramo M - N existe un campo magnético uniforme y perpendicular al plano en el que se mueve la espira.

1) Si la espira tiene una resistencia  $R$ , calcular la corriente que circula por ella en función de la velocidad  $\mathbf{v}$ , el campo magnético  $\mathbf{B} = -B\mathbf{u}_x$  y la posición en el recorrido. Dibujar la gráfica  $I = I(y)$ .

2) Calcular la fuerza que se debe aplicar a la espira a lo largo del recorrido AC para mantener su velocidad constante. Dibujar la gráfica  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(y)$ .

Suponemos despreciables los efectos debidos al campo magnético creado por la corriente que circula espira.

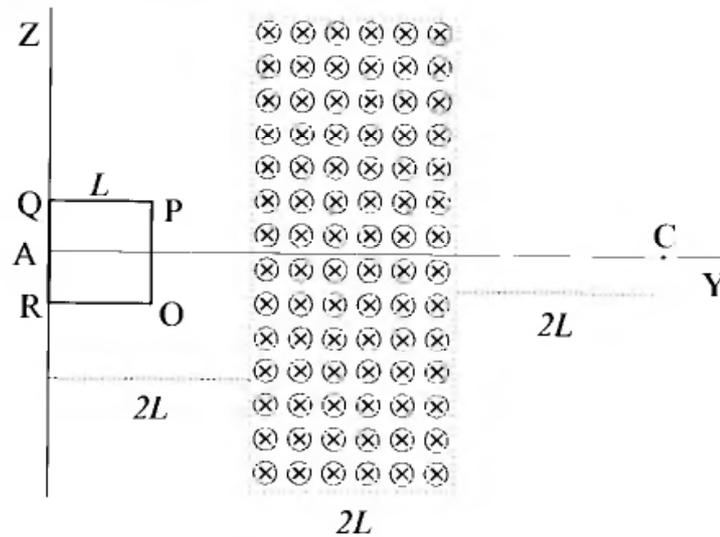


Figura P11.1.1

### Solución

#### 1) Corriente en la espira

La solución de la primera parte se obtiene calculando la f.e.m. inducida en la espira mediante la ley de Faraday expresada por la ecuación (11.1).

Hasta que el borde OP de la espira no llega al punto M, dicha espira se mueve sin que se induzca f.e.m., ya que no hay campo magnético; tampoco es necesario aplicar ninguna fuerza dado que no circula corriente ni existe campo magnético en esa zona.

Cuando el borde OP de la espira se mueve en el intervalo  $2L - 3L$ , el flujo, dado que  $\mathbf{B}$  es perpendicular al plano sobre el que se mueve la espira,

será,

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B v L dt$$

La f.e.m.  $\mathcal{E}$  es,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B v L$$

La corriente será,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{B v L}{R}$$

El sentido de la corriente es OPQR como determina la ley de Lenz, es decir, creando un campo que se opone al incremento de flujo debido al movimiento.

En el tiempo que la espira se mueve de forma que su borde pasa de  $3L$  a  $4L$  no hay f.e.m. inducida, ya que no hay variación de flujo magnético, y en consecuencia no pasa corriente por la espira.

Cuando OP se mueve desde  $4L$  hasta  $5L$ , el flujo es,

$$\Phi = B(L^2 - Lvt) \rightarrow d\Phi = -BLv$$

La f.e.m. inducida será,

$$\mathcal{E} = BLv$$

La corriente en este tramo es,

$$I = \frac{B v L}{R}$$

Dicha corriente circula ahora en sentido contrario al caso anterior, es decir, en el sentido ORQP.

En el intervalo desde que el borde pasa por  $5L$  hasta  $6L$  el flujo es de nuevo nulo y en consecuencia lo serán  $\mathcal{E}$  e  $I$ .

La gráfica  $I = I(y)$  se muestra figura P11.1.2a.

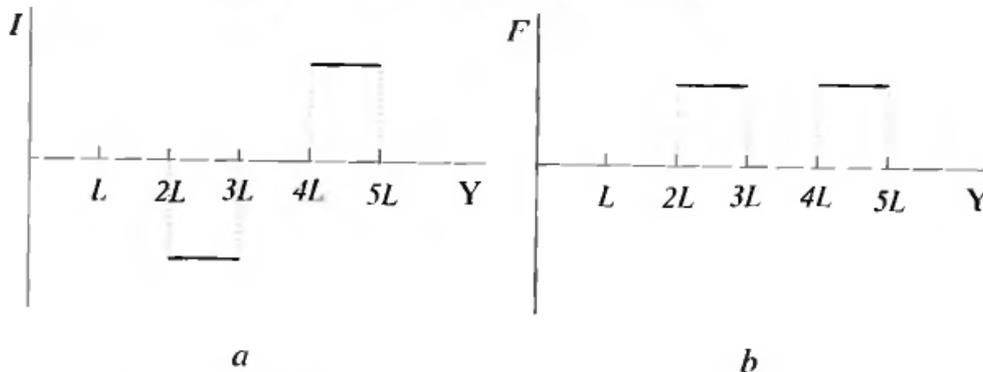


Figura P11.1.2

2) Fuerza sobre la espira

La fuerza necesaria para mantener la espira con movimiento uniforme es distinta de cero en los mismos tramos que circula corriente, dicha fuerza es,

$$\mathbf{F}(y) = -\mathbf{F}_m(y)$$

En el intervalo  $2L - 3L$  la fuerza magnética es,

$$\mathbf{F}_m = I L \mathbf{u}_z \times B(-\mathbf{u}_x) = -B I L \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{F}(y) = B I L \mathbf{u}_y$$

La fuerza cuando la espira se mueve en el intervalo  $4L - 5L$  es del mismo módulo y dirección, dado que se ejerce sobre el lado contrario donde la corriente tiene el sentido de  $\mathbf{u}_z$ ,

$$\mathbf{F}(y) = B I L \mathbf{u}_y$$

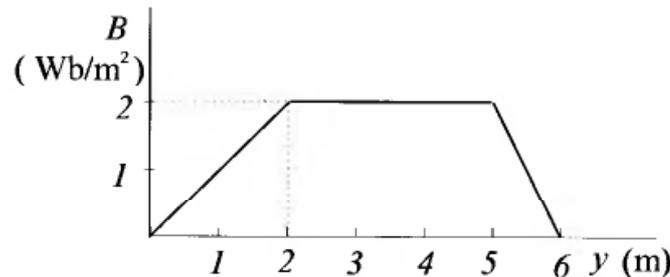
La gráfica correspondiente a la fuerza se muestra figura P11.1.2b.

### PROBLEMA 11.2

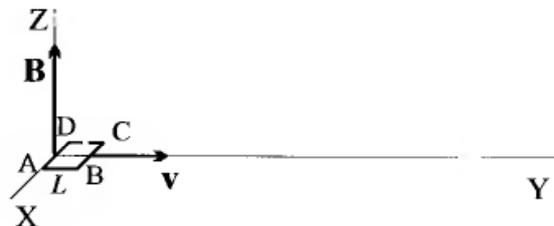
En la región del espacio correspondiente a  $y > 0$  existe un campo magnético cuyo vector  $\mathbf{B} = B(y) \mathbf{u}_z$ . Donde  $B(y)$  varía como muestra la figura P11.2.1a. Una espira cuadrada de lado  $L = 1$  cm. con una pequeña fisura en un lado, se mueve desde el origen hacia  $y > 0$  como muestra la figura P11.2.1b con una velocidad  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$ ,  $v = 1$  cm/s. El plano de la espira se mantiene perpendicular a  $\mathbf{B}$ .

Calcular la f.c.m. inducida en la espira y representarla gráficamente.

#### Solución



a



b

Figura P11.2.1

La pequeña fisura no permite el paso de corriente, por lo tanto no se necesita conocer el coeficiente de autoinducción de la espira para calcular el flujo total que la atraviesa. De no ser así deberíamos considerar la corriente inducida que crea un campo opuesto al que produce la variación de flujo original.

Para el cálculo de la f.e.m. debemos considerar siete tramos distintos, según la posición del borde BC de la espira.

La f.e.m. se obtiene aplicando la ley de Faraday en la forma dada por la ecuación (11.1).

El campo magnético  $B$  se expresa de la forma siguiente en los distintos tramos,

Para  $0 \leq y \leq 200$  cm.

$$B(y) = \frac{y}{100} \quad [\text{T}] \quad y \text{ en cm}$$

Para  $200 \leq y \leq 500$

$$B(y) = 2 \quad [\text{T}]$$

Para  $500 \leq y \leq 600$

$$B(y) = 2 - 0,02(y - 500) \quad [\text{T}] \quad y \text{ en cm}$$

*Cálculo de  $\mathcal{E}$  en los distintos tramos*

**Primer tramo:**

El borde BC pasa desde  $y = L = 1$  cm hasta 200 cm.

La variación de flujo es la diferencia entre los flujos barridos por los bordes BC y AD,

$$d\Phi = L dy (B(y) - B(y - 1)) = Lv dt \left( \frac{y}{100} - \frac{y-1}{100} \right) = \frac{Lv dt}{100}$$

La f.e.m. inducida es,

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{Lv}{100}$$

**Segundo tramo:**

El borde BC va desde  $y = 200$  cm hasta  $y = 201$  cm.

$$d\Phi = Lv dt \left( 2 - \frac{y-1}{100} \right)$$

$$\mathcal{E}_2 = -Lv \frac{y-1}{100}$$

**Tercer tramo:**

El borde BC va desde  $y = 201$  cm hasta  $y = 500$  cm.

$$d\Phi = Lv dt (2 - 2) = 0$$

$$\mathcal{E}_3 = 0$$

**Cuarto tramo:**

El borde BC se mueve desde  $y = 500$  cm. a  $y = 501$  cm.

$$d\Phi = L v dt (2 - 0,02(y - 500) - 2) = -L v dt \times 0,02(y - 500)$$

$$\mathcal{E}_4 = -L v \times 0,02(y - 500)$$

**Quinto tramo:**

El borde BC se mueve desde  $y = 501$  cm a  $y = 600$  cm.

$$d\Phi = -0,02 L v dt$$

$$\mathcal{E}_5 = -0,02 L v$$

**Sexto tramo:**

El borde BC pasa desde  $y = 600$  cm a  $601$  cm.

$$d\Phi = L v dt (0,02(y - 501) - 2)$$

$$\mathcal{E}_6 = L v (2 - 0,02(y - 501))$$

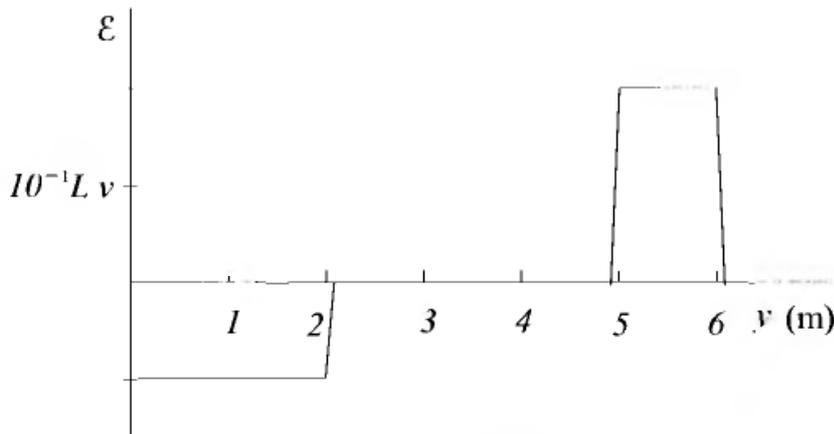
**Séptimo tramo:**

El borde BC se mueve desde  $y = 601$  cm a  $y > 601$  cm.

$$d\Phi = L v dt (0 - 0) = 0$$

$$\mathcal{E}_7 = 0$$

La gráfica que representa el valor de  $\mathcal{E}$  en los distintos tramos se muestra figura P11.2.2



**Figura P11.2.2**

**PROBLEMA 11.3**

Una barra conductora, unida por un extremo al eje de giro y por otro, mediante un contacto deslizante, se une al conductor circular de resistencia por unidad de longitud  $R$  ( $\Omega/\text{m}$ ). Véase figura P11.3.

La barra gira con una velocidad angular  $\omega$  en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = -B\hat{\mathbf{u}}_z$ .

Suponemos despreciable la resistencia de la barra y el tramo conductor OA. También consideramos despreciable al campo producido por la corriente inducida frente a  $\mathbf{B}$ .

Calcular la corriente que circula por la barra cuando se mueve de 0 a  $360^\circ$ .

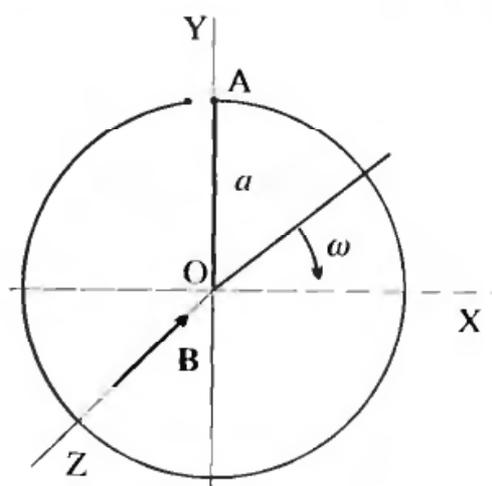


Figura P11.3

### Solución

La fuerza electromotriz inducida en este caso se debe al movimiento de la barra en el seno de un campo magnético uniforme e independiente del tiempo. Suponemos que la velocidad de cada punto de la barra es pequeña comparada con la velocidad de la luz y por tanto el campo sobre cada electrón de la barra se obtiene mediante la ecuación (11.12).

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega \rho B (-\mathbf{u}_\varphi) \times (-\mathbf{u}_z) = \omega \rho B \mathbf{u}_\rho$$

La f.e.m. inducida será,

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{E}' \cdot d\boldsymbol{\rho} = \int_0^a \omega \rho B d\rho (\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho) = \frac{1}{2} a^2 \omega B$$

El sentido de la corriente en este caso es AO, cerrando el circuito la barra y el trozo de arco que se inicia en A.

La corriente  $I$  será.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$R = \eta(l/S)$ , con  $l = a\omega t$ , y  $\eta$  es la resistividad; en consecuencia,

$$I = \frac{\frac{1}{2} a^2 \omega B}{\eta (a\omega t/S)} = \frac{aS}{2\eta t} B$$

### PROBLEMA 11.4

Tenemos el sistema que muestra la figura P11.4. Está formado por una espira conductora de radio  $a$ ; una barra conductora  $L$  que gira con velocidad

angular  $\omega$  en torno al eje Z, manteniendo un extremo fijo en el origen y deslizándose en contacto con la espira; una resistencia  $R$  unida a la barra en el origen y a la espira. El sistema está en presencia de un campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ .

Suponemos despreciable la resistencia de la barra y espira. También consideramos despreciable el campo creado por la corriente inducida frente a  $\mathbf{B}$ .

Calcular la corriente que circula por la resistencia  $R$ .

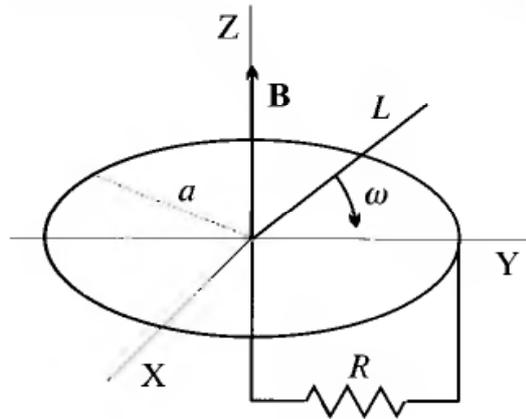


Figura P11.4

### Solución

En primer lugar calculamos la f.e.m. inducida por un procedimiento análogo al utilizado en el problema anterior, es decir, calculamos  $\mathbf{E}'$  mediante la ecuación (11.12) y después  $\mathcal{E}$ .

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega \rho B (\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z) = \omega \rho B \mathbf{u}_\rho$$

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{E}' \cdot d\boldsymbol{\rho} = \int_0^a \omega \rho B d\rho = \frac{1}{2} a^2 \omega B$$

La corriente será,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{a^2 \omega B}{2R}$$

El sentido de la corriente en la resistencia será del borde hacia el centro.

### PROBLEMA 11.5

En el seno de un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ , disponemos un circuito como el indicado figura P11.5. La barra conductora C gira manteniendo fijo el punto O y barriendo en ida y vuelta el ángulo  $0 - 90^\circ$  apoyada en el conductor circular AD. El movimiento de ida y vuelta de la barra se hace mediante un motor y en un tiempo (periodo)  $T$ , ( $\omega = \pi/T$ ).

El ángulo  $\theta$  varía de acuerdo con la ecuación:  $\theta = \omega t$ .

Suponemos despreciables la resistencia de la barra y el conductor circular. También consideramos despreciable el campo producido por la corriente inducida.

Calcular la corriente que circula por la resistencia  $R$ .

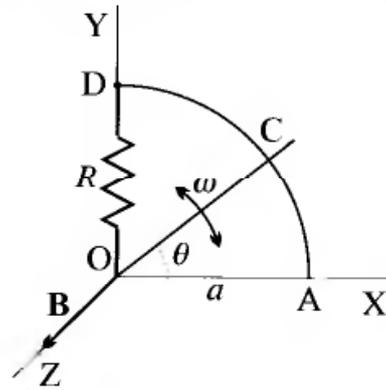


Figura P11.5

### Solución

De forma análoga a los problemas anteriores, se calcula en primer lugar la f.c.m. inducida. En este caso vamos a calcular  $\mathcal{E}$  mediante la ley de Faraday expresada por la ecuación (11.1).

La variación de flujo es,

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B ds (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z)$$

Para calcular  $ds$  tenemos en cuenta que la superficie de un sector de circunferencia es  $ds = (1/2)a^2 d\theta$ ,

$$d\Phi = \frac{1}{2}a^2 B d\theta$$

El ángulo  $\theta$  varía con el tiempo de la forma  $\theta = \omega t$  ya que cada periodo  $T$  barre el ángulo  $\pi$ . Diferenciando y sustituyendo ecuación anterior queda,

$$d\Phi = \frac{1}{2}a^2 B \omega dt$$

La f.e.m. será,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}a^2 B \omega$$

El valor de la corriente es,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{2} \frac{a^2 B \omega}{R}$$

El sentido de la corriente cambia cada semiperiodo. Si se comienza en  $t = 0$  con la barra coincidiendo con el eje X, el sentido inicial de la corriente es DO en la resistencia  $R$ .

**PROBLEMA 11.6**

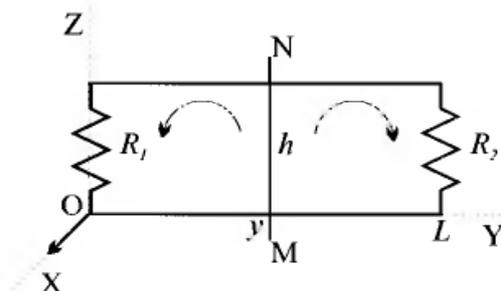
El dispositivo indicado en la figura P11.6 está formado por dos barras conductoras paralelas, de longitud  $L$  y separadas una distancia  $h$ . A los extremos se unen sendas resistencias  $R_1$  y  $R_2$ . Otra barra conductora MN se puede desplazar sobre las barras paralelas, de manera que su posición sobre el eje Y viene dada por,

$$y = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \omega t \right)$$

El sistema está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_x$ .

Calcular las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  que circulan respectivamente por  $R_1$  y  $R_2$ .

Suponemos que  $I_1$  e  $I_2$  producen un campo magnético cuya amplitud es despreciable frente  $B_0$ .



**Figura P11.6**

**Solución**

Hay dos formas de resolver el problema.

1)

Mediante la fuerza de Lorentz sobre los electrones de la barra MN:

La velocidad de los electrones la calculamos derivando con respecto al tiempo la expresión para la posición de la barra:

$$y = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \omega t \right) \rightarrow v = \frac{dy}{dt} = -\frac{L}{4} \omega \sin \omega t$$

Luego

$$\mathbf{v} = -\frac{L}{4} \omega \sin \omega t \mathbf{u}_y$$

Y el campo eléctrico vendrá dado por

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \left( -\frac{L}{4} \omega \sin \omega t \right) \mathbf{u}_y \times B \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E}' = \frac{L}{4} \omega B \sin \omega t \mathbf{u}_z$$

y la fuerza electromotriz inducida será

$$\mathcal{E} = \int_0^h \frac{L}{4} \omega B \operatorname{sen} \omega t \mathbf{u}_z \cdot d\mathbf{u}_z = \frac{Lh}{4} \omega B \operatorname{sen} \omega t$$

Lo que equivale a un generador de voltaje sinusoidal en la rama común a las dos mallas. Las intensidades respectivas que circulan por  $R_1$  y  $R_2$  son

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = Bh \frac{L\omega}{4R_1} \operatorname{sen} \omega t ; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = Bh \frac{L\omega}{4R_2} \operatorname{sen} \omega t$$

Y el sentido de la circulación, en un instante dado, es el que indica la figura P11.6, es decir, las intensidades están en oposición de fase.

2)

El segundo procedimiento consiste en calcular el flujo a través de cada una de las espiras

$$\phi_1 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_x h dy = Bh y$$

con la posición de la barra  $y$ ,

$$y = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \omega t\right) \rightarrow \phi_1 = Bh \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \omega t\right)$$

Análogamente,

$$\phi_2 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = Bh(L - y) \rightarrow \phi_2 = Bh \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \omega t\right)$$

La fuerza electromotriz que se genera en cada una de las espiras será

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = Bh \frac{L\omega}{4} \operatorname{sen} \omega t ; \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -Bh \frac{L\omega}{4} \operatorname{sen} \omega t$$

Y las corrientes que circulan por sendas resistencias son

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} = Bh \frac{L\omega}{4R_1} \operatorname{sen} \omega t ; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} = -Bh \frac{L\omega}{4R_2} \operatorname{sen} \omega t$$

Como puede observarse, por este procedimiento se obtiene directamente el desfase de las intensidades. Esto se debe a que en el cálculo de los flujos, cuando el flujo aumenta en una espira, disminuye en la otra.

### PROBLEMA 11.7

En la figura P11.7.1 se muestra un dispositivo constituido por los siguientes elementos: Un conductor circular de radio  $a$  y centro el origen  $O$ . Una barra conductora  $L$ , que gira en la dirección de las agujas del reloj, centrada en  $O$  y eje de giro el  $X$ ; la barra se desliza haciendo contacto con el conductor circular. Una resistencia  $R$  unida por un lado al centro de la barra y por otro al conductor circular. El conjunto está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ . Suponemos despreciable el campo creado por

la corriente inducida frente al campo  $\mathbf{B}$ . También suponemos despreciable la resistencia de los contactos.

Calcular la corriente inducida que circula por la resistencia  $R$ . Indicar el sentido de las corrientes tanto en la resistencia como en la barra.

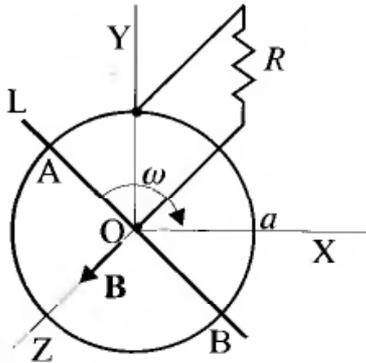


Figura P11.7.1

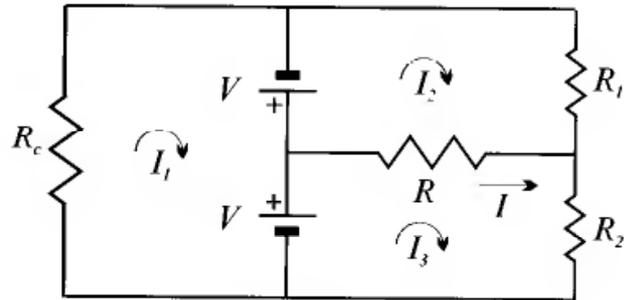


Figura P11.7.2

### Solución

Suponemos que la resistencia de la barra giratoria es despreciable frente a las demás.

La fuerza electromotriz inducida en la mitad de la barra móvil entre OA es del mismo módulo pero de sentido opuesto a la que corresponde al tramo OB, dado que las velocidades respectivas tienen sentido opuesto.

En cada punto de la barra  $\mathbf{v} = -\omega \rho \mathbf{u}_\varphi$ .

El campo que actúa sobre los electrones que se mueven con la barra es,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (-\omega \rho \mathbf{u}_\varphi) \times B \mathbf{u}_z = -\omega \rho B \mathbf{u}_\rho$$

En el tramo OA el campo eléctrico inducido será,

$$\mathbf{E}' = -\omega \rho B \mathbf{u}_\rho$$

La f. e. m. entre el centro de la barra O y el punto de contacto con el conductor circular es,

$$V = - \int_0^a \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^a (-\omega \rho B \mathbf{u}_\rho) \cdot \mathbf{u}_\rho d\rho = \frac{1}{2} \omega B a^2$$

El cálculo del campo eléctrico en el tramo OB nos lleva a un campo radial dirigido hacia el centro O, es decir, el mismo que hemos calculado en el tramo OA. La f. e. m. será la misma con el sentido tal que el polo positivo está próximo al centro O. En la figura P11.7.2 se muestra el circuito eléctrico equivalente al sistema.  $R_c$  representa la resistencia de la semicircunferencia de la zona opuesta a la unión con la resistencia  $R$ ;  $R_1$  y  $R_2$  representan respectivamente los trozos de conductor circular entre el contacto con la barra y su unión a la resistencia  $R$ .

El cálculo de la corriente, suponiendo que  $R_c$ ,  $R_1$  y  $R_2$  son pequeñas pero no despreciables frente a  $R$ , se realiza de la forma siguiente.

Las ecuaciones del circuito indicado en la figura P11.7.2 por el método de mallas son,

$$\begin{aligned} 0 &= R_c I_1 - 0 I_2 - 0 I_3 \\ -V &= 0 I_1 + (R + R_1) I_2 - R I_3 \\ V &= -0 I_1 - R I_2 + (R + R_2) I_3 \end{aligned}$$

Del sistema anterior se deduce inmediatamente que  $I_1 = 0$ , por tanto el sistema se reduce a dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} -V &= (R + R_1) I_2 - R I_3 \\ V &= -R I_2 + (R + R_2) I_3 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema por el método de Cramer.

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -V & -R \\ V & (R + R_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R + R_1) & -R \\ -R & (R + R_2) \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{V(R - (R + R_2))}{(R + R_1)(R + R_2) - R^2} = \frac{-V R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

De forma análoga calculamos  $I_3$

$$I_3 = \frac{V(R + R_1) - VR}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{V R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

La corriente que circula por la resistencia  $R$  es  $I$ . Observando el circuito,

$$I = I_3 - I_2 = \frac{V(R_1 + R_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Si  $R_1$  y  $R_2$  son muy pequeñas frente a  $R$ , su producto es aún menor, por tanto despreciable frente a  $R$ , en consecuencia,

$$I \simeq \frac{V}{R} \simeq \frac{\omega B a^2}{2R}$$

Los sentidos de las corrientes son: En la barra hacia el centro en los dos tramos OA y OB; en la resistencia desde el centro hacia el contacto con el conductor circular.

### PROBLEMA 11.8

Un dispositivo se compone de un hilo conductor rectilíneo indefinido en la dirección del eje Z, y una espira triangular como muestra la figura P11.8.

Por el conductor circula una corriente  $I$ . La espira se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$  sobre el plano ZY.

Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

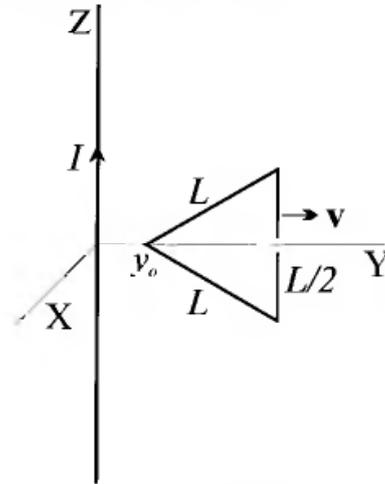


Figura P11.8

### Solución

Para resolver este problema obtenemos la fuerza de Lorentz que se ejerce sobre los electrones del conductor en movimiento. Dicha fuerza se debe a la presencia del campo magnético creado por el conductor rectilíneo e indefinido sobre el eje Z.

En cada punto del eje Y el campo magnético creado por dicho conductor es,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \mathbf{u}_x$$

La fuerza por unidad de carga, es decir el campo eléctrico  $\mathbf{E}'$  en cada punto de la espira en movimiento será

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{F}}{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Como  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$

$$\mathbf{E}' = v\mathbf{u}_y \times \left( -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \mathbf{u}_x \right) = \frac{\mu_0 I v}{2\pi y} \mathbf{u}_z$$

La f.e.m.  $\mathcal{E}$  se calcula integrando el campo  $\mathbf{E}'$  sobre el contorno de la espira.

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$

Calculamos la integral descomponiendo el camino  $C$  en tramos.

1) En el tramo perpendicular al eje Y  $y$  permanece constante sobre el camino de integración y la integral será,

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_o I v}{2\pi y} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z dz = \frac{\mu_o I v}{2\pi y} L$$

El valor de  $y$  es,

$$y = y(A) + L \cos 30^\circ = y(A) + L \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior,

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mu_o I v}{\pi} \frac{L}{(2y(A) + L\sqrt{3})}$$

La coordenada  $y(A) = y_o + vt$ , es decir, depende de la posición inicial de la espira  $y_o$  y del instante considerado después de iniciarse el movimiento.

2) Sobre los lados inclinados el campo eléctrico es de la misma forma que el anterior, pero ahora cambian  $d\mathbf{l}$  y los límites de integración.

$$d\mathbf{l} = dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$$

Por otra parte la relación entre las coordenadas  $y$  y  $z$  sobre el lado del triángulo superior es,

$$z = y \tan 30^\circ = y \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow dz = \frac{\sqrt{3}}{3} dy$$

$$\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_o I v}{2\pi y} \mathbf{u}_z \cdot (dy\mathbf{u}_y + \tan 30^\circ dy \mathbf{u}_z) = \frac{\mu_o I v}{2\pi} \tan 30^\circ \frac{dy}{y}$$

y sobre el inferior,

$$z = -y \tan 30^\circ = -y \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow dz = -\frac{\sqrt{3}}{3} dy$$

$$\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_o I v}{2\pi y} \mathbf{u}_z \cdot (dy\mathbf{u}_y - \tan 30^\circ dy \mathbf{u}_z) = -\frac{\mu_o I v}{2\pi} \tan 30^\circ \frac{dy}{y}$$

Siguiendo el sentido antihorario iniciado para la integración, los límites de integración para el lado superior son  $y$  e  $y(A)$  y para el inferior  $y(A)$  e  $y$ .

La f.e.m. se obtiene integrando sobre los lados del triángulo,

$$\mathcal{E}_2 = \int_y^{y(A)} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \int_{y(A)}^y \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_o I v}{2\pi} \tan 30^\circ \left( \int_y^{y(A)} \frac{dy}{y} - \int_{y(A)}^y \frac{dy}{y} \right)$$

$$\mathcal{E}_2 = -2 \frac{\mu_o I v \sqrt{3}}{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{3} [\ln y]_{y(A)}^y = -\frac{\mu_o I v \sqrt{3}}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left( \frac{y}{y(A)} \right)$$

Teniendo la relación entre las coordenadas  $y$  e  $y(A)$  indicada anteriormente,

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\mu_o I v \sqrt{3}}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left( \frac{2y(A) + L\sqrt{3}}{2y(A)} \right)$$

Tanto la f.e.m.  $\mathcal{E}_2$  como  $\mathcal{E}_1$  dependen de  $y(A)$ , es decir, de donde está situada la espira en un instante dado. La f.e.m. total se obtiene sumando los valores obtenidos en los distintos tramos,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{\mu_0 I v}{\pi} \left( \frac{L}{(2y(A) + L\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left( \frac{2y(A) + L\sqrt{3}}{2y(A)} \right) \right)$$

Dado que al moverse la espira disminuye el flujo, la f.e.m.  $\mathcal{E}$  produce una corriente en el sentido horario; es decir, la corriente aumenta el flujo a través de la espira.

### PROBLEMA 11.9

Un disco conductor, de radio  $a$  y espesor  $e$ , gira con velocidad angular  $\omega$  en torno al eje  $y$  y en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ . Una espira cuadrada de lado  $L$  y resistencia  $R$ , está situada en el plano  $YZ$  como indica la figura P11.9. La espira toca al disco con unos contactos deslizantes (escobillas).

Suponemos despreciables la resistencia de los contactos y del disco. También consideramos despreciable el campo magnético producido por la corriente inducida en la espira frente a  $\mathbf{B}$ .

Calcular la corriente que circula por la espira, en función de la altura  $h$ ,  $\omega$  y  $\mathbf{B}$ .

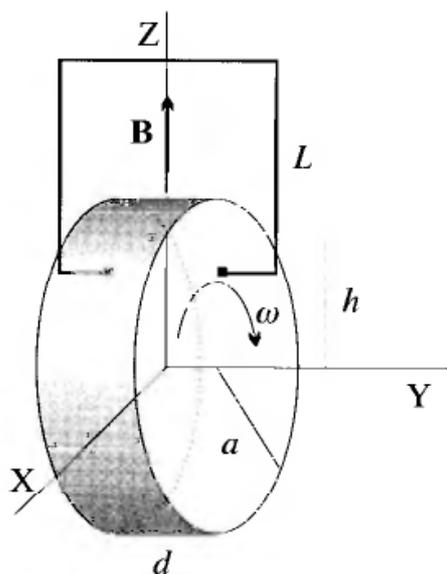


Figura 11.9

### Solución

Se calcula en primer lugar la f.e.m. inducida, que en este caso se hace mediante la relación (11.12),

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

La velocidad de los electrones en la posición que tienen las escobillas es,

$$\mathbf{v} = -\omega h \mathbf{u}_x$$

El campo  $\mathbf{E}'$  será,

$$\mathbf{E}' = -\omega h B (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z) = \omega h B \mathbf{u}_y$$

La fuerza electromotriz, teniendo en cuenta que  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{u}_y$ , es,

$$\mathcal{E} = \int_0^e \omega h B \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y dy = \omega h B e$$

La corriente  $I$  será,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega h B e}{R}$$

El sentido de la corriente en la espira es el contrario al movimiento de las agujas del reloj.

### PROBLEMA 11.10

Un tubo de longitud  $L$ , radio interior  $a$ , exterior  $b$  y conductividad  $\gamma$ , está imanado de forma que el campo magnético en el interior del tubo es  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{u}_z$ .

Suponemos unos contactos deslizantes (escobillas) de sección  $S$ , unidos a una espira como indica la figura 11.10, y hacemos girar el tubo sobre su eje de simetría con velocidad angular  $\omega$ . Calcular la corriente que circula por la espira.

Consideramos despreciable la influencia del campo creado por la corriente en la espira unida a las escobillas.

### Solución

Cuando el cilindro gira, la carga móvil del material se ve sometida a la fuerza de Lorentz debida al campo dentro del material imanado. Esto genera una fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  entre la superficie interior y exterior del cilindro. Para calcularla, obtenemos primero la f.e.m. elemental que se induce en un segmento radial, de tamaño  $dl$ , situado a una distancia  $\rho$ , ( $a < \rho < b$ ).

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathcal{E} = \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

donde  $d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{u}_\rho$ , y  $\mathbf{v}$  es la velocidad lineal del segmento,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \rho \omega \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho = \rho \omega \mathbf{u}_\varphi$$

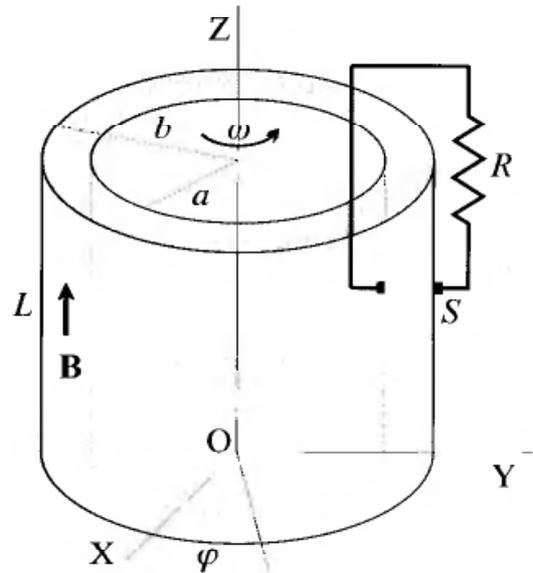


Figura P11.10

Calculamos el producto vectorial:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho\omega\mathbf{u}_\varphi \times \mu_o M_o \mathbf{u}_z = \mu_o M_o \rho\omega\mathbf{u}_\rho$$

$$d\mathcal{E} = \mu_o M_o \rho\omega\mathbf{u}_\rho \cdot d\rho\mathbf{u}_\rho = \mu_o M_o \rho\omega d\rho$$

La f.e.m. total se calcula integrando  $d\mathcal{E}$  entre las caras del cilindro, es decir entre  $a$  y  $b$ ,

$$\mathcal{E} = \int_a^b \mu_o M_o \omega \rho d\rho = \frac{\mu_o M_o \omega}{2} (b^2 - a^2)$$

La corriente eléctrica será  $I = \mathcal{E}/R$ , donde  $R$  representa la suma de la resistencia de la capa cilíndrica entre escobillas más la propia del sistema de contacto (escobillas) más la del hilo. Por tanto la corriente es,

$$I \simeq \frac{\mu_o M_o \omega (b^2 - a^2)}{2} \frac{\gamma S}{b - a} = \frac{\mu_o M_o \omega \gamma S}{2} (b + a)$$

Su sentido es contrario al movimiento de las agujas del reloj.

### PROBLEMA 11.11

Un péndulo formado con un hilo metálico, está anclado por un extremo A y unido a una masa  $m$  por el otro como muestra la figura P11.11.

El péndulo oscila con un periodo  $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$ . La oscilación se hace sobre el plano ZY y barre un ángulo de  $10^\circ$ .  $l = 10$  cm. y  $g \cong 10$  m/s<sup>2</sup>.

Disponemos el péndulo en el seno de un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_x$  ( $B = 1$  T).

Calcular la f.e.m. inducida entre los extremos A y C.

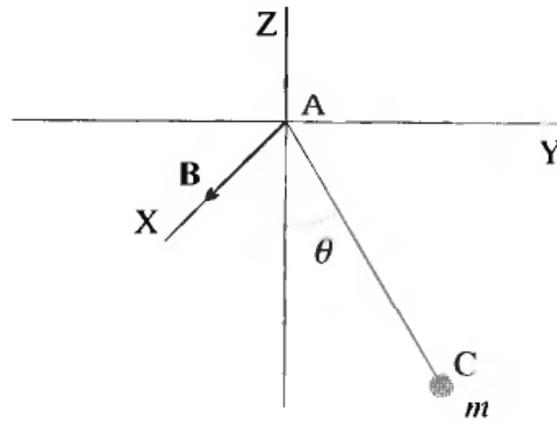


Figura P11.11

**Solución**

Para calcular la f.e.m. inducida se utiliza, como en casos anteriores, la ecuación (11.12). Como el ángulo barrido es  $10^\circ$ , podemos hacer la aproximación de que el desplazamiento es prácticamente igual al arco por el radio. El movimiento armónico descrito por el péndulo es tal que,

$$\theta = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Donde 5 es la amplitud en grados de la oscilación para el arco barrido. El módulo de la velocidad angular es,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -5 \frac{2\pi}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \mathbf{u}_\theta$$

En cada punto del hilo a una distancia  $r$  de a la velocidad es,

$$\mathbf{v} = \omega \rho \mathbf{u}_\theta = -5 \frac{2\pi}{T} \rho \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \mathbf{u}_\theta$$

$\mathbf{B} = B \mathbf{u}_x$ , el campo  $\mathbf{E}'$  será,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -B 5 \frac{2\pi}{T} \rho \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_x = -B 5 \frac{2\pi}{T} \rho \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \mathbf{u}_\rho$$

La integral de  $\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$  entre 0 y  $l$  nos dará  $\mathcal{E}$ . Como  $d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{u}_\rho$ ,

$$\mathcal{E} = \int_l^0 \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_l^0 B 5 \frac{2\pi}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \rho d\rho$$

$$\mathcal{E} = B l^2 \frac{5\pi}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Los valores de  $B$ ,  $l$  y  $T$  son:

$$B = 1 \text{ T} ; l = 0,1 \text{ m} ; T = 2\pi 10^{-1} \text{ s}$$

Sustituyendo estos valores ecuación anterior obtendremos,

$$\mathcal{E} = 25 \times 10^{-2} \operatorname{sen}(10t)$$

El argumento de la función  $\sin(10t)$  se expresa en radianes.

### PROBLEMA 11.12

Dos engranajes de cobre, del mismo radio  $a$  y ejes  $O_1$ ,  $O_2$ , dispuestos como indica la figura P11.12, están en contacto entre sí y pueden girar libremente en torno a sus ejes respectivos. Los ejes se unen mediante unas escobillas a un galvanómetro  $G$ . El conjunto está en presencia de un campo magnético perpendicular al plano de los engranajes, cuyo valor entre los ejes es  $\mathbf{B} = B(1 - y/2a)\mathbf{u}_x$ .

Mediante un sistema mecánico hacemos girar los engranajes con velocidad angular  $\omega$  en los sentidos indicados figura P11.12.

Suponemos despreciables la resistencia de las escobillas y la correspondiente a los engranajes. Además despreciamos el campo creado por la corriente inducida.

Calcular la corriente que circula por el galvanómetro  $G$ .

### Solución

Comenzamos por calcular la f.e.m. debida al movimiento de rotación de los engranajes de cobre. Esta se calcula mediante la integración de la ecuación (11.12) a lo largo de camino  $O_1NO_2$ .

En el tramo  $O_1N$  la velocidad es,

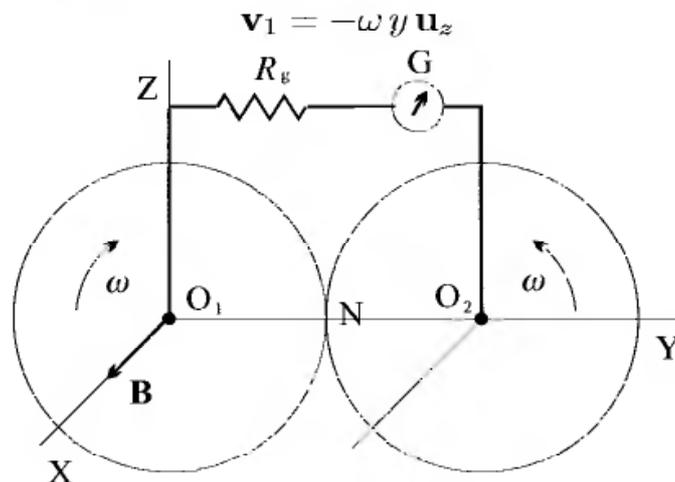


Figura P11.12

El campo  $\mathbf{E}'$  será,

$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} = -\omega y B \left(1 - \frac{y}{2a}\right) \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = -\omega y B \left(1 - \frac{y}{2a}\right) \mathbf{u}_y$$

En el tramo  $NO_2$  la velocidad y el campo son respectivamente,

$$\mathbf{v}_2 = -\omega(2a - y) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{E}'_2 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} = -\omega B(2a - y) \left(1 - \frac{y}{2a}\right) \mathbf{u}_y$$

La f.e.m. inducida es,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^a \mathbf{E}'_1 \cdot \mathbf{u}_y dy + \int_a^{2a} \mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{u}_y dy \\ \mathcal{E} &= - \int_0^a \omega y B \left(1 - \frac{y}{2a}\right) dy - \int_a^{2a} \omega B(2a - y) \left(1 - \frac{y}{2a}\right) dy \\ \mathcal{E} &= -\frac{1}{3}\omega B a^2 - \frac{1}{6}\omega B a^2 = -\frac{1}{2}\omega B a^2 \end{aligned}$$

El signo de  $\mathcal{E}$  muestra que hay una caída de tensión en el sentido de integración elegido, es decir, entrada por el polo positivo de la pila. El sentido de la corriente en el galvanómetro va de  $O_1$  a  $O_2$  y su módulo será,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_g} = \frac{\omega B a^2}{2R_g}$$

**PROBLEMA 11.13**

Tenemos el siguiente dispositivo: Una placa metálica doblada en forma de U tumbada como indica la figura P11.13; una lámina metálica de resistividad  $\rho = 10^{-2}(\Omega/\text{m})$ , espesor  $e = 10^{-4}$  m, anchura  $w = 1$  m y altura  $h = 10^{-2}$  m. Dicha lámina se desplaza con velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$ , manteniéndose en contacto con las caras laterales de la U.

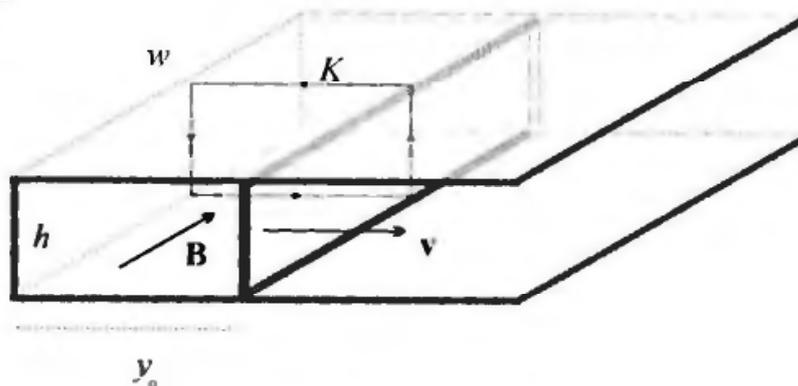
El sistema se sitúa en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = -B\mathbf{u}_x$ .

Suponemos que el sistema se comporta como un cilindro rectangular indefinido en la dirección del eje X. También se supone que la resistividad de la placa en U es despreciable frente a  $\rho$ .

Las condiciones iniciales son: Para  $t = 0$ ,  $y = y_0$  e  $I = 0$ .

Calcular la corriente que circula por la placa y lámina.

**Solución**



**Figura P11.13**

En este caso no hemos supuesto despreciable el campo debido a las corriente inducida frente a  $\mathbf{B}$ , por tanto en el cálculo de la f.e.m.  $\mathcal{E}$  se debe tener en cuenta esta circunstancia. La  $\mathcal{E}$  se obtiene mediante la ley de Faraday, ecuación (11.1).

La resistencia de la lámina es,

$$R = \rho \frac{h}{w e} = 10^{-2} \frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 1 \Omega$$

La intensidad será,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

En una posición de la lámina  $y$ , el flujo será,

$$\Phi = (\mathbf{B} - \mathbf{B}_{\text{ind}}) \cdot y h \mathbf{u}_x \quad \text{con} \quad y = y_0 + vt$$

El campo magnético debido a un solenoide rectangular indefinido, en el que la corriente por unidad de longitud es  $K = I/w$ , será,

$$\mathbf{B}_{\text{ind}} = \mu_0 \frac{I}{w} \mathbf{u}_x$$

El sentido es el opuesto a  $\mathbf{B}$ , ya que según la ley de Lenz la corriente inducida crea un campo magnético que se opone a la variación de flujo original (el movimiento de la placa aumenta el flujo de  $\mathbf{B}$ ).

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación diferencial que regula el comportamiento del sistema es,

$$R I = -\frac{d}{dt} \left( B - \mu_0 \frac{I}{w} \right) h y = -B h \frac{dy}{dt} + \mu_0 B \frac{h}{w} \frac{d(I y)}{dt}$$

Considerando que  $y = y_0 + vt$ ,

$$R I = -B h v + \mu_0 B \frac{h}{w} \left( I v + y \frac{dI}{dy} \frac{dy}{dt} \right)$$

$$R I = -B h v + \mu_0 B \frac{h}{w} v \left( I + y \frac{dI}{dy} \right)$$

Trasponiendo términos y operando queda una ecuación diferencial de  $I$  en función de  $y$  en la forma siguiente,

$$\left( \mu_0 B \frac{h}{w} v \right) y \frac{dI}{dy} + \left( \mu_0 B \frac{h}{w} v - R \right) I = B h v$$

Esta ecuación diferencial se resuelve sumando una solución particular de la ecuación no homogénea con la general de la homogénea.

Para facilitar el cálculo definimos los siguientes valores:

$$M = \mu_0 B \frac{h}{w} v ; \quad N = \mu_0 B \frac{h}{w} v - R ; \quad P = B h v$$

La ecuación homogénea se puede poner de la forma,

$$\frac{dI}{I} = -\frac{N}{M} \frac{dy}{y}$$

La solución de esta ecuación es de la forma,

$$I_1 = C y^{-(N/M)}$$

La solución particular de la ecuación no homogénea es,

$$I_2 = \frac{P}{N}$$

En definitiva,

$$I = I_1 + I_2 = C y^{-(N/M)} + \frac{P}{N} \quad (11.13.1)$$

La constante  $C$  se calcula imponiendo las condiciones iniciales.

Para  $t = 0$ ,  $I = 0$  e  $y = y_0$ , de donde se deduce que,

$$C = -\frac{P}{N} y_0^{(N/M)}$$

Sustituyendo obtenemos,

$$I = \frac{P}{N} \left[ 1 - \left( \frac{y_0}{y} \right)^{(N/M)} \right]$$

Teniendo en cuenta la dependencia temporal de  $y$  queda,

$$I = \frac{P}{N} \left[ 1 - \left( \frac{y_0}{y_0 + vt} \right)^{(N/M)} \right]$$

La ecuación anterior nos muestra que cuando no se desprecia el efecto de las corrientes inducidas la solución se hace más compleja. En este caso la hemos podido resolver con facilidad por tratarse de un solenoide cuyo campo y flujo se calculan con facilidad, en el caso de una espira esto sería mucho más difícil, dado que el campo en toda la sección de la espira se obtiene de forma más compleja.

### PROBLEMA 11.14

Tenemos una arandela de material magnético, de permeabilidad  $\mu$ , conductividad  $\gamma$  y permitividad  $\varepsilon \cong \varepsilon_0$ , cuyos radios y espesor son respectivamente,  $a$ ,  $b$  y  $e$  ( $e < a < b$ ). Sobre una parte de la arandela arrollamos  $N$  espiras por las que circula una corriente  $I$ . El sistema se muestra figura 11.14.1a. Suponemos que el campo creado por las espiras se localiza dentro de la arandela, es decir, no hay fugas.

1) Una espira  $E$ , con contactos deslizantes apoyados sobre ambas caras de la arandela, se mueve radialmente con velocidad  $v$  hacia la izquierda. ¿Circulará corriente por la espira?

2) Manteniendo fija la espira  $E$ , movemos el conjunto arandela arrollamiento pila hacia la derecha con velocidad  $\mathbf{v}$ . Circulará ahora corriente por la espira  $E$ ?

Practicamos una hendidura muy estrecha en la arandela como muestra la figura P11.14.1b. La espira  $E$  se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  hacia la izquierda. ¿Circulará corriente por ella?

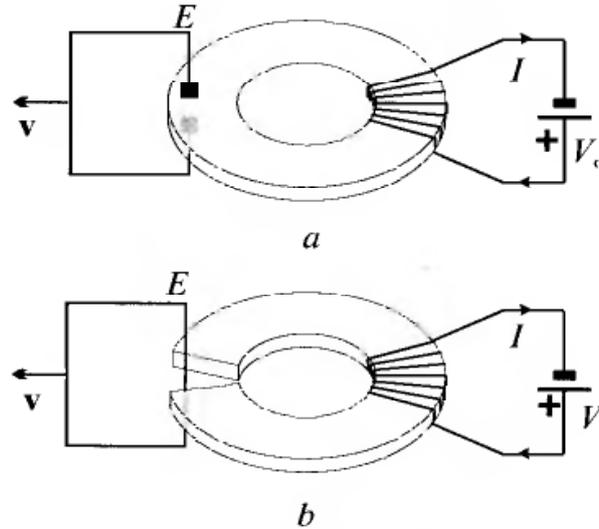


Figura P11.14.1

### Solución

1) En este experimento el observador que se mueve con la espira no detecta un movimiento de electrones en el seno de un campo magnético, ni variación de flujo a través de la espira. Como el campo magnético es constante y sólo existe en el interior de la arandela, la espira se mueve fuera del campo magnético y por tanto no corta líneas de campo ni hay electrones que se muevan dentro de un campo magnético. En consecuencia **no circula corriente** por la espira.

2) La f.c.m. que el observador situado en la espira puede detectar se obtiene considerando la ecuación (11.8) y el teorema de Stokes, que proporcionan la siguiente relación:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (11.14.1)$$

En el cálculo de  $\mathcal{E}$  intervienen dos términos, uno debido a la variación de flujo que se observa cuando la sección transversal de la arandela se desplaza hacia la derecha, véase la figura P11.14.2, y el otro debido al movimiento de los electrones de la arandela que se mueven en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B}$  perpendicular a  $\mathbf{v}$ .

La variación de flujo, teniendo en cuenta que  $ds = evdt$ , nos lleva a que el primer término es en este problema de la siguiente forma,

$$-\int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{B(-ev dt)}{dt} = B ev$$

El signo menos de  $ds$  se debe a que disminuye la superficie que encierra la espira. El sentido de la corriente debida a éste término sería antihorario, es decir, la corriente aumentaría el flujo, ya que el movimiento lo disminuye.

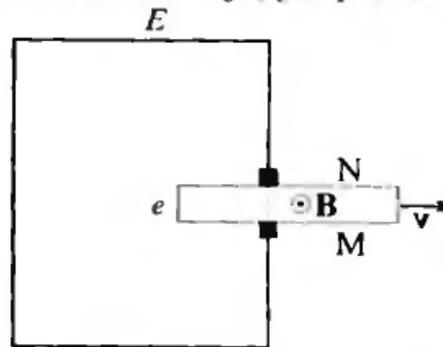


Figura P11.14.2 .

Consideramos que  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$  y  $d\mathbf{l} = dz\mathbf{u}_z$ , y la integral de línea tiene sus límites entre 0 y  $e$ , dado que en el resto del camino  $\mathbf{B}$  es nulo. El segundo término de la ecuación (11.14.1) es de la forma,

$$\oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = B v e (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x) \cdot \mathbf{u}_z = -B v e$$

Vemos que el segundo término es de signo contrario al primero, es decir, la corriente a que daría lugar iría en el sentido horario.

Como la suma de los dos términos producen una f.e.m. nula, la corriente será nula como en el caso anterior. Un experimento similar a éste fue realizado por Herring en 1908.

3) En este caso el único término que interviene es el debido a la variación de flujo a través de la espira, ya que el observador en la espira no detecta el movimiento de la propia espira. La f.e.m. será:

$$\mathcal{E} = B v e$$

La corriente circula y lo hace en sentido contrario a las agujas del reloj; es decir, de forma que se opone a la disminución de flujo debida al movimiento.

### PROBLEMA 11.15

Una capa esférica metálica de radio  $R$ , se sitúa como indica la figura P11.15.1 en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ . La esfera gira con velocidad angular  $\omega$  en torno al eje Z.

Calcular la f.e.m. inducida entre los contactos A y C.

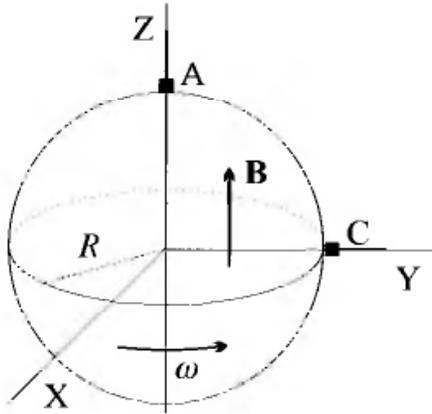


Figura P11.15.1

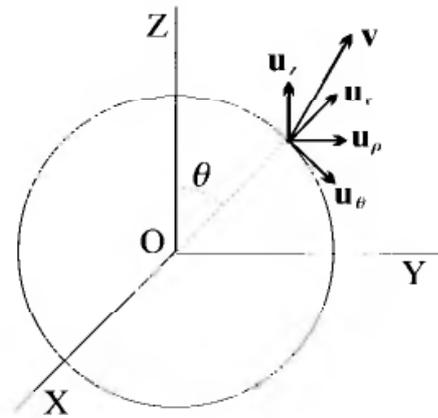


Figura P11.15.2

### Solución

El cálculo de la f.e.m. se hace teniendo en cuenta el campo  $\mathbf{E}'$  debido al movimiento de un conductor en el seno de un campo magnético, cuya expresión es la ecuación (11.12).

En la figura P11.15.2 se muestra la velocidad en un punto del tramo AC de la esfera.

$$\mathbf{v} = \omega \rho \mathbf{u}_\varphi = \omega R \sin \theta \mathbf{u}_\varphi$$

El campo  $\mathbf{E}'$  será,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega R \sin \theta \mathbf{u}_\varphi \times B \mathbf{u}_z = \omega R B \sin \theta \mathbf{u}_\rho$$

El vector unitario  $\mathbf{u}_\rho$  en función de los vectores unitarios en coordenadas esféricas es,  $\mathbf{u}_\rho = \sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta$

La f.e.m. es,

$$\mathcal{E} = \int_{AC} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$

Teniendo en cuenta las últimas relaciones, y que en el camino AC  $d\mathbf{l} = R d\theta \mathbf{u}_\theta$ , la f.e.m. será,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{AC} \omega R B \sin \theta (\sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta) \cdot \mathbf{u}_\theta R d\theta \\ \mathcal{E} &= \int_0^{\pi/2} \omega R^2 B \sin \theta \cos \theta d\theta \rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} \omega R^2 B \end{aligned}$$

### PROBLEMA 11.16

El dispositivo de la figura P11.16 representa una capa esférica metálica N de radio  $a$ , en cuyo interior hay una esfera imanada que produce en el exterior un campo magnético  $\mathbf{B}$  como muestra la citada figura. Un anillo conductor ABCD, que a través de los contactos deslizantes E se une a la

capa N en los tres puntos indicados. Capa esfera y anillo conductor pueden girar de forma independiente en torno al eje Z.

1) Cuando giran capa y esfera con velocidad angular  $\omega$ , manteniendo fijo el anillo, ¿circula corriente por los tramos AB, BC y ADC?

2) ¿Que ocurrirá si se mantiene fija capa y esfera y se mueve el anillo conductor?

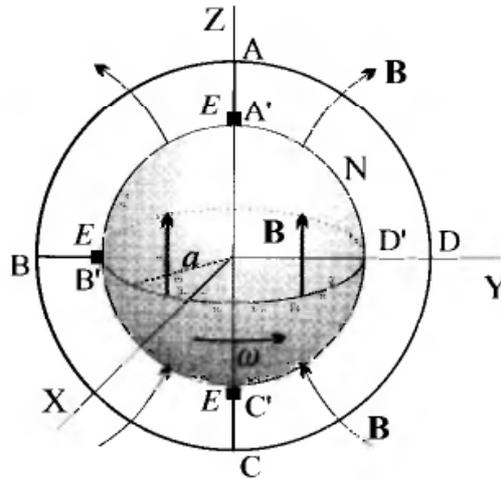


Figura P11.16

### Solución

1) Dada la imanación de la esfera, el campo magnético tiene simetría cilíndrica con respecto al eje Z. Las líneas de  $\mathbf{B}$  se indican en la figura. La velocidad lineal de un punto de la capa N es,

$$v = \omega a \sin \theta$$

La fuerza electromotriz inducida en cada tramo se calcula a partir de la ecuación (11.12)  $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . En la mitad superior de la esfera el sentido de  $\mathbf{B}$  es hacia el exterior de la esfera y en la mitad inferior hacia el interior. Debido a esta circunstancia y la simetría cilíndrica de  $\mathbf{B}$  con respecto al eje Z, la f.e.m. en el arco de esfera  $A'B'$  es de signo contrario a la inducida en el arco  $B'C'$ , ya que el sentido de  $\mathbf{E}'$  en  $A'B'$  es de  $A'$  a  $B'$  y en  $B'C'$  es de  $C'$  a  $B'$ .

En el tramo  $A'C'$ , que se cierra por el anillo a través de CDA,  $\mathbf{E}'$  en la parte superior tiene sentido de  $D'$  hacia  $A'$  y en la mitad inferior de  $D'$  a  $C'$ .

Como consecuencia de los sentidos de  $\mathbf{E}'$  en los distintos tramos, la corriente en ellos será la siguiente:

En el tramo  $A'B'$ , cerrado a través de  $E$  por el arco de anillo BA, la corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.

En el tramo  $B'C'$ , cerrado a través del arco CB, circula en sentido contrario a las agujas del reloj.

En el tramo  $A'C'$ , cerrado a través de la semicircunferencia CDA, no hay corriente, puesto que en la mitad inferior  $\mathbf{E}'$  tiene sentido contrario a la mitad superior y  $\mathcal{E} = \int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

2)

Si el anillo se mueve con la misma velocidad angular  $\omega$ , las fuerzas electromotrices inducidas en los tramos AB, BC y ADC son del mismo módulo y signo que en los tramos  $A'B'$ ,  $B'C'$  y  $A'D'C'$ , en consecuencia las corrientes en los circuitos cerrados son: Nula en ADC, y de sentidos contrarios al caso 1) en los dos tramos restantes. Esta situación es equivalente a que la esfera girara en sentido contrario en 1), que es el movimiento relativo que corresponde al giro indicado del anillo.

### PROBLEMA 11.17

El dispositivo que muestra la figura P11.17 consiste en un vaso cilíndrico de radio  $b$  al que se ha recubierto con una película metálica la superficie lateral en su parte interior. En el centro del vaso está una barra cilíndrica conductora de radio  $a$  que gira sobre su eje. En el fondo del vaso se deposita una lámina de líquido conductor que se mueve arrastrada por el movimiento de la barra. La velocidad tangencial del líquido en cada punto es  $v_\varphi = (v_0/a)(b - \rho)$ . El sistema está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = -B\mathbf{u}_z$ . Calcular la f. e. m. inducida entre los puntos A-B.

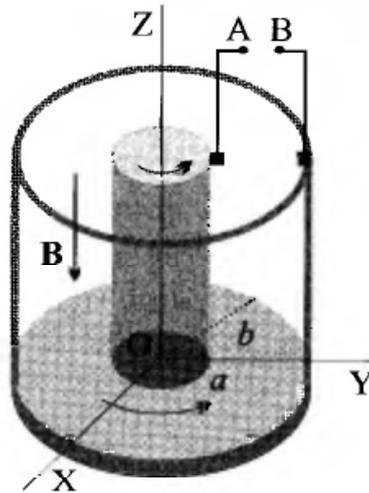


Figura P11.17

### Solución

Calculamos la f. e. m. mediante la ecuación (11.12),

$$\mathbf{E}' = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{v} = \frac{v_0}{a}(b - \rho) \mathbf{u}_\varphi ; \quad \mathbf{B} = -B \mathbf{u}_z$$

El campo  $\mathbf{E}'$  será,

$$\mathbf{E}' = -Bq \frac{v_o}{a}(b - \rho)(\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z) = -Bq \frac{v_o}{a}(b - \rho) \mathbf{u}_\rho$$

$$\mathbf{E}' = -B \frac{v_o}{a}(b - \rho) \mathbf{u}_\rho$$

La f.e.m. inducida entre los puntos A-B se calcula mediante la integración del campo sobre un camino radial entre los límites  $a$  y  $b$ .

$$\mathcal{E} = V_B - V_A = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\rho$$

$$V_B - V_A = \int_a^b B \frac{v_o}{a}(b - \rho) \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho d\rho = \int_a^b B \frac{v_o}{a}(b - \rho) d\rho$$

$$V_B - V_A = B \frac{v_o}{a} \left[ b\rho - \frac{1}{2}\rho^2 \right]_a^b = B \frac{v_o}{a} \left( b(b - a) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right)$$

realizando operaciones y simplificando tenemos que,

$$V_B - V_A = B \frac{v_o}{2a} (b - a)^2$$

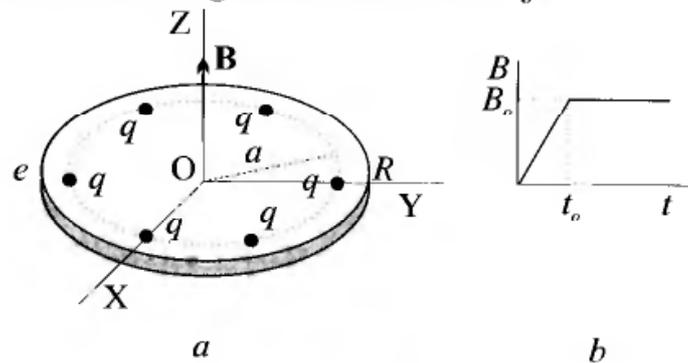
**PROBLEMA 11.18**

Sobre un disco dieléctrico de radio  $R$  y a una distancia  $a$  del centro se sitúan seis esferitas, de radio despreciable frente a  $R$ , con una carga  $q$ . El momento de inercia del conjunto es  $\mathcal{J}$ . Todo el sistema está en el seno de un campo magnético uniforme cuya variación temporal se muestra en la figura P2.18b.

Calcular la velocidad angular que adquiere el disco con la cargas en  $t = t_o/2$  segundos.

**Solución**

El problema se resuelve calculando primero las fuerzas que actúan sobre las cargas, suponiendo siempre que están unidas al disco y que el único grado de libertad del sistema es el giro alrededor del eje.



**Figura P11.18**

*Fuerzas debidas a campos constantes*

La fuerza que actúa sobre una carga en movimiento es la fuerza de Lorentz, cuya expresión es,

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E}_e + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

donde  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}_e$  son los campos, magnético y eléctrico producido por las otras cargas;  $q$  y  $\mathbf{v}$  son respectivamente el valor de la carga y su velocidad. Las fuentes de  $\mathbf{E}_e$  en este problema son, tomando una cualquiera de las esferitas cargadas, las restantes cinco cargas.

Dada la simetría de la distribución de cargas sobre una circunferencia, este campo ejerce una fuerza que tiende a variar las posiciones relativas de las cargas en la dirección radial. Puesto que las cargas están fijas y el único grado de libertad posible es la rotación, dicha fuerza deja invariantes las posiciones relativas de éstas, en otras palabras, esta fuerza no interviene en el movimiento de las cargas.

Para hallar el otro término de la fuerza de Lorentz tenemos que conocer  $\mathbf{B}$ , y en este caso es el campo magnético del enunciado en un instante dado. Este campo es distinto en cada momento. Pero como las cargas sólo se pueden mover en la dirección tangencial, dirección determinada por  $\mathbf{u}_\varphi$ , este término queda como

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qB \mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z = qB \mathbf{u}_\rho$$

es decir, que ejerce una fuerza en sentido radial. Dicha fuerza no contribuye al movimiento porque las cargas sólo pueden rotar.

De todo lo dicho se concluye que la fuerza de Lorentz con campos constantes no contribuye al movimiento de las cargas.

*Fuerzas debidas a campos variables***Campo eléctrico inducido**

Como tenemos un campo magnético variable, éste produce, de acuerdo con la ley de Faraday, un campo eléctrico inducido. La ley de Faraday se expresa como,

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \oint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} \right)$$

donde  $C$  es una línea cerrada, que es la circunferencia de radio  $a$  centrada en el eje de giro. Por la simetría del problema  $\mathbf{E}'$  tiene dirección tangencial ( $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{u}_\varphi$ ) y  $d\mathbf{l} = a d\varphi \mathbf{u}_\varphi$ , por tanto

$$\int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = E 2\pi a$$

Por otra parte  $S$  es la superficie que encierra  $C$  y, como  $\mathbf{B}$  es uniforme en

el espacio, tenemos que,

$$\oint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B}(t) (\pi a^2 \mathbf{u}_z) = B(t) \pi a^2$$

De la figura P11.18b se deduce que en el intervalo  $(0, t_o)$

$$B(t) = \frac{B_o}{t_o} t$$

Hemos recorrido el circuito  $C$  en dirección contraria a la agujas del reloj, sentido del vector unitario  $\mathbf{u}_\varphi$ , entonces el vector que indica la dirección y sentido de  $\mathbf{S}$  es, por la regla de la mano derecha,  $\mathbf{u}_z$ . Sustituyendo,

$$E' 2\pi a = -\frac{d}{dt} (B(t) \pi a^2)$$

de donde se despeja  $E'$ ,

$$E' = -\frac{a}{2} \frac{dB(t)}{dt}$$

Luego el campo eléctrico inducido está dado por

$$\mathbf{E}' = -\frac{a}{2} \frac{dB(t)}{dt} \mathbf{u}_\varphi$$

La fuerza que actúa sobre cualesquiera de las cargas es,

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}' = -\frac{qa}{2} \frac{dB(t)}{dt} \mathbf{u}_\varphi$$

### Par de fuerzas $\mathbf{T}$

El par de giro respecto al eje para cada una de las cargas es

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la expresión anterior y  $\mathbf{r} = a\mathbf{u}_\rho$ . Sustituyendo,

$$\mathbf{T}_i = -\frac{qa^2}{2} \frac{dB(t)}{dt} (\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_\rho) = -\frac{qa^2}{2} \frac{dB(t)}{dt} \mathbf{u}_z$$

El par de giro total es la suma de los 6 pares de giro parciales que son iguales en módulo, dirección y sentido, por tanto

$$\mathbf{T} = -3qa^2 \frac{dB(t)}{dt} \mathbf{u}_z$$

Este par de giro da lugar a una aceleración angular  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}/\mathcal{I}$ ,

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{3qa^2}{\mathcal{I}} \frac{dB(t)}{dt} \mathbf{u}_z$$

donde  $\mathcal{I}$  es el momento de inercia del disco.

La velocidad angular está dada genéricamente por  $\boldsymbol{\omega} = \int \boldsymbol{\alpha} dt$ . Transcurridos  $t_o/2$  segundos, será,

$$\boldsymbol{\omega} = -\int_0^{t_o/2} \frac{3qa^2}{\mathcal{I}} \frac{dB(t)}{dt} dt \mathbf{u}_z = -\frac{3qa^2}{\mathcal{I}} [B(t_o/2) - B(0)] \mathbf{u}_z$$

Sustituyendo la expresión del campo en el intervalo  $0 < t < t_0$ , obtenemos la velocidad angular en el instante  $t = t_0/2$ ,

$$\omega = -\frac{3B_0qa^2}{2\mathcal{J}}\mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 11.19

Tenemos un dispositivo formado por dos espiras circulares y coplanares, cuyos radios respectivos son  $a$  y  $b$ . El generador  $G$  indicado figura P11.19 mantiene una corriente  $I_b = I_0 \sin \omega t$  en la espira de radio  $b$ . La espira de radio  $a$  tiene una resistencia  $R$  y coeficiente de autoinducción  $L$ .

Suponemos que el campo magnético  $B$  en el círculo de radio  $a$  es prácticamente el mismo que en centro de la espira.

Calcular la corriente que circula por la espira de radio  $a$ .

### Solución

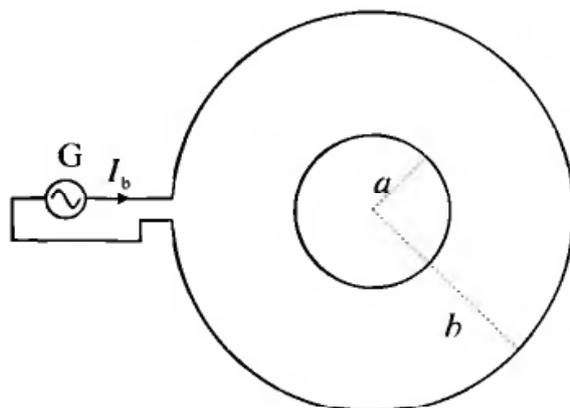


Figura P11.19

En este problema la corriente inducida también influye sobre el campo magnético en la propia espira, por lo que se debe tener en cuenta este efecto a través del coeficiente de autoinducción como lo expresa la ecuación (11.20).

La ecuación que relaciona la corriente  $I_a$  en la espira con el resto de los elementos que intervienen es la siguiente,

$$\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b = RI_a$$

$\mathcal{E}_b$  es la f.e.m. inducida en la espira por el campo magnético que crea la corriente  $I_b$  suministrada por el generador  $G$ .  $\mathcal{E}_a$  es la f.e.m. debida a la corriente  $I_a$  inducida en la propia espira. Aplicando la ecuación (11.1) para calcular  $\mathcal{E}_b$  y la ecuación (11.20) para  $\mathcal{E}_a$  obtenemos la ecuación diferencial.

El flujo sobre la espira debido a la corriente  $I_b$  es,

$$\Phi = \pi a^2 B$$

El valor de  $B$  es centro de una espira, como se mostró en el capítulo dedicado a la ley de Biot y Savart, es,

$$B = \mu_o \frac{I_b}{2b}$$

$$\Phi = \pi a^2 \frac{I_b}{2b} = \mu_o \frac{\pi a^2}{2b} I_o \text{ sen } \omega t$$

y

$$\mathcal{E}_b = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_o \frac{\pi a^2}{2b} \omega I_o \text{ cos } \omega t = E_o \text{ cos } \omega t$$

Con

$$E_o = -\mu_o \frac{\pi a^2}{2b} \omega I_o$$

La f.e.m.  $\mathcal{E}_a$  es,

$$\mathcal{E}_a = -L \frac{dI_a}{dt}$$

La ecuación diferencial queda de la siguiente forma.

$$L \frac{dI_a}{dt} + RI_a = E_o \text{ cos } \omega t \quad (11.19.1)$$

El segundo miembro de la ecuación, dado que,

$$e^{j\omega t} = \text{cos } \omega t + j \text{ sen } \omega t$$

se puede expresar como la parte real de una función compleja de la forma siguiente,

$$E_o \text{ cos } \omega t = \text{Re } E_o e^{j\omega t}$$

La ecuación (11.19.1) queda ahora de la forma,

$$L \frac{dI_a}{dt} + RI_a = E_o e^{j\omega t}$$

La solución particular de esta ecuación no homogénea nos proporciona la corriente  $I_a$  en régimen estacionario. Obtenemos dicha solución ensayando una de la forma,

$$I_a = \text{Re } I e^{j\omega t}$$

Llevando una solución de este tipo a la ecuación diferencial anterior queda,

$$(ILj\omega + RI) e^{j\omega t} = E_o e^{j\omega t}$$

Despejando  $I$  y teniendo en cuenta las relaciones siguientes:

$\mathbf{Z} = R + j\omega L$  es la impedancia compleja de la espira de radio  $a$ ,

$$\text{Módulo } |\mathbf{Z}| = (R^2 + (\omega L)^2)^{1/2} ; \text{ Fase } \theta = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

La corriente  $I$  será,

$$I = \frac{E_o}{R + j\omega L} = \frac{E_o}{(R^2 + (\omega L)^2)^{1/2}} e^{-j\theta}$$

En definitiva la solución de la ecuación diferencial no homogénea es,

$$I_a = \text{Re} \frac{E_o}{(R^2 + (\omega L)^2)^{1/2}} e^{j(\omega t - \theta)}$$

La parte real de esta última ecuación es la corriente que nos pide el problema, es decir,

$$I_a = \frac{E_o}{(R^2 + (\omega L)^2)^{1/2}} \cos(\omega t - \theta)$$

### PROBLEMA 11.20

Dos espiras, cuyos radios respectivos son  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ), están dispuestas en el plano  $YZ$  y conectadas como muestra la figura P11.20. El sistema está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = -B_o \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_x$ . Calcular la f.e.m. inducida que podemos observar entre los puntos  $NP$ .  $\Delta y$  se supone despreciable.

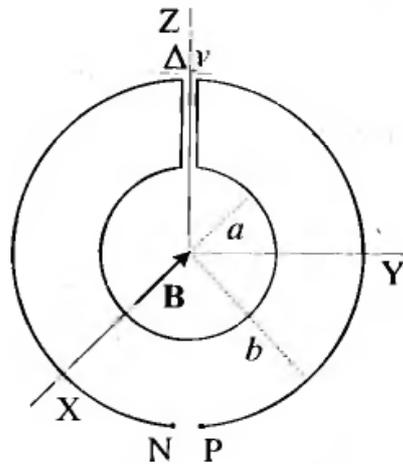


Figura P11.20

### Solución

El conjunto de las dos espiras actúa como una única espira cuya superficie es la diferencia de las dos. Por tanto, el flujo que atraviesa la espira es

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = BS_b - BS_a = -B \text{sen} \omega t (\pi b^2 - \pi a^2)$$

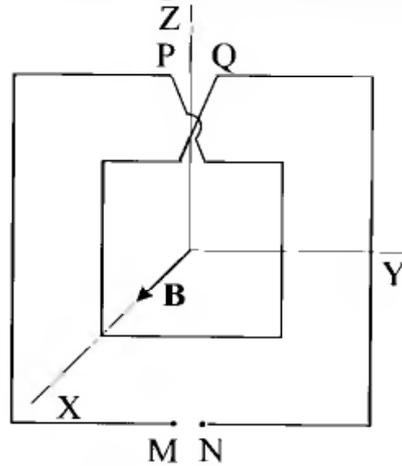
y la f.e.m. inducida será,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B\pi(b^2 - a^2)\omega \cos \omega t$$

**PROBLEMA 11.21**

Dos espiras cuadradas cuyos lados respectivos son  $L$  y  $2L$ , están conectadas como muestra la figura P11.21. El sistema está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = B_o \mathbf{u}_x$ .

Las espiras giran solidariamente con velocidad angular  $\omega$  en torno al eje Z. Calcular la f.e.m. inducida que podemos observar entre los puntos MN.

**Figura P11.21****Solución**

Dada la disposición de las espiras que, como puede observarse presenta la misma dirección de circulación de la corriente, la f.e.m. inducida resultara de la variación del flujo que atraviesa la espira grande más la de la espira pequeña.

El flujo lo calculamos a partir de la expresión

$$\Phi = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Ahora bien, puesto que las espiras giran con velocidad  $\omega$  en torno a eje Z, el producto escalar  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  dependerá en cada instante del coseno del ángulo que forme la dirección del campo con el vector normal a cada una de las superficies de las espiras.

$$\Phi = \oint B_o \cos(\omega t) ds$$

Así pues, como  $ds = 2Ldy$  para la espira de lado  $2L$ , y  $ds = Ldy$  en el caso de la espira de lado  $L$ ,

$$\Phi_T = \int_{-L}^L B_o \cos(\omega t) (2Ldy) + \int_{-L/2}^{L/2} B_o \cos(\omega t) (Ldy)$$

$$\Phi_T = 5L^2 B_o \cos(\omega t)$$

La f.e.m. inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 5L^2 B_0 \omega \sin \omega t$$

### PROBLEMA 11.22

Sobre el eje Z disponemos un hilo indefinido por el que circula una corriente  $I = I_0 \sin \omega t$ . A una distancia  $a$  colocamos una espira abierta ABC como muestra la figura 11.22. La parte curva de la espira obedece a la ecuación  $z = ab/y$ . Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

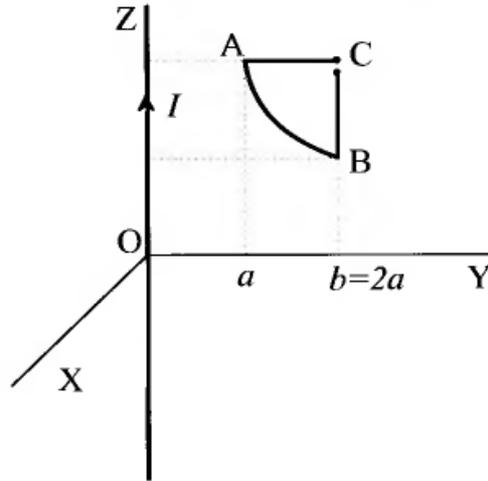


Figura P11.22

### Solución

El campo magnético creado por la corriente rectilínea se obtiene aplicando el teorema de Ampère, y en este caso,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \mathbf{u}_x$$

en el plano YZ.

Por otra parte, la ley de Faraday nos dice que

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En la zona comprendida dentro de la espira

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Donde se obtiene de la forma siguiente:

$$d\mathbf{s} = h dy (-\mathbf{u}_x)$$

$$h = z(a) - z(y) = \frac{ab}{a} - \frac{ab}{y}$$

$$d\mathbf{s} = ab \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{y} \right) dy (-\mathbf{u}_x)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que  $b = 2a$

$$d\Phi = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{1}{y} \mathbf{u}_x \cdot (-\mathbf{u}_x) 2a^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{\mu_o I 2a^2}{2\pi} \frac{dy}{y} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{y} \right)$$

El flujo total será

$$\Phi = \frac{\mu_o I 2a^2}{2\pi} \int_a^{2a} \left( \frac{1}{ay} - \frac{1}{y^2} \right) dy = \frac{\mu_o I 2a^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{a} \ln y + \frac{1}{y} \right]_a^{2a}$$

$$\Phi = \frac{\mu_o a}{\pi} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) I_o \sin \omega t$$

y la fuerza electromotriz inducida es,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_o a \omega}{\pi} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) I_o \cos \omega t$$

### PROBLEMA 11.23

Tenemos dos espiras  $L_1$  y  $L_2$  circulares de radio  $a$  y dispuestas como indica la figura P11.23.1. Centrada en el origen y sobre un plano que forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje Y se sitúa una espira cuadrada de lado  $0,1a$ , con una fina hendidura en uno de sus lados.

1) Por las espiras  $L_1$  y  $L_2$  circula una corriente  $I = I_o \sin \omega t$ , ¿cual será la f.e.m. inducida en la espira cuadrada?

2) Si por la espira  $L_1$  circula una corriente  $I_1 = I_o \cos \omega t$  y por la  $L_2$  otra  $I_2 = I_o \sin \omega t$ , ¿cual será la f.e.m. inducida en la espira cuadrada?

Suponemos que el campo magnético sobre toda la espira cuadrada es el mismo que crean  $L_1$  y  $L_2$  en el centro O.

### Solución

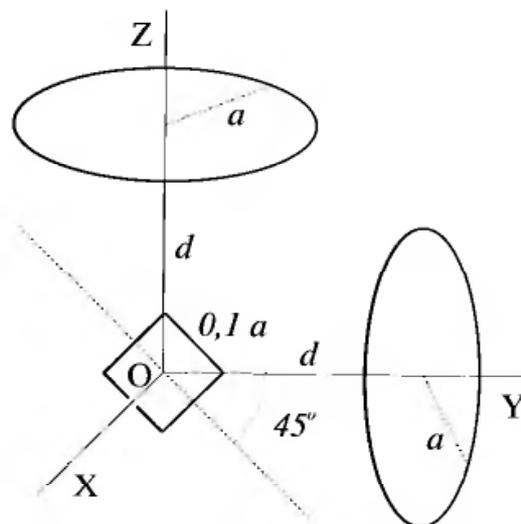


Figura P11.23.1

1) Calculamos la f.e.m. inducida mediante la ley de Faraday en la forma expresada por la ecuación (11.1). Para ello calculamos el flujo sobre la espira cuadrada debido al campo magnético creado por las dos espiras  $L_1$  y  $L_2$ .

Como vimos en el capítulo dedicado a la aplicación de la ley de Biot y Savart, el valor de  $\mathbf{B}$  creado en O por cada espira es,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_o \frac{a^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}} I_1 (-\mathbf{u}_z) ; \mathbf{B}_2 = \mu_o \frac{a^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}} I_2 (-\mathbf{u}_y)$$

El ángulo que forma la normal a la espira cuadrada con los ejes Z e Y es de  $45^\circ$ , y la superficie es  $S = 10^{-2} a^2$ , por tanto el flujo será,

$$\Phi = (B_1 + B_2) 10^{-2} a^2 \cos \frac{\pi}{4}$$

Como  $I_1 = I_2 = I_o \text{sen} \omega t$ ,

$$\Phi = 2\mu_o \frac{a^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}} \frac{\sqrt{2}}{2} 10^{-2} a^2 I_o \text{sen} \omega t = \Phi_o \text{sen} \omega t$$

Donde

$$\Phi_o = \mu_o \frac{a^4 10^{-2}}{2(a^2 + d^2)^{3/2}} \sqrt{2} I_o$$

La f.e.m. inducida es,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi_o \omega \cos \omega t$$

Una representación gráfica de cómo se suman los flujos debidos a las dos espiras con la misma corriente se muestra figura P11.23.2a. Dicha figura muestra que la resultante es de amplitud  $K\sqrt{2}$  y se mueve sobre la recta que forma un ángulo de  $45^\circ$  con los ejes; es decir, la composición de los campos creados por las dos espiras tiene dirección perpendicular a la espira cuadrada y su amplitud oscila entre  $\pm\sqrt{2}\Phi_o\omega$ .

2) En el segundo caso las corrientes en las espiras son diferentes, de forma que ahora,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_o (\text{sen} \omega t + \cos \omega t) = \Phi_o (\text{sen} \omega t + \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \omega t))$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica,

$$\text{sen} A + \text{sen} B = 2 \text{sen}((A + B)/2) \times \cos((A - B)/2)$$

$$\Phi = \Phi_o 2 \text{sen} \frac{\pi}{4} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \Phi_o \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

La f.e.m. inducida es ahora,

$$\mathcal{E} = \sqrt{2} \Phi_o \omega \text{sen}(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

La figura P11.23.2b muestra la composición de los flujos debidos a las espiras con corrientes desfasadas  $90^\circ$ . El resultado es un flujo giratorio cuya amplitud es  $\sqrt{2}\Phi_o\omega$  y produce una f.e.m. desfasada  $45^\circ$  con respecto a las

corrientes que circulan por las espiras; retrasada con respecto a la corriente  $I_1$  y adelantada con respecto a  $I_2$ .

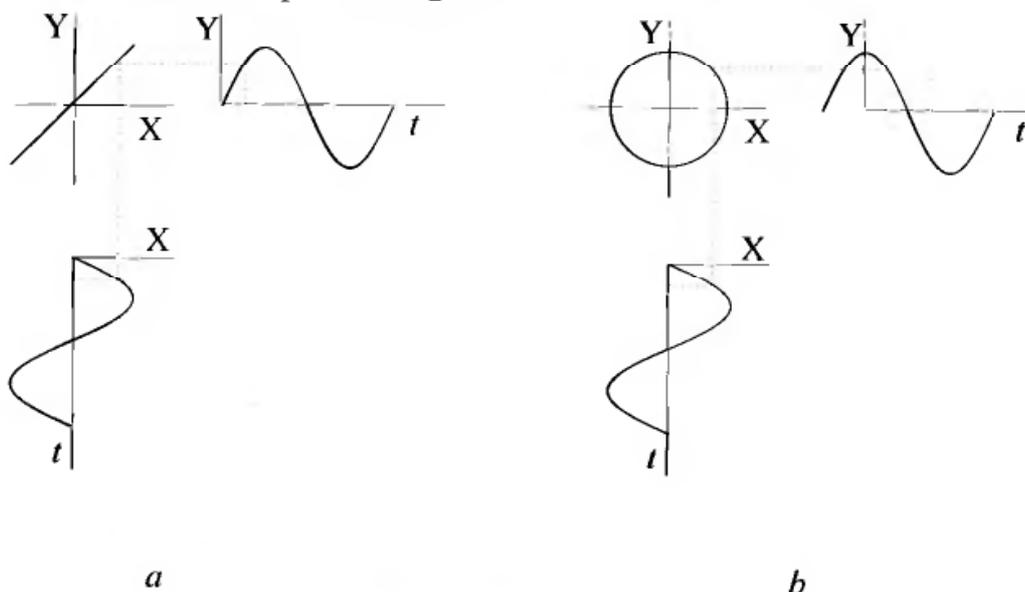


Figura P11.23.2

En este procedimiento que permite obtener un campo (flujo) giratorio se basa el motor de inducción; dicho motor es el más usual en las distintas máquinas utilizadas en la industria.

### PROBLEMA 11.24

Tenemos una espira conductora de lado  $a$  situada a una distancia  $d$  del origen de coordenadas, cuyo plano forma un ángulo de  $30^\circ$  con el plano XY (véase la figura P11.24). Sobre el plano XZ tenemos un plano conductor de espesor muy pequeño ( $e \ll a$ ), cuya dimensión  $l$  en las direcciones X y Z es muy grande comparada con  $a$  y  $d$ , de forma que para el cálculo del campo se le puede considerar infinito. Suponiendo que por el plano conductor circula una corriente  $I = I_0 \cos \omega t$  en la dirección del eje Z, calcular la f.e.m. inducida en la espira.

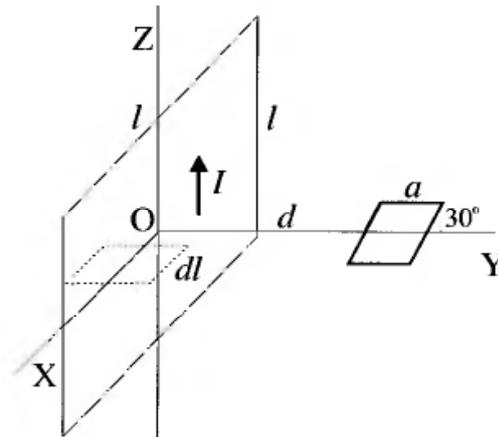
### Solución

Lo primero es encontrar el campo  $\mathbf{B}$  generado por el plano delgado de corriente. En la aproximación de plano infinito, esto es  $l \gg d, a$ , se puede obtener fácilmente a partir de la ley de Ampère aplicada a un camino que rodee una longitud  $dl$  del plano. En el supuesto de plano indefinido el campo es paralelo al plano y únicamente los tramos paralelos a dicho plano contribuyen a la circulación de  $\mathbf{B}$  sobre el camino cuadrado de lado  $dl$  mostrado en la figura P11.24.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \simeq B dl + B dl = \mu_o \left( \frac{I}{l} \right) dl$$

de donde

$$B = \frac{\mu_o I}{2l}$$



**Figura P11.24**

La dirección de  $\mathbf{B}$  en la zona que nos interesa, semiplano  $y > 0$ , la podemos encontrar por la regla de la mano derecha

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{2l} (-\mathbf{u}_x)$$

Procede ahora calcular el flujo de este campo  $\mathbf{B}$  a través de la espira cuadrada. Como el campo es homogéneo podemos usar la expresión

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

donde  $\mathbf{S}$  es el vector superficie de la espira y que podemos escribir como

$$\mathbf{S} = a^2 (\mathbf{u}_z \cos 30^\circ + \mathbf{u}_x \sin 30^\circ) = a^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z + \frac{1}{2} \mathbf{u}_x \right)$$

Sustituyendo  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{S}$  en la expresión de  $\Phi$

$$\Phi = -\frac{\mu_o a^2}{4l} I = -\frac{\mu_o a^2}{4l} I_o \cos \omega t$$

La fuerza electromotriz se obtiene a partir de la ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_o a^2 \omega}{4l} I_o \sin \omega t$$

### PROBLEMA 11.25

Un disco conductor de radio  $R$ , espesor  $h$  ( $h \ll R$ ) y conductividad  $\gamma$ , se sitúa en presencia de un campo magnético alterno  $\mathbf{B} = B_o \sin \omega t \mathbf{u}_z$ , uniforme y paralelo al eje del disco.

Calcular la densidad de corriente inducida en función de la distancia al eje del disco. Indicar su dirección y sentido.

### Solución

En este caso obtenemos el resultado aplicando la ley de inducción electromagnética en medios estacionarios expresada por la ecuación (11.3).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Sobre una circunferencia de radio  $\rho$ ,

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{u}_\varphi$$

$$d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad d\mathbf{s} = 2\pi\rho d\rho \mathbf{u}_z$$

Los límites de integración para la integral de línea son 0 y  $2\pi$ , y para la de superficie 0 y  $\rho$ . Aplicando estos datos la ecuación anterior queda de la forma,

$$\int_0^{2\pi} E_\varphi \rho d\varphi (\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{u}_\varphi) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\rho \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_z 2\pi\rho d\rho$$

$$E_\varphi 2\pi\rho = -\pi\rho^2 \frac{\partial}{\partial t} (B_o \sin \omega t)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{2}\rho\omega B_o \cos \omega t$$

La ley de Ohm  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$  nos permite calcular la densidad de corriente en función de la distancia  $\rho$  al eje,

$$J_\varphi = -\frac{1}{2}\rho\omega\gamma B_o \cos \omega t \quad \rightarrow \quad \mathbf{J} = -\left(\frac{1}{2}\rho\omega\gamma B_o \cos \omega t\right) \mathbf{u}_\varphi$$

El sentido cambia con el valor de  $\cos \omega t$ .

### PROBLEMA 11.26

Por el conductor rectilíneo e indefinido de radio  $a$  indicado en la figura P11.26 circula una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J} = J\rho^2 \mathbf{u}_z$ .

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre el conductor y la espira cuadrada de lado  $a$ , situada a una distancia  $5a$  del eje.

### Solución

El sistema se comporta como si la corriente total que circula por el conductor de radio  $a$  lo hiciera por el eje de dicho conductor.

La corriente total es,

$$I = \int_0^a J\rho^2 2\pi\rho d\rho (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z) = \frac{1}{2} J \pi a^4$$

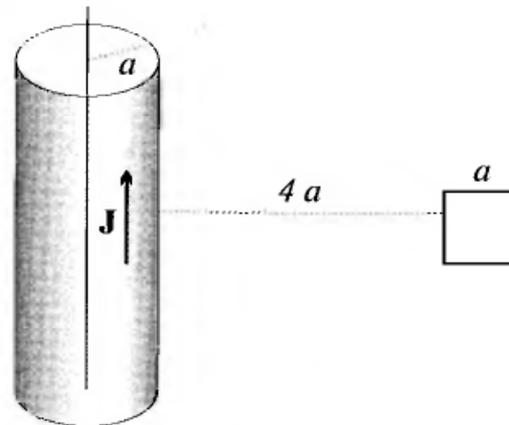


Figura P11.26

Calculamos en primer lugar el campo magnético debido a la corriente  $I$  mediante el teorema de Ampère, después obtenemos el flujo a través de la espira y terminamos calculando  $M_{12} = M$  mediante la ecuación (11.14).

El campo magnético  $\mathbf{B}$  es,

$$\mathbf{B} = \mu_o \frac{1}{4} J a^4 \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

La superficie elemental en la espira es,  $ds = a d\rho \mathbf{u}_\varphi$ .

El flujo a través de la citada espira será,

$$\Phi_{12} = \Phi = \int_{5a}^{6a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_o \frac{1}{4} J a^5 \int_{5a}^{6a} \frac{d\rho}{\rho} = \mu_o \frac{1}{4} J a^5 \ln \left( \frac{6}{5} \right)$$

El coeficiente de inducción mutua es,

$$M_{12} = M = \frac{\Phi}{I} = \mu_o \frac{a}{2\pi} \ln \left( \frac{6}{5} \right)$$

### PROBLEMA 11.27

Por un tubo de plástico recto e indefinido circula un líquido con cargas eléctricas, de forma que produce una densidad de corriente  $\mathbf{J} = C\rho \mathbf{u}_z$ . El radio del tubo es  $a$ . Una espira conductora cuadrada de lados  $L = 2a$  se dispone como indica la figura P11.27.

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre tubo de corriente y espira.

#### Solución

1) *Campo magnético.*

**Dentro del tubo**

Aplicando el teorema de Ampère a un camino circular, incluido dentro del tubo,

$$\int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

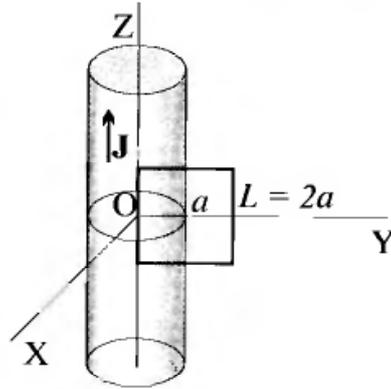


Figura P11.27

donde  $\mu$  es la permeabilidad del líquido. Dada la simetría del problema, tomamos  $\mathbf{B}_1 \parallel d\mathbf{l}$  y  $d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi$ ,  $d\mathbf{s} = \rho d\rho d\varphi \mathbf{u}_z$ . Sustituyendo,

$$B_1 2\pi\rho = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho C\rho(\rho d\rho) = 2\pi\mu C \frac{\rho^3}{3}$$

Despejando  $B_1$ ,

$$B_1 = \mu \frac{C}{3} \rho^2 \rightarrow \mathbf{B}_1 = \mu \frac{C}{3} \rho^2 \mathbf{u}_\varphi$$

#### Fuera del tubo

Ahora el circuito es exterior al tubo,  $\rho > a$ .

$$B_2 2\pi\rho = \mu_o \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a C\rho(\rho d\rho) = 2\pi\mu_o C \frac{a^3}{3}$$

La expresión de la derecha es  $\mu_o I$  por lo que

$$I = 2\pi C \frac{a^3}{3}$$

Y ahora, despejando  $B_2$ ,

$$B_2 = \mu_o \frac{C a^3}{3 \rho}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_o \frac{C a^3}{3 \rho} \mathbf{u}_\varphi = \mu_o \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi$$

#### 2) Flujo

Ahora que ya tenemos la expresión completa del campo, vamos a calcular el flujo total que atraviesa la espira.

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Puesto que la espira está situada a lo largo del eje Y, podemos tomar  $\rho = y$ ,  $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_x$ ,  $d\mathbf{s} = Ldy \mathbf{u}_x$ .

$$\Phi = L \left( \int_0^a B_1 dy + \int_a^{2a} B_2 dy \right)$$

$$\Phi = \frac{LC}{3} \left( \mu \int_0^a y^2 dy + \mu_o \int_a^{2a} \frac{a^3}{y} dy \right) = \frac{LC}{3} a^3 \left( \frac{\mu}{3} + \mu_o \ln 2 \right)$$

3) *Coefficiente de inducción mutua*

Para hallar el coeficiente de inducción mutua se utiliza la ecuación (11.14), es decir, dividimos el flujo que atraviesa la espira por la corriente que produce el flujo,

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\Phi}{(2/3)\pi C a^3} = \frac{LC}{3} a^3 \left( \frac{\mu}{3} + \mu_o \ln 2 \right) \frac{3}{2\pi C a^3} = \frac{L}{6\pi} (\mu + 3\mu_o \ln 2)$$

Sustituyendo  $L = 2a$ ,

$$M = \frac{a}{3\pi} (\mu + 3\mu_o \ln 2)$$

### PROBLEMA 11.28

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre un conductor rectilíneo e indefinido en la dirección del eje X, cuya sección transversal se muestra en la figura P11.28, y una espira cuadrada, de lado  $L = R$ , situada como indica la figura.

La corriente circula por la zona sombreada, el resto es hueco de sección circular y radio  $R/2$ .

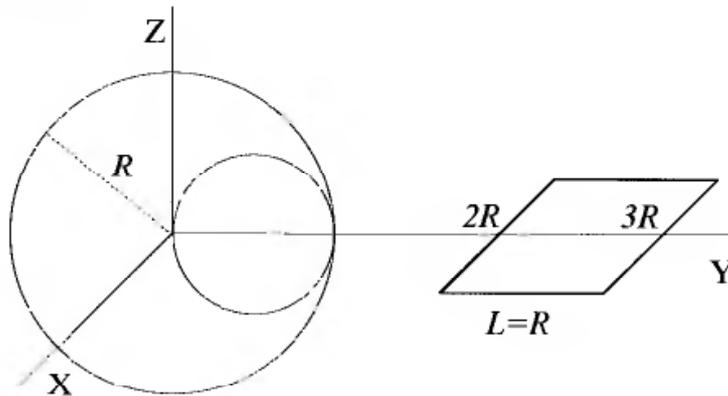


Figura P11.28

### Solución

El coeficiente de inducción mutua se obtiene calculando el flujo del campo producido por la corriente en el conductor indefinido en la dirección del eje X a través de la espira de lado  $L$ , y dividiendo dicho flujo por la citada corriente.

En primer lugar calculamos el campo magnético producido por la corriente. Para ello aplicamos el principio de superposición al sistema, que es equivalente a un conductor de radio  $R$  y centro en el origen de coordenadas  $O(0, 0, 0)$ , por el que circula una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J} = J \mathbf{u}_x$ , más otro conductor de radio  $R/2$  centro en el punto  $(0, R/2, 0)$  y por el que circula una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J}' = -J \mathbf{u}_x$ .

Para calcular la densidad de corriente  $J$  tenemos en cuenta que la corriente total  $I$  atraviesa únicamente la zona sombreada, es decir,

$$J = \frac{I}{S_s}$$

y

$$S_s = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi R^2$$

por tanto la densidad de corriente será,

$$J = \frac{4I}{3\pi R^2}$$

### 1) Campo magnético

#### Campo debido al conductor de radio $R$

Aplicamos el teorema de Ampère sobre un camino circular de radio  $\rho$  y centro en el origen, y tenemos en cuenta que la simetría cilíndrica de la distribución determina que el campo magnético es tangencial a la circunferencia de radio  $\rho$  en todos sus puntos, además su módulo es el mismo en cada punto de dicha circunferencia.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_{1\varphi} ; \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \pi R^2 J = \frac{4}{3}I$$

De las relaciones anteriores se deduce la componente tangencial del campo,

$$B_{1\varphi} = \frac{\mu_o}{2\pi\rho} \frac{4}{3}I = \mu_o \frac{2I}{3\pi\rho}$$

Sobre los puntos del eje  $Y$  el campo tiene la dirección y sentido de  $\mathbf{u}_y$ , y  $\rho = y$ , en consecuencia,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_o \frac{2I}{3\pi y} \mathbf{u}_y$$

#### Campo debido al conductor de radio $R/2$

Se procede de forma análoga al caso anterior, pero ahora  $J' = -J$ , el radio de la sección es  $R/2$ , y el centro está en el punto  $(0, R/2, 0)$ . Ahora

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho' B_{2\varphi}$$

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 J' = -\frac{4I}{3\pi R^2} \frac{\pi R^2}{4} = \frac{I}{3}$$

$$B_{2\varphi} = \frac{I}{3} \frac{\mu_o}{2\pi\rho'}$$

Sobre el eje Y la relación entre  $\rho$  y  $\rho'$  es  $\rho' = \rho - R/2$ , y por tanto  $y' = y - R/2$ .

$$B_{2\varphi} = \frac{I}{3} \frac{\mu_o}{2\pi(y - R/2)}$$

La dirección y sentido del campo  $\mathbf{B}_2$  sobre el eje Y es el correspondiente a  $-\mathbf{u}_y$ , en definitiva,

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_o I}{6\pi(y - R/2)} \mathbf{u}_y$$

El campo total creado por la corriente es,

$$\mathbf{B}(y) = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \mu_o \frac{2I}{3\pi} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{4(y - R/2)} \right) \mathbf{u}_y$$

### 2) Flujo magnético

Una vez conocido el campo magnético podemos calcular el flujo magnético a través de la espira de la do  $L$ , situada entre las coordenadas  $y = 2R$  e  $y = 3R$ .

$$\Phi = \int \mathbf{B}(y) \cdot d\mathbf{s} = \int_{2R}^{3R} \mu_o \frac{2I}{3\pi} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{4(y - R/2)} \right) \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y L dy$$

$$\Phi = \mu_o \frac{2I}{3\pi} L \int_{2R}^{3R} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{4(y - R/2)} \right) dy$$

$$\Phi = \mu_o \frac{2I}{3\pi} L \left[ \ln y - \frac{1}{4} \ln(y - R/2) \right]_{2R}^{3R}$$

$$\Phi = \mu_o \frac{2I}{3\pi} L \left( \ln(3/2) - \frac{1}{4} \ln(5/3) \right) \simeq 0,277 \mu_o \frac{LI}{\pi}$$

### 3) Coeficiente de inducción mutua

El coeficiente de inducción mutua será,

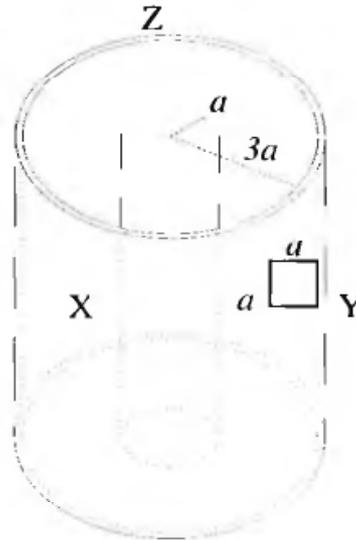
$$M = \frac{\Phi}{I} \simeq 0,277 \mu_o \frac{L}{\pi}$$

Es decir, un factor geométrico que depende de la forma, dimensiones y posición relativa de conductor y espira.

**PROBLEMA 11.29**

En el interior de un cable coaxial indefinido introducimos una espira cuadrada de lado  $a$ , situada sobre un plano que pasa por el eje  $Z$  y en la posición indicada en la figura P11.29.

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre cable coaxial y espira.



**Figura P11.29**

**Solución**

De forma análoga a los casos anteriores, obtenemos el coeficiente de inducción mutua a través del cálculo del flujo de  $\mathbf{B}$  en la espira producido por la corriente que circula en el cable coaxial. Obsérvese que sólo la corriente en el conductor central produce campo en la zona de la espira. La definición de coeficiente de autoinducción es,

$$M = \frac{\Phi}{I}$$

El flujo del campo magnéticos es

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

donde  $S$  es la superficie de la espira.

Mediante el teorema de Ampère obtenemos la expresión de  $\mathbf{B}$  producido por la corriente rectilínea del conductor central

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

y  $d\mathbf{s} = dz d\rho \mathbf{u}_\varphi$

Sustituyendo  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{s}$ , y teniendo en cuenta que los límites de integración

son:  $2a$  y  $3a$  para la variable  $y$ , y  $0 - a$  para la  $z$ ,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{2a}^{3a} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^a dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

El valor del coeficiente de inducción mutua será,

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

## Capítulo 12

# CAMPO MAGNÉTICO EN MATERIALES

## 12.1 INTRODUCCIÓN

### 12.1.1 DISTRIBUCIÓN DE DIPOLOS: IMANACIÓN

Los medios materiales están compuestos por átomos y moléculas, que a su vez se componen de partículas como los protones, neutrones y electrones. Los protones y neutrones se concentran en el núcleo y los electrones están dispuestos alrededor del núcleo. El movimiento de los electrones alrededor del núcleo se asimila a una corriente sobre una espira, esta produce un momento magnético llamado momento magnético orbital. Además los electrones se caracterizan por tener un momento magnético intrínseco llamado espín. Los protones del núcleo también tienen un momento magnético intrínseco pero es despreciable frente a los momentos orbital y de espín de los electrones. Los distintos átomos que componen un material pueden tener un momento magnético total distinto de cero o nulo, dependiendo de que los momentos orbitales y de espín correspondientes a los electrones se anulen o no entre sí. Cuando los átomos tienen un momento magnético distinto de cero, puede suceder que su orientación sea al azar, lo que ocurre en los materiales llamados paramagnéticos, o bien que se produzca una orientación espontánea de todos los momentos en una dirección, como ocurre en los medios ferromagnéticos.

Si ponemos un material en presencia de un campo magnético los dipolos se orientan en la dirección del campo debido al par de fuerzas que se ejerce sobre cada dipolo magnético. Además el campo perturba el momento orbital e induce un cambio en los momentos magnéticos orbitales. En resumen, un

material puede ser considerado como una distribución de dipolos sobre el volumen que ocupa dicho material.

Desde un punto de vista macroscópico se tienen en cuenta los momentos dipolares magnéticos mediante la definición de un vector, llamado **imanación o magnetización**  $\mathbf{M}$ , que es función de los momentos magnéticos atómicos. Si tomamos  $\mathbf{m}_i$  como el momento dipolar de cada átomo y consideramos un volumen elemental  $\Delta v$ , la suma vectorial de los momentos magnéticos en  $\Delta v$  será  $\sum \mathbf{m}_i$ ; la imanación  $\mathbf{M}$  se define mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta v} \quad (12.1)$$

$\mathbf{M}$  es el momento dipolar magnético por unidad de volumen, conocido con el nombre de **imanación**. En la definición el límite de  $\Delta v$  se considera de forma que  $\Delta v$  sea muy pequeño desde un punto de vista macroscópico pero al mismo tiempo el número de momentos dipolares  $\mathbf{m}_i$  en su interior debe ser grande. De esta forma la función vectorial  $\mathbf{M}$  es una función continua que depende de cada punto considerado.

Las dimensiones de  $\mathbf{M}$ , dado que  $\mathbf{m}$  tiene dimensiones de  $I S$ , serán A/m.

### 12.1.2 POTENCIAL Y CAMPO DEBIDO A UN MATERIAL IMANADO

#### 12.1.2.1 Potencial vector magnético

Un material imanado origina un potencial vector magnético y un campo  $\mathbf{B}$ , cuyos valores se calculan de la forma siguiente.

El momento dipolar magnético correspondiente a un volumen elemental  $dv'$ , teniendo en cuenta la definición (12.1), es:

$$d\mathbf{m}' = \mathbf{M}(\mathbf{r}')dv'$$

Tomamos la ecuación (10.31) que proporciona el potencial vector debido a un dipolo magnético; en este caso, dado que el dipolo está en la posición  $\mathbf{r}'$ , dicho potencial será,

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Integrando  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  queda de la forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (12.2)$$

Considerando la relación vectorial siguiente,

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

La ' significa derivación con respecto a las coordenadas de  $\mathbf{r}'$ . Sustituyendo en la ecuación (12.2) y considerando la relación vectorial,

$$\oint_S \mathbf{C} \times d\mathbf{s} = - \int_V (\nabla \times \mathbf{C}) dv$$

la ecuación (12.2) se transforma en,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}' ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (12.3)$$

$\mathbf{n}'$  es el vector unitario normal a la superficie con sentido hacia el exterior.

Comparando la ecuación anterior con las ecuaciones (10.17) y (10.20), vemos que el potencial vector magnético debido a una distribución de dipolos, material imanado, se puede considerar como producido por las densidades de corriente distribuidas por el volumen y superficie correspondientes, definidas mediante las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M} \quad ; \quad \mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}' \quad (12.4)$$

Se suelen representar prescindiendo de la ',

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad ; \quad \mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (12.5)$$

A estas densidades de corrientes se las llama densidades de corriente de imanación; también reciben el nombre de densidades de corriente localizada o amperianas.

La densidad  $\mathbf{J}_m$  se debe a la no uniformidad del vector imanación  $\mathbf{M}$  dentro del material. La densidad  $\mathbf{K}_m$  tiene su origen en la discontinuidad de  $\mathbf{M}$  sobre la superficie de separación entre dos medios o un medio y el vacío.

En la frontera entre dos materiales cuyas imanaciones respectivas sean  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$ , se verifica que la densidad de corriente superficial neta es,

$$\mathbf{K}_m = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \quad (12.6)$$

### 12.1.2.2 Campo magnético: Potencial escalar magnético

Podemos calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  debido a un material imanado mediante la ecuación  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , o bien utilizando las densidades de corriente  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$  en la expresión de Biot y Savart.

El segundo procedimiento nos lleva a la siguiente ecuación,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (12.7)$$

El primer procedimiento consiste en utilizar  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con el vector  $\mathbf{A}$  definido por la ecuación (12.2). Además hay que tener en cuenta la relación vectorial,

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

Con  $\mathbf{F} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')$  y  $\mathbf{G} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ . Dado que la derivación es con respecto a las coordenadas  $\mathbf{r}$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{M}(\mathbf{r}') = 0$$

Considerando además que,

$$\nabla \left( \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mathbf{M} \times \nabla \times \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

Como además se cumple que,

$$\nabla \times \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 0$$

dado que  $\nabla \times \nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 0$ , y

$$\nabla \cdot \left( \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

es decir, se anula en todos los puntos salvo en los que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  que vale  $4\pi$ . En resumen,  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  queda de la forma siguiente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mu_o \nabla \left( \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \right) \quad (12.8)$$

En el segundo miembro de la igualdad anterior se puede introducir una función escalar  $\phi_m = V_m$  definida por la ecuación siguiente,

$$\phi_m(\mathbf{r}) = V_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (12.9)$$

La función  $\phi_m(\mathbf{r})$  se denomina **potencial escalar magnético** generado por la distribución de dipolos  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ .

La ecuación (12.9) se puede expresar de otra forma. Si tenemos en cuenta la relación vectorial,

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{M} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

y además aplicamos el teorema de la divergencia al primer término del segundo miembro, en definitiva queda,

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (12.10)$$

Los términos  $\nabla' \cdot \mathbf{M}$  y  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$  se conocen respectivamente como densidad volumétrica y superficial de "polos" magnéticos,

$$\rho_m = \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') ; \sigma_m = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} \quad (12.11)$$

La forma definitiva que adopta el campo magnético debido a una distribución de dipolos es,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_o \nabla \phi_m + \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (12.12)$$

Con  $\phi_m$  definido mediante la ecuación (12.10) o la (12.9).

### 12.1.3 INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO

El campo magnético  $\mathbf{B}$  en el caso general, cuando existe una distribución de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  y una imanación  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ , viene dada por la expresión resultante de combinar las ecuaciones (9.7) y (12.12), es decir,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \mu_o \nabla \phi_m + \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (12.13)$$

Si aplicamos la forma diferencial del teorema de Ampère a la ecuación anterior, dado que  $\nabla \times \nabla \phi_m = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{B}$  en este caso será,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_o \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mu_o \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

Como  $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_m$ ,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_o (\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_m(\mathbf{r})) \quad (12.14)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que el rotacional del campo magnético  $\mathbf{B}$  depende de las corrientes libres y ligadas o de imanación.

Transponiendo  $\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$  al primer miembro tendremos,

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_o} - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (12.15)$$

La última ecuación sugiere la definición de un nuevo vector de campo, el vector **intensidad de campo magnético**  $\mathbf{H}$ , mediante la ecuación,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (12.16)$$

Sustituyendo esta ecuación en (12.15) obtendremos,

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (12.17)$$

Ecuación muestra que el rotacional de  $\mathbf{H}$ ,  $\nabla \times \mathbf{H}$ , a diferencia de  $\nabla \times \mathbf{B}$ , sólo depende de la corriente libre  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ . Es decir, la circulación de  $\mathbf{H}$  sobre un camino cerrado  $C$  sólo depende de la corriente libre neta, corriente originada por el movimiento de cargas libres, que atraviesa la superficie cerrada por el camino  $C$ .

De la ecuación (12.16) se deduce que las dimensiones de  $\mathbf{H}$  son idénticas a las de  $\mathbf{M}$ , es decir,  $\mathbf{H}$  se mide en A/m.

#### 12.1.4 ECUACIONES DEL CAMPO EN MATERIALES

Interesa expresar de forma resumida como quedan las ecuaciones que relacionan los vectores de campo  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  con las corrientes libres y ligadas (corrientes de imanación) o lo que es lo mismo, con  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{M}$ .

Cuando no existe medio material,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (12.18)$$

En el caso de que tengamos medio material y distribución de corriente  $\mathbf{J}$ , las ecuaciones anteriores son de la misma forma, pero el rotacional de  $\mathbf{B}$  es,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_m(\mathbf{r})) \quad (12.19)$$

Ecuación que expresa la dependencia del  $\nabla \times \mathbf{B}$  con respecto a los dos tipos de corriente, libre y ligada o de imanación.

Aplicando el teorema de Stokes podemos transformar la ecuación (12.18) para  $\nabla \times \mathbf{H}$  en la siguiente,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (12.20)$$

La última ecuación nos permite, con determinadas condiciones de simetría, calcular  $\mathbf{H}$  en función del flujo de la corriente libre  $I$ .

Mediante las ecuaciones (12.16) y (12.13) podemos expresar el campo  $\mathbf{H}$  en función de las corrientes libres y el potencial escalar magnético o la imanación  $\mathbf{M}$ . Llevando (12.13) a (12.16) queda,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \phi_m \quad (12.21)$$

Ecuación que muestra la dependencia de  $\mathbf{H}$ , tanto de la corrientes libres como de las ligadas.

Si las corrientes libres son nulas,  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , el campo  $\mathbf{H}$  se puede obtener en función del potencial escalar, es decir,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi_m = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left( \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M} dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (12.22)$$

Calculando la divergencia de  $\mathbf{H}$  en la ecuación (12.16), obtenemos la relación siguiente,

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (12.23)$$

Esta ecuación muestra que en un material las fuentes del campo  $\mathbf{H}$  son  $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ . Dichas fuentes se ponen de manifiesto cuando hay una discontinuidad o no uniformidad en la distribución  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ .

El conjunto de las ecuaciones de campo resumidas en este apartado nos permiten calcular  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  si conocemos las distribuciones de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  e imanación  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ .

### 12.1.5 SUSCEPTIBILIDAD Y PERMEABILIDAD

Los medios materiales, desde el punto de vista del campo magnético, tienen unas propiedades que permiten su clasificación. Dichas propiedades se expresan a través de las ecuaciones constitutivas que relacionan los vectores  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$ .

En un toroide de material magnético, la circulación del vector  $\mathbf{H}$  sobre un camino  $C$  cerrado sólo depende del flujo de corriente a través de la superficie limitada por el camino  $C$ ; por tanto podemos calcular  $\mathbf{H}$  sin tener en cuenta el material. Dada esta circunstancia, interesa definir  $\mathbf{M}$  en función de  $\mathbf{H}$  y obtener la ecuación constitutiva que relaciona  $\mathbf{B}$  con  $\mathbf{H}$  mediante la ecuación (12.16).

Inicialmente podemos establecer una clasificación de los materiales magnéticos atendiendo a que la dependencia entre  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  o entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  sea o no lineal. En el caso de medios no lineales además se puede dar la circunstancia de que con  $\mathbf{H}$  debido a corrientes libres nulo puede ser  $\mathbf{M} \neq 0$ ; estos materiales presenta imanación permanente y se los conoce como imanes.

En los medios lineales  $\mathbf{M}$  es proporcional a  $\mathbf{H}$  de forma que,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (12.24)$$

La constante de proporcionalidad  $\chi_m$ , llamada **susceptibilidad magnética**, depende del tipo de material. Si es homogéneo,  $\chi_m$  no depende del punto considerado; cuando es isótropo  $\chi_m$  no depende de la dirección y sentido de  $\mathbf{H}$ .

Para la mayoría de los medios lineales  $|\chi_m| \ll 1$ . Atendiendo al valor de  $\chi_m$  los materiales se clasifican en **diamagnéticos** si  $\chi_m < 0$  y **paramagnéticos** cuando  $\chi_m > 0$ . Todos los materiales tiene una contribución diamagnética, ya que su momento orbital disminuye al aplicar un campo  $\mathbf{H}$ . En los materiales paramagnéticos el momento magnético de cada átomo es distinto de cero; la orientación de los dipolos, cuando se aplica un campo  $\mathbf{H}$ , proporciona un valor de  $\mathbf{M}$  tal que  $\chi_m > 0$ , es decir, dicha orientación supera el efecto diamagnético.

La ecuación constitutiva que relaciona  $\mathbf{B}$  con  $\mathbf{H}$  se obtiene llevando la definición expresada por (12.24) a la ecuación (12.16), dando como resultado que,

$$\mathbf{B} = \mu_o(1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad (12.25)$$

$$\mu_r = k_m = (1 + \chi_m) \quad (12.26)$$

A los factores  $\mu_r$  o  $k_m$  se les llama **permeabilidad relativa**, y

$$\mu = \mu_o(1 + \chi_m) = \mu_o \mu_r \quad (12.27)$$

es la **permeabilidad magnética** del material considerado. En definitiva, la ecuación constitutiva que relaciona  $\mathbf{B}$  con  $\mathbf{H}$  es,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (12.28)$$

Esta ecuación puede servir para definir  $\mu$  como la razón entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . La permeabilidad  $\mu$  es una constante en los medios lineales homogéneos e isótropos, y de forma análoga a  $\chi_m$ , depende del punto en los no homogéneos o de la dirección de  $\mathbf{H}$  en los anisótropos. En los medios diamagnéticos y paramagnéticos  $\mu$  es muy próxima a  $\mu_o$ , ya que  $\chi_m$  es muy pequeña.

### 12.1.6 CURVA IMANACIÓN: CICLO DE HISTÉRESIS

Cuando el material no es lineal, las relaciones  $\mathbf{M} - \mathbf{H}$  y  $\mathbf{B} - \mathbf{H}$  no son lineales. Estos medios tienen un comportamiento muy diferente a los lineales

y son conocidos como materiales **ferromagnéticos**, **antiferromagnético** y **ferrimagnéticos**, ya que las primeras observaciones de este comportamiento específico se realizaron en materiales compuestos de hierro ( $F_e$ ).

Las características de estos materiales se establecen observando las variaciones del campo magnético cuando se aumenta la intensidad de campo magnético  $H$  aplicado al material. El método para observar las variaciones de  $B$  en función de  $H$  consiste en utilizar un toroide de material ferromagnético al que se aplican dos arrollamientos, uno llamado primario y otro secundario, como indica la figura 12.1. Al primario se aplica una corriente  $I$  que genera un campo  $H = NI/l$ , y en el secundario se instala un fluxómetro que mide  $\Phi = N' B S$ . Este procedimiento se conoce como método del anillo de Rowland.

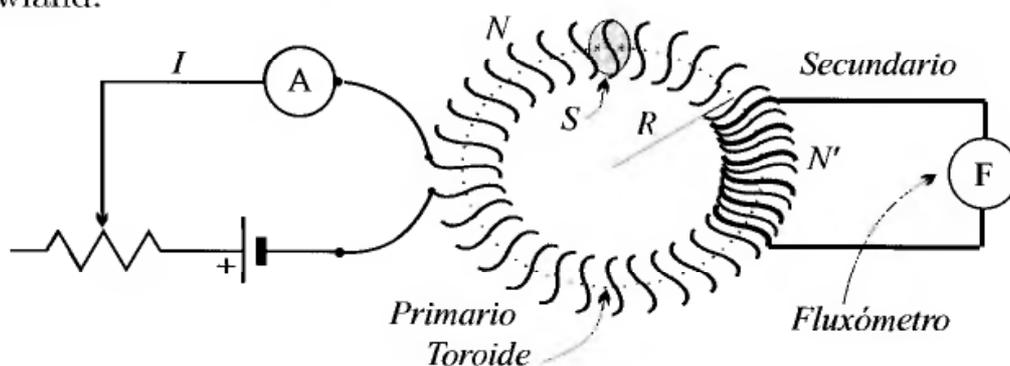


Figura 12.1

La curva que se obtiene se llama curva de imanación, y es la marcada con (1) en la figura 12.2.

En dicha curva se observa que para valores elevados de  $H$ , a un incremento de  $H$  corresponde un ligero incremento de  $B$ ; esto se debe a que la imanación  $M$  llega a su valor de saturación, y como  $B = \mu_0 H + M$ ,  $B$  sólo aumenta en  $\mu_0 H$ . Si una vez llegado a la saturación disminuimos el campo  $H$ , los valores de  $B$  obtenidos no coinciden con los anteriores; este efecto se conoce como histéresis, retraso de la imanación al disminuir el campo  $H$ .

Cuando en el proceso de reducción del campo  $H$  llegamos a  $H = 0$ , le corresponde un valor de  $B = B_r = \mu_0 M_r$ ,  $B_r$  se muestra en la figura 12.3 y la llamamos **remanencia**, y  $M_r$  será la imanación remanente. Se sigue el proceso aplicando un campo  $H$  en sentido contrario, y para un valor de  $H = -H_c$  se observa que  $B = 0$ ; el campo  $H_c$  se le conoce con el nombre de **campo coercitivo o coercitividad**. Si proseguimos aumentando el campo en sentido negativo llegamos también a una saturación. Volviendo a disminuir el campo se obtiene otra vez un valor de  $B = -B_r$ , remanencia negativa. Aumentando  $H$  volvemos al punto de saturación positiva con lo

que se describe un ciclo, llamado **ciclo de histéresis** del material utilizado. Dicho ciclo se muestra en la figura 12.3.

La relación  $B - H$ , además de no lineal es multiforme, es decir para un valor de  $H$  existen dos valores de  $B$  que la cumplen.

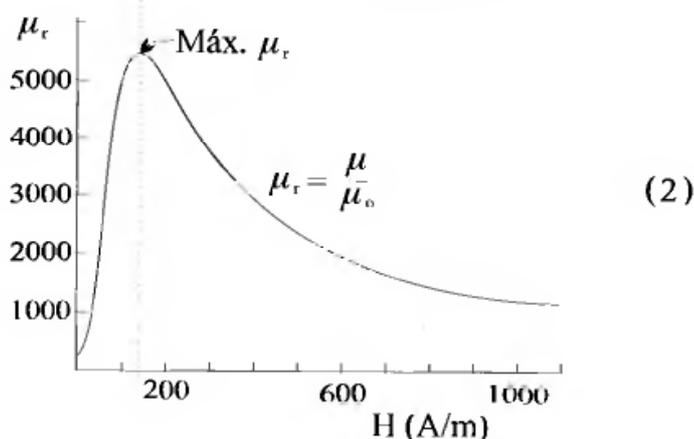
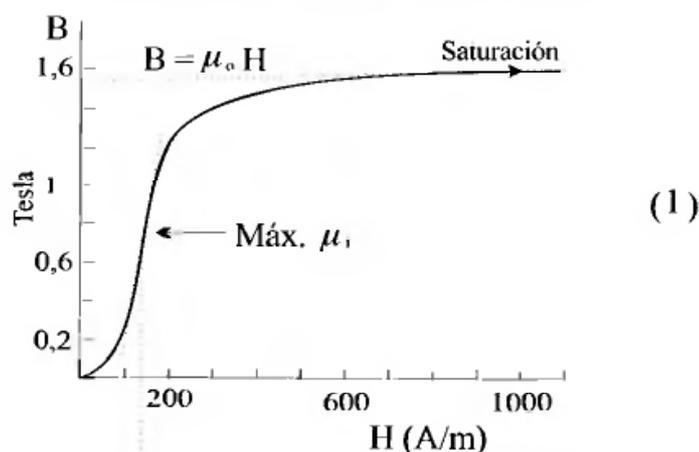


Figura 12.2

Este comportamiento, característico de los materiales ferromagnéticos, se debe a que los dipolos de un átomo interactúan fuertemente con los vecinos; además se orientan en la dirección del campo, con lo que se pueden producir grandes aumentos de  $B$  con ligeros incrementos de  $H$  en la zona no saturada de la curva de imanación.

En la figura 12.2(2) también se representa la permeabilidad magnética relativa  $\mu_r = \mu/\mu_0$  en función del campo  $H$ .  $\mu_r$  alcanza un máximo cuando la relación  $B/H$  alcanza el mayor valor, y esto ocurre en el punto  $P$  donde la recta que pasa por el origen es tangente a la curva de imanación. La permeabilidad  $\mu_r$  es negativa en el segundo y cuarto cuadrante del ciclo de histéresis. Los valores de  $\mu_r$  en materiales ferromagnéticos son elevados, generalmente superiores a 100.

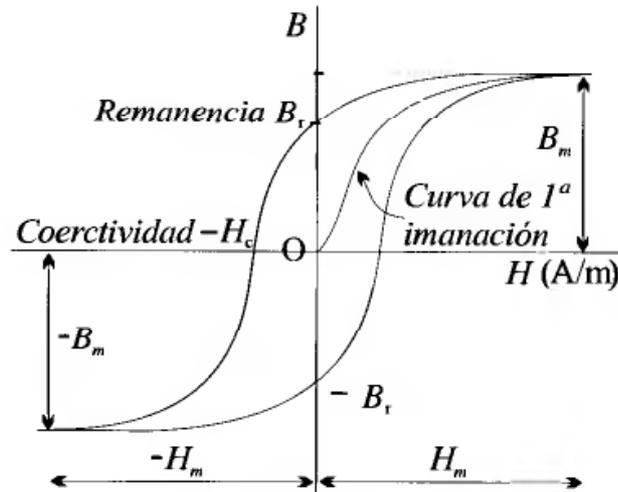


Figura 12.3

Se suele introducir la permeabilidad incremental  $\mu_i$ , que se define mediante la ecuación siguiente,

$$\mu_i = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (12.29)$$

Dicha permeabilidad  $\mu_i$  es función del punto considerado en la curva de imanación. Este valor es el que debemos tener en cuenta cuando se miden con un campo alterno las pequeñas variaciones relativas de  $B$  con respecto a  $H$ , para un valor estático  $H_o$ . Es decir cuando se mide la permeabilidad incremental en un punto determinado por  $H_o$  de la curva de imanación o ciclo de histéresis.

Los valores elevados de la permeabilidad y la remanencia son dos características que determinan la utilización de estos materiales. La primera para conseguir valores grandes de  $B$  con pequeños valores de  $H$  en los transformadores y otros dispositivos que transmitan energía a través del flujo magnético. La otra utilidad, derivada de la remanencia, se aplica en la construcción de imanes permanentes.

### 12.1.7 CONDICIONES EN LOS LÍMITES

Las condiciones en los límites para los vectores  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  se calculan considerando las ecuaciones obtenidas en los apartados anteriores en la frontera que separa dos medios materiales, tanto en el caso de que  $\mathbf{J} = 0$  o para  $\mathbf{J} \neq 0$ .

#### 12.1.7.1 Medios homogéneos, lineales e isótropos

En este caso las ecuaciones utilizadas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} ; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Aplicando la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  en la caja cilíndrica, de altura  $\Delta h$ , indicada en la figura 12.4a, se deduce que,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (12.30)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1.$$

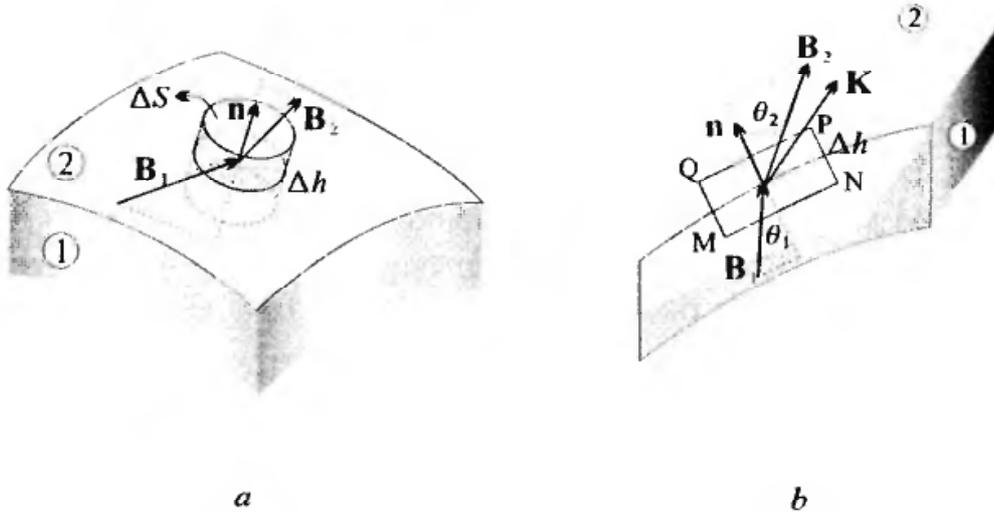
La ecuación (12.30) expresa la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  en la frontera entre dos medios.

La ecuación constitutiva en cada medio es,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 ; \quad \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (12.30), obtenemos,

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0 \quad (12.31)$$



**Figura 12.4**

Si aplicamos la ecuación  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , o lo que es igual, la circulación sobre el circuito cerrado MNPQ indicado en la figura 12.4b, con  $NP \rightarrow 0$  y  $MQ \rightarrow 0$ , y suponiendo que en la superficie de separación existe un densidad de corriente superficial  $\mathbf{K}$ , se llega a la ecuación siguiente,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (12.32)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1/\mu_1$  y  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_2/\mu_2$ , queda,

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = \mathbf{K} \quad (12.33)$$

Si sobre la superficie de separación  $\mathbf{K} = 0$ , las ecuaciones anteriores se simplifican de la forma siguiente,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (12.34)$$

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = 0 \quad (12.35)$$

La ecuación (12.34) expresa la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  cuando  $\mathbf{K} = 0$ , y lo mismo que la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$ , son independientes del tipo de medio que consideremos.

### 12.1.7.2 Medios materiales con imanación $\mathbf{M}$

Ahora siguen siendo aplicables la ecuaciones (12.30), (12.32) y (12.34). Para encontrar el comportamiento de las componentes normales de  $\mathbf{H}$  debemos aplicar  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  a  $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} + \mathbf{M}$ , de donde se deduce que  $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ ; y utilizando un procedimiento análogo al caso de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  obtenemos la ecuación siguiente,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \quad (12.36)$$

Esta ecuación muestra que las fuentes del campo  $\mathbf{H}$  tienen su origen en la discontinuidad de  $\mathbf{M}$ .

El comportamiento de las componentes tangenciales de  $\mathbf{B}$  en la frontera entre dos medios se obtiene aplicando la ecuación (12.14), con las siguientes densidades de corriente  $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$  y  $\mathbf{K}$  en la frontera. Procediendo de forma análoga al caso de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  obtenemos,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_o (\mathbf{K} + (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \times \mathbf{n}) \quad (12.37)$$

Si  $\mathbf{K} = 0$ ,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_o (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \times \mathbf{n} = \mu_o \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \quad (12.38)$$

Vemos que las componentes tangenciales de  $\mathbf{B}$  dependen de las discontinuidad de  $\mathbf{M}$ , además de la densidad de corriente  $\mathbf{K}$ .

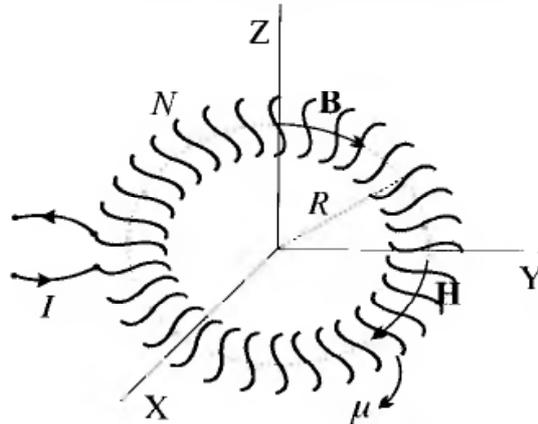
## 12.1.8 CIRCUITO MAGNÉTICO

### 12.1.8.1 Circuito magnético continuo

Para analizar el funcionamiento de un circuito magnético vamos a estudiar el caso del sistema formado por un toroide construido con un material

de permeabilidad  $\mu$ , sobre el que se ha dispuesto un arrollamiento de  $N$  espiras, como muestra la figura 12.5, por las que circula una corriente  $I$ .

En el circuito magnético se trata de conocer la relación que existe entre el flujo magnético  $\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ , en este ejemplo sobre la sección transversal del toroide, y  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI = \mathcal{F}$  sobre la circunferencia de radio medio del toroide.  $\mathcal{F}$  se denomina **fuerza magnetomotriz** (f.m.m.).



**Figura 12.5**

Aplicamos el teorema de Ampère y la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  al sistema formado por toroide y arrollamiento. Suponemos que no hay fugas de las líneas de  $\mathbf{B}$ , dado que  $\mu \gg \mu_0$ .

La continuidad de  $B_n$  nos lleva a que  $\Phi$  es uniforme en todo el circuito. Por otra parte de  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ . Sustituyendo estas condiciones en el teorema de Ampère,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Phi \oint_C \frac{dl}{\mu S} = NI \quad (12.39)$$

La ecuación (12.39) es la ecuación del circuito magnético. Al término,

$$\mathcal{R} = \oint_C \frac{dl}{\mu S} \quad (12.40)$$

se le denomina **reluctancia**. La reluctancia es proporcional a la longitud del circuito e inversamente proporcional a su sección  $S$  y permeabilidad  $\mu$ .

Resumiendo obtenemos la ecuación,

$$\mathcal{R} \Phi = NI = \mathcal{F} \quad (12.41)$$

Esta ecuación es análoga a la ley de Ohm  $V = RI$ , razón por la que se habla del circuito magnético. Aquí la intensidad se sustituye por el flujo  $\Phi$ ,

la resistencia  $R$  por la reluctancia  $\mathcal{R}$  y la tensión  $V$  por la f.m.m.  $\mathcal{F}$ .

De forma análoga al caso de circuitos eléctricos, cuando se ponen varias reluctancias en serie, su resultante es la suma de ellas,

$$\mathcal{R} = \sum_1^N \mathcal{R}_i \quad (12.42)$$

En el caso de disponerlas en paralelo, la inversa es igual a la suma de la inversas.

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \sum_1^N \frac{1}{\mathcal{R}_i} \quad (12.43)$$

Cuando se trata de materiales ferromagnéticos con  $\mu = \mu(\mathbf{H})$ , es decir,  $\mu$  no es lineal y depende del campo  $\mathbf{H}$  aplicado, son necesarios una serie de cálculos iterativos para determinar  $\mathcal{R}$  y  $\Phi$ , ya que  $\mu$  y  $\Phi$  dependen de la curva de imanación y el punto que sobre ella se considere. Se procede de la forma siguiente: Primero se calcula  $H = NI/l$  ( $l$  es la longitud del circuito). Con este valor de  $H$  se obtiene sobre la curva de imanación el valor de  $\mu$  y se calcula  $\mathcal{R}$ ; mediante la ecuación (12.41) se calcula  $\Phi$ . Con este valor de  $\Phi$  se halla los valores de  $H$  en los distintos tramos del circuito magnético y se repite el proceso. Generalmente son necesarias dos o tres iteraciones para obtener  $\Phi$  y  $\mathcal{R}$  con un error pequeño.

#### 12.1.8.2 Circuito magnético con una ranura

Si el circuito tiene un corte muy delgado, ranura, como muestra la figura 12.6, se procede de forma análoga al caso anterior para obtener la ecuación del circuito magnético. También suponemos despreciables las fugas de las líneas de  $\mathbf{B}$ , por tanto de la continuidad de  $B_n$  se deduce que  $B = B_i = B_g$ , es decir, el campo es el mismo dentro del material que en la ranura.

Por otro lado,

$$H_i = \frac{B}{\mu} ; \quad H_g = \frac{B}{\mu_0}$$

Suponemos que la longitud total del circuito es  $l$  y la ranura tiene un espesor  $d$ . El teorema de Ampère en este caso origina la siguiente relación,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_i(l - d) + H_g d = NI$$

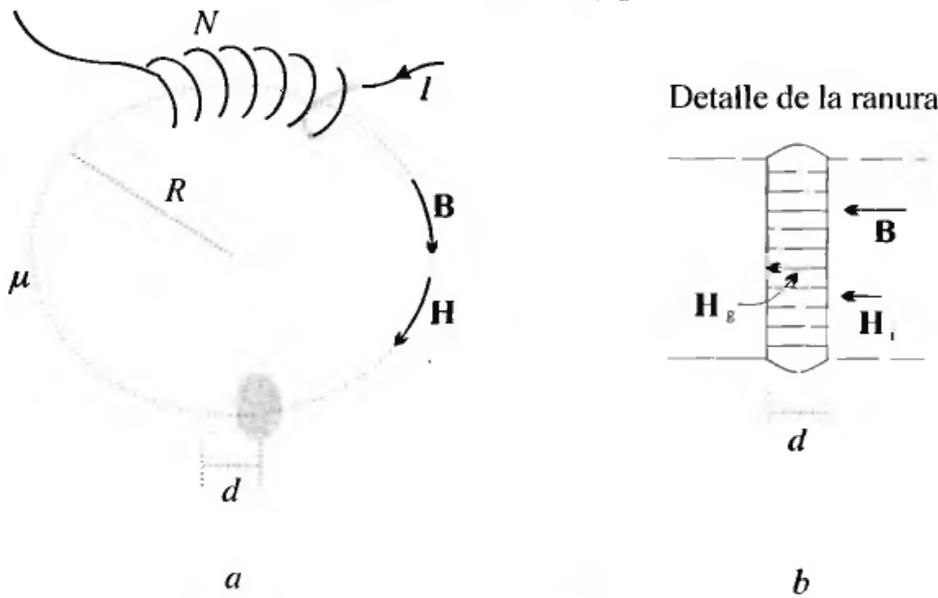
Sustituyendo los valores de  $H_i$  y  $H_g$  y  $B = \Phi/S$ ,

$$NI = \Phi \left( \frac{l-d}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S} \right) \quad (12.44)$$

$$NI = \Phi(\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_g) \quad (12.45)$$

Con,

$$\mathcal{R}_i = \frac{l-d}{\mu S} \text{ y } \mathcal{R}_g = \frac{d}{\mu_0 S}$$



**Figura 12.6**

Aunque  $d \ll l$ , dado que  $\mu \gg \mu_0$ , generalmente más de 100 veces superior,  $\mathcal{R}_g > \mathcal{R}_i$ .

### 12.1.8.3 Circuito con imán permanente

Se trata de un sistema con ranura y un imán permanente como muestra la figura 12.7 y sin bobina,  $I = 0$ .

La aplicación de la ley de Ampère proporciona la siguiente ecuación,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_i(l-d) + H_g d = 0 \quad (12.46)$$

De ella se deduce que,

$$H_i = -\frac{d}{l-d} H_g \quad (12.47)$$

El campo  $H_i$  en el interior del imán es de sentido contrario al campo  $H_g$  en la ranura como muestra la figura 12.7. Suponemos que la dispersión de líneas en la ranura es despreciable y tenemos en cuenta la continuidad de las

componentes normales  $B$ ,  $B = B_i = B_g$ ; en consecuencia  $B_i$  tiene sentido contrario al campo  $H_i$  en el interior del imán.

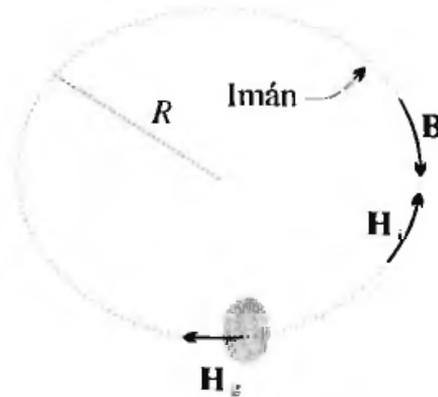


Figura 12.7

En la ranura se verifica que,

$$H_g = \frac{B}{\mu_0}$$

En definitiva,

$$H_i = -\frac{d}{\mu_0(l-d)}B \quad (12.48)$$

La imanación  $M$  en el imán será,

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H_i = \frac{l}{l-d} \frac{B}{\mu_0} \quad (12.49)$$

La ecuación (12.48) es una recta conocida como **recta de corte**, cuya intersección con la curva de desimanación, segundo cuadrante del ciclo de histéresis, es el punto P que muestra la figura 12.8. Dicho punto es función del espesor de la ranura  $d$ , la longitud  $l$  y la forma de la curva de imanación. Cuanto mayor sea la remanencia  $B_r$  y más grande la anchura del ciclo (mayor campo coercitivo  $H_c$ ) más elevado será el campo  $B$  que corresponde al punto P.

Por otro lado cuanto mayor sea  $l$  en comparación con  $d$ , la recta de corte  $B = f(H_i)$  tendrá una pendiente más grande, en consecuencia a P le corresponderá un mayor valor de  $B$  y otro más pequeño de  $H_i$ . Por esta razón se hacen los imanes permanentes en forma de herradura, ya que al mismo tiempo se consigue un valor grande de  $B$  en la ranura y un campo  $H_i$  pequeño, que dado su sentido contrario a la imanación  $M$ , tiende a desimanar el material.

$H_i$  tiene sentido contrario a  $B$  y  $M_i$  en el imán. Si en la ranura colocamos una chapa de material cuya permeabilidad  $\mu \gg \mu_0$ , según la ecuación (12.48) aumenta la pendiente, lo que supone aumento de  $B$  y disminución del campo desimanador  $H_i$ . Esta es la razón por la cual se unen los polos del imán con una chapa de hierro cuando no se está utilizando.

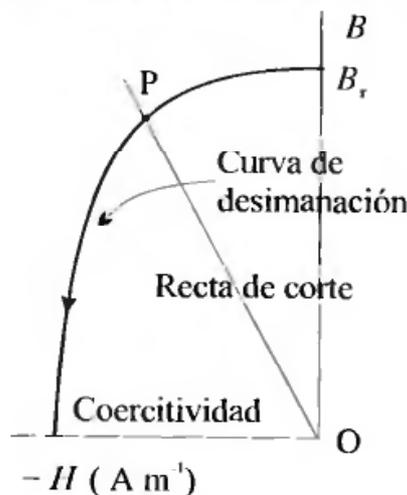


Figura 12.8

### 12.1.9 ENERGÍA MAGNÉTICA

La energía magnética debida a un circuito por el que circula una corriente  $I$  es igual al trabajo necesario para establecer la corriente  $I$  en dicho circuito, excluida la pérdida de energía por efecto Joule.

Para encontrar la expresión de la energía magnética vamos a suponer una serie de condiciones que permitan cierta simplificación. En primer lugar suponemos que el proceso se realiza en condiciones cuasi-estáticas, es decir, corrientes lentamente variables; con lo cual los fenómenos de radiación y retraso de unos potenciales con respecto a otros en distintos puntos de un componente son despreciables. También se consideran los circuitos no deformables y en posiciones fijas. Además consideramos que los medios son lineales.

El cálculo se hace suponiendo corrientes de conducción en los circuitos y determinando el trabajo reversible necesario para que las corrientes en los distintos circuitos pasen desde cero a su valor final. Se excluye la energía disipada por efecto Joule en los conductores. Suponemos que la energía se suministra por unas baterías conectadas a los distintos conductores, baterías que consideramos elementos externos al sistema.

En un circuito filiforme  $i$ , el trabajo realizado para mover la carga  $dq$  es,

$$V_i dq = V_i i_i dt$$

En el intervalo de tiempo  $dt$  la energía suministrada por las baterías será,

$$dW_i = V_i i_i dt$$

Si se trata de un circuito de resistencia  $R$ ,

$$V_i + \mathcal{E}_i = R i_i$$

Es decir, la f.e.m. de la batería más la inducida  $\mathcal{E}_i$ , es igual a  $Ri_i$ . Despejando  $V_i$  y llevándola a la ecuación de la energía queda,

$$dW_i = -\mathcal{E}_i i_i dt + R i_i^2 dt$$

El término  $Ri_i^2 dt$  representa la energía disipada por efecto Joule y no forma parte del trabajo reversible. Por tanto si tenemos en cuenta la relación,  $\mathcal{E}_i = -d\Phi_i/dt$ , la energía magnética elemental  $dW_{mi}$  será,

$$dW_{mi} = i_i d\Phi_i \quad (12.50)$$

En un sistema de  $N$  circuitos,

$$dW_{mi} = \sum_{i=1}^N i_i d\Phi_i \quad (12.51)$$

Como el flujo sobre el circuito  $i$  depende del propio circuito y todos los demás, el citado flujo en función de los coeficientes de inducción mutua y autoinducción será,

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} di_j \quad (12.52)$$

Sustituyendo la ecuación (12.52) en (12.51), y considerando que la energía en el estado final no depende de los estados intermedios, podemos poner  $i_i = \alpha I_i$ ,  $di_i = I_i d\alpha$  e integrar con respecto a  $\alpha$  entre 0 y 1. El resultado es la siguiente fórmula para la energía,

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i I_j \quad (12.53)$$

El término  $i = j$  corresponde a  $M_{ii} = L_i$ .

En función de las corrientes y flujos la energía es,

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i \quad (12.54)$$

### 12.1.9.1 Energía en función de los vectores de campo B y H

Nos interesa expresar la energía magnética en función del campo e intensidad de campo magnético, ya que ésta forma sigue la línea de expresar las leyes que describen los fenómenos electromagnéticos mediante los vectores de campo. Esto nos permite encontrar la energía en el caso de distribuciones de corriente no localizadas en circuitos filiformes.

La ecuación (12.54) nos sirve para encontrar la expresión buscada. En el circuito  $i$  se verifica que:

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{s}_i$$

Aplicando  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y el teorema de Stokes,

$$\Phi_i = \oint_{C_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l}_i$$

Por otra parte la corriente  $I_i$  se puede considerar como originada por una distribución de corriente cuya densidad es  $\mathbf{J}_i$ ,

$$I_i = \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{s}_i$$

El sumatorio  $\sum$  de términos infinitesimales se transforma en  $\int$  y  $d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{l}_i = dv$ , de forma que,

$$\sum \oint \rightarrow \int_V$$

En consecuencia,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv \quad (12.55)$$

Ecuación que nos da la energía en función de la densidad de corriente y el potencial vector magnético. A partir de esta relación se obtiene la energía en función de los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .

Considerando que  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y teniendo en cuenta la relación vectorial,

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia al segundo término,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv - \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

En el caso de corrientes cuasi-estacionarias,  $A \propto 1/r$ ,  $H \propto 1/r^2$ , y como  $ds \propto r^2$ , la integral de superficie se anula si consideramos  $S$  muy alejada de los circuitos, en el infinito. En definitiva, tomando para el volumen todo el espacio,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv \quad (12.56)$$

Cuando los medios son lineales o en el vacío, podemos utilizar la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  ecuación(12.56),

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 \, dv = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu} B^2 \, dv \quad (12.57)$$

Aunque la ecuación (12.56) es válida cuando se integra sobre todo el espacio, se puede introducir el concepto de densidad de energía magnética  $w_m$  mediante la ecuación de definición siguiente,

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} B^2 \quad (12.58)$$

La densidad de energía se mide en  $\text{J}/\text{m}^3$ .

$$W_m = \int_V w_m \, dv \quad (12.59)$$

### 12.1.9.2 Energía en medios no lineales

Si un circuito contiene un medio no lineal, bien por que el circuito sea un conjunto de espiras arrolladas a un núcleo de material no lineal (por ejemplo ferromagnético), o bien por que el conductor sea de material no lineal, en el cálculo de la energía magnética se debe tener en cuenta la curva de imanación para obtener los incrementos de flujo correspondientes a cambios en las corrientes.

Considerando la no linealidad del material, a un incremento de flujo le corresponde la variación de energía siguiente,

$$\delta W_m = i_i \delta \Phi_i$$

Como,

$$i_i = \oint H \cdot d\mathbf{l}_i \quad \text{y} \quad \delta \Phi_i = \oint_{S_i} \delta \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\delta W_m = \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \, dv \quad (12.60)$$

El incremento en la densidad de energía será,

$$\delta w_m = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \quad (12.61)$$

Si el material describe la curva de imanación indicada figura 12.9, la variación de la densidad de energía cuando el campo magnético  $B$  cambia de 0 a  $B$  es,

$$w_m = \int_0^B \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \quad (12.62)$$

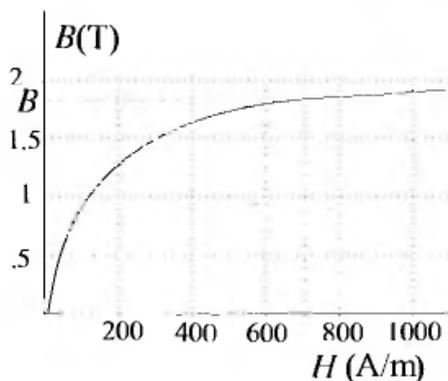


Figura 12.9

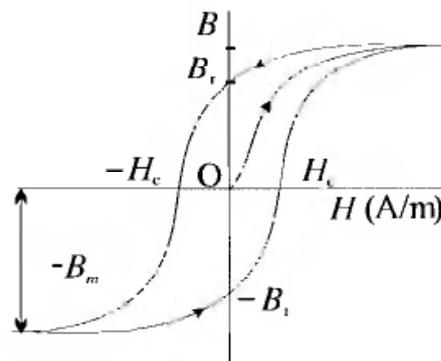


Figura 12.10

Si el sistema describe un ciclo de histéresis como el indicado en figura 12.10, la energía disipada por unidad de volumen en cada ciclo viene dada por la ecuación siguiente,

$$w_m = \oint_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (12.63)$$

Considerando que  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ,

$$H dB = \mu_0 H dH + \mu_0 H dM$$

El término  $\mu_0 H dH$  corresponde al trabajo en el vacío y se anula al describir un ciclo. En consecuencia,

$$w_m = \oint_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (12.64)$$

Tanto esta ecuación como la (12.63) nos proporcionan la energía por unidad de volumen disipada al describir un ciclo de histéresis.

### 12.1.9.3 Coeficiente de autoinducción en función de la energía magnética

Como indicábamos en el apartado dedicado a obtener la fórmula de Neumann, algunas veces es difícil su aplicación, por lo que debemos recurrir a otro procedimiento para determinar la autoinducción.

La ecuación (12.53) en el caso de un circuito es,

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (12.65)$$

Considerando que el medio es lincal, la corriente cuasi-estática y el conductor cerrado, los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  son proporcionales a la corriente  $I$ . Siendo  $I$  la misma para todas las zonas, tanto dentro como fuera del conductor. Se define el coeficiente de autoinducción mediante la relación siguiente,

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (12.66)$$

Como la energía  $W_m$  es la suma de las almacenadas dentro y fuera del conductor,

$$W_m = W_{mi} + W_{me}$$

Podemos representar  $L$  como suma del coeficiente de autoinducción interno  $L_i$  y externo  $L_e$ ,

$$L = L_i + L_e \quad (12.67)$$

Con,

$$L_i = \frac{1}{I^2} \int_{V_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv_i \quad (12.68)$$

$$L_e = \frac{1}{I^2} \int_{V_e} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv_e \quad (12.69)$$

Tanto el coeficiente de autoinducción interna como externa no son fáciles de calcular, salvo que la geometría del sistema o distribución de corriente presente ciertas simetrías que lo faciliten.

#### 12.1.10 FUERZA Y PAR DE FUERZAS

El cálculo de la fuerza sobre un circuito se ha hecho en capítulos anteriores mediante la ley de Ampère o aplicando la fuerza de Lorentz. Si la geometría de los circuitos no presenta ciertas simetrías el cálculo puede ser complicado. En este apartado vamos a estudiar otro procedimiento de obtener la fuerza, basado en el *desplazamiento virtual* del circuito o elemento sobre el que actúa la fuerza.

En un desplazamiento virtual la energía suministrada por las fuentes,  $dW_b$ , es igual al trabajo mecánico  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  más la variación de energía magnética del sistema  $dW_m$ ,

$$dW_b = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + dW_m \quad (12.70)$$

Se consideran dos casos: 1) Sistemas o circuitos en los que se mantiene constante la corriente. 2) Sistemas en los que se mantiene constante el flujo.

### 12.1.10.1 Sistemas o circuitos con corriente constante

En este caso las baterías suministran energía de forma que en el desplazamiento  $d\mathbf{l}$  se mantienen constantes las corrientes en los circuitos. La variación de flujo que se produce en el desplazamiento tiene como consecuencia el siguiente aporte de energía por las baterías,

$$dW_b = \sum_1^N I_i d\Phi_i \quad (12.71)$$

Por otra parte el trabajo mecánico es,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (12.72)$$

La variación de la energía magnética será,

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_1^N I_i d\Phi_i \quad (12.73)$$

Sustituyendo (12.71, 72, 73) en (12.70) tenemos,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = dW_m \quad (12.74)$$

Como  $dW_m = \nabla W_m \cdot d\mathbf{l}$ ,

$$\mathbf{F} = (\nabla W_m)_I \quad (12.75)$$

La fuerza es igual al gradiente de la energía. El subíndice  $I$  significa que se mantiene la corriente constante.

Si el sistema sólo puede girar alrededor de un eje, que suponemos coincide con el eje  $Z$ , el **par de fuerzas** será,

$$T_z = \left( \frac{\partial W_m}{\partial \varphi} \right)_I \quad (12.76)$$

### 12.1.10.2 Sistemas o circuitos con flujo constante

Ahora durante el desplazamiento virtual suponemos que las corrientes se modifican de manera que los flujos permanezcan constantes. Como consecuencia del flujo constante la f.e.m. inducida es nula. Las baterías no suministrarán más energía que la disipada por efecto Joule, es decir, como suponemos que no se disipa energía  $dW_b = 0$ .

La ecuación (12.70) ahora queda de la forma,

$$dW + dW_m = 0$$

En consecuencia,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -dW_m = -\nabla W_m \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_m)_\Phi \quad (12.77)$$

El trabajo mecánico en este caso se hace a costa de la disminución de la energía magnética del sistema.

De forma análoga al caso anterior, el par de fuerzas es,

$$T_z = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \varphi}\right)_\Phi \quad (12.78)$$

### 12.1.10.3 Presión magnética

Para calcular la presión magnética sobre una superficie en la que se produce una discontinuidad en el campo magnético, vamos a estudiar el ejemplo de dos placas conductoras planoparalelas indefinidas, situadas como muestra la figura 12.11. Por cada placa circula una densidad de corriente superficial  $\mathbf{K}$  en los sentidos indicados en la figura.

Aplicando el teorema de Ampère, el campo magnético entre las placas es  $\mathbf{B} = K\mathbf{u}_x$ ; es decir,  $\mathbf{B}$  es perpendicular a las densidades de corriente  $\mathbf{K}$ . La fuerza sobre cada placa es perpendicular a ella,  $\mathbf{F} \propto \mathbf{K} \times \mathbf{B}$ . Podemos calcular  $\mathbf{F}$  a partir de  $W_m$ .

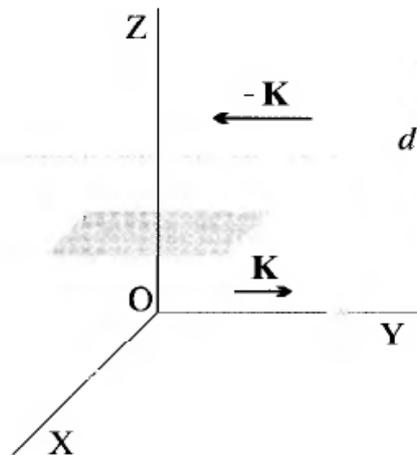


Figura 12.11

La energía magnética en un paralelepípedo de altura  $dz$  y base  $dx dy$  es,

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dx dy dz$$

$$F = \frac{dW_m}{dz} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dx dy$$

La presión  $p$  sobre una superficie  $dx dy$  será,

$$p = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (12.79)$$

La presión en el ejemplo estudiado coincide con la densidad de energía magnética entre las placas, ya que en el exterior  $B = 0$ .

## 12.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 12.1

En un bloque imanado de gran tamaño, con  $\mathbf{M} = M\mathbf{u}_x$ , se realiza un taladro cilíndrico indefinido y de radio  $R$  ( $R \ll$

que las dimensiones del bloque), cuyo eje coincide con el eje  $Z$ . Véase la figura P12.1.1.

1) Calcular las densidades de corriente de imanación  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ .  $\mathbf{K}_m$  sobre las paredes del cilindro.

2) Con las corrientes anteriores, calcular  $\mathbf{B}$  sobre el eje  $Z$ .

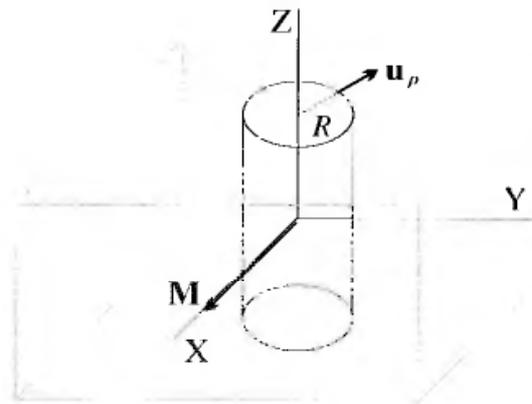


Figura P12.1.1

#### Solución

1) *Densidades de corriente de imanación*

Las densidades de corriente  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$  se calculan utilizando las ecuaciones (12.5).

Dado que  $\mathbf{M}$  es uniforme, todas las derivadas son nulas y en consecuencia  $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ .

Sobre la superficie del cilindro,  $\mathbf{K}_m = M\mathbf{u}_x \times \mathbf{n}$ .

El vector unitario normal a la superficie cilíndrica, como muestran las figura P12.1.2a y b, en cada punto es,

$$\mathbf{n} = -\mathbf{u}_\rho = -(\cos \varphi \mathbf{u}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{u}_y)$$

Por tanto,

$$\mathbf{K}_m = -M\mathbf{u}_x \times (\cos \varphi \mathbf{u}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{u}_y) = -M \text{sen } \varphi \mathbf{u}_z$$

Las corrientes serán,

$$\mathbf{K}_m = -M \text{sen } \varphi \mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{J}_m = 0$$

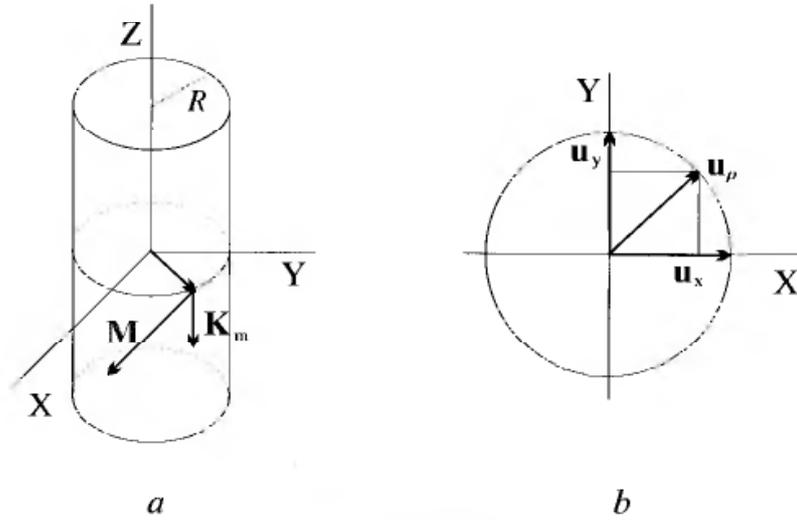


Figura P12.1.2

## 2) Campo magnético

El campo magnético sobre el eje se calcula aplicando la ley de Biot y Savart en la forma indicada por la ecuación (12.7), con  $\mathbf{J}_m = 0$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (12.1.1)$$

Como el cilindro es indefinido,  $\mathbf{B}$  es la misma en cualquier punto del eje  $Z$ , por lo que elegimos el origen de coordenadas para el cálculo de  $\mathbf{B}$ . Los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  y la superficie elemental  $ds'$  son,

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_\rho + z\mathbf{u}_z = R(\cos \varphi \mathbf{u}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{u}_y) + z\mathbf{u}_z; \quad ds' = R d\varphi dz$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R(\cos \varphi \mathbf{u}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{u}_y) - z\mathbf{u}_z; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (12.1.1) y considerando los límites de la integral, que en este caso son: para  $z$ , 0 e  $\infty$  multiplicando por 2 y para  $\varphi$ , 0 y  $2\pi$ . La ecuación queda de la forma,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} 2 \int_0^{2\pi} R d\varphi \int_0^\infty \frac{M \text{sen } \varphi \mathbf{u}_z \times R(\cos \varphi \mathbf{u}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z) dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Como  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z = 0$ ;  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y$ ;  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y = -\mathbf{u}_x$ ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{2\pi} R^2 M \int_0^\infty \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (\text{sen } \varphi \cos \varphi \mathbf{u}_y - \text{sen}^2 \varphi \mathbf{u}_x) d\varphi \quad (12.1.2)$$

La integrales en  $\varphi$  que aparecen son,

$$\mathbf{u}_y \int_0^{2\pi} \text{sen } \varphi \cos \varphi d\varphi = \mathbf{u}_y [\text{sen}^2 \varphi]_0^{2\pi} = 0$$

$$\mathbf{u}_x \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 \varphi \mathbf{u}_x) d\varphi = \mathbf{u}_x \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \pi \mathbf{u}_x$$

La integral en  $z$  es,

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \left[ \frac{1}{R^2} \frac{z}{\sqrt{(R^2 + z^2)}} \right]_0^\infty = \frac{1}{R^2}$$

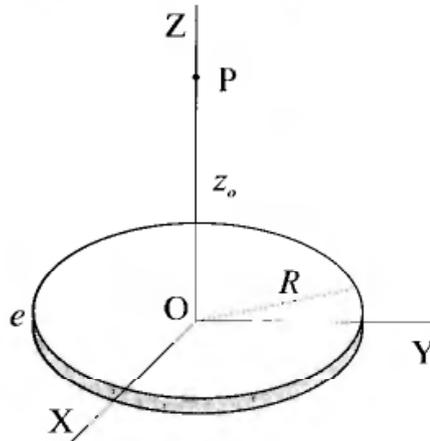
Sustituyendo estos valores en la expresión (12.1.2), obtenemos el valor del campo magnético pedido,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mu_o M \mathbf{u}_x$$

**PROBLEMA 12.2**

Un disco de radio  $R$  y espesor  $e$  ( $e \ll R$ ), como el indicado en la figura P12.2, está constituido por un material imanado uniformemente en la dirección del eje  $Z$ .  $\mathbf{M} = M \mathbf{u}_z$ .

- 1) Calcular las densidades de corriente de imanación  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ .
- 2) A partir de las densidades de corriente  $\mathbf{J}_m$   $\mathbf{K}_m$ , calcular el campo magnético en el punto  $P(0, 0, z_o)$  ( $z_o \gg e$ ).



**Figura P12.2**

**Solución**

1) *Densidades de corriente de imanación*

Las densidades de corriente  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$  se calculan utilizando las ecuaciones (12.5).

Dado que  $\mathbf{M}$  es uniforme, todas las derivadas son nulas y en consecuencia  $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ .

Sobre la superficie lateral del cilindro,  $\mathbf{K}_m = M \mathbf{u}_z \times \mathbf{n}$ .

Sobre las superficies circulares  $\mathbf{K}_m = 0$ , ya que  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{n}$ .

El vector unitario normal a la superficie cilíndrica  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho$ , por tanto,

$$\mathbf{K}_m = M\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho = M\mathbf{u}_\varphi$$

Las densidades de corriente pedidas son,

$$\mathbf{K}_m = M\mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{J}_m = 0$$

2) *Campo magnético*

El campo magnético en el punto P del eje Z se calcula aplicando la ley de Biot y Savart en la forma indicada por la ecuación (12.7), con  $\mathbf{J}_m = 0$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (12.2.1)$$

Como  $e$  es muy pequeño,  $ds' = eRd\varphi$ .

Los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ , así como  $\mathbf{u}_\rho$  y  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  son,

$$\mathbf{r} = z_o\mathbf{u}_z \quad ; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_\rho \quad ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R\mathbf{u}_\rho + z_o\mathbf{u}_z$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + z_o^2)^{1/2} \quad ; \quad \mathbf{u}_\rho = \cos \varphi \mathbf{u}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación (12.2.1), tendremos que,

$$\mathbf{K}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = M\mathbf{u}_\varphi \times (-R\mathbf{u}_\rho + z_o\mathbf{u}_z) = M R\mathbf{u}_z + M z_o\mathbf{u}_\rho$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{(M R\mathbf{u}_z + M z_o\mathbf{u}_\rho) R e d\varphi}{(R^2 + z_o^2)^{3/2}}$$

Los límites de integración para  $\varphi$  son 0 y  $2\pi$ . Considerando el valor de  $\mathbf{u}_\rho$  sobre los ejes cartesianos, la expresión anterior se transforma en la siguiente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{R M e}{(R^2 + z_o^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (R\mathbf{u}_z + z_o(\cos \varphi \mathbf{u}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{u}_y)) d\varphi$$

Las integrales de  $\cos \varphi d\varphi$  y  $\text{sen } \varphi d\varphi$  entre 0 y  $2\pi$  son nulas. La integral de  $d\varphi$  es igual a  $2\pi$ , por tanto el campo magnético será,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{2} \frac{e R^2 M}{(R^2 + z_o^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 12.3

Un disco de radio  $R$  y espesor  $e$  ( $e \ll R$ ), como el indicado en la figura P12.3, está construido con un material imanado, siendo la imanación  $\mathbf{M} = M(1 - \rho/R)\mathbf{u}_z$ .

1) Calcular las densidades de corriente de imanación  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ .

2) Utilizando las densidades de corriente obtenidas en el apartado anterior, calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P del eje Z.  $OP = a$ ;  $a \gg e$ .

**Solución**

1) *Densidades de corriente*

Las densidades se calculan mediante las dos ecuaciones (12.5),

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad ; \quad \mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

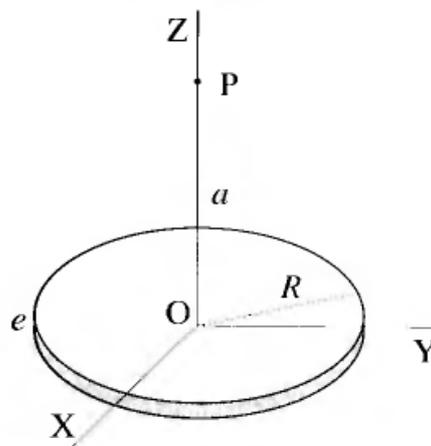
Sobre la superficie lateral  $\mathbf{M} = M(1 - R/\rho) = 0$ , por tanto,

$$\mathbf{K}_m = 0$$

Sobre los círculos de radio  $R$ ,  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{n}$  y  $\mathbf{M} \times \mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{K}_m = 0$ .

En definitiva, sobre todas las superficies,

$$\mathbf{K}_m = 0$$



**Figura P12.3**

Teniendo en cuenta la forma del rotacional en coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{J}_m = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\rho + \left( \frac{\partial M_\rho}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho M_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial M_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_z$$

La corriente  $\mathbf{J}_m$ , considerando que  $\mathbf{M}$  solo tiene componente  $M_z$  y esta solo depende de  $\rho$ , queda de la forma,

$$\mathbf{J}_m = -\frac{\partial M_z}{\partial \rho} \mathbf{u}_\varphi = -\frac{\partial}{\partial \rho} M(1 - \rho/R) \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{J}_m = \frac{M}{R} \mathbf{u}_\varphi$$

2) *Campo magnético*

Para calcular  $\mathbf{B}$  en el punto P utilizaremos la Ley de Biot y Savart en la forma dada por la ecuación (12.7), con  $\mathbf{K}_m = 0$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \tag{12.3.1}$$

La corriente  $\mathbf{J}_m$  es la calculada en el apartado anterior.

Considerando que  $e \ll R$ ,  $dv' = e \rho' d\varphi d\rho'$ .

Los vectores de posición y  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  son,

$$\mathbf{r} = a \mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = \rho' \mathbf{u}_\rho; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_z - \rho' \mathbf{u}_\rho; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (a^2 + \rho'^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{J}'_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{M}{R} \mathbf{u}_\varphi \times (a\mathbf{u}_z - \rho' \mathbf{u}_\rho) = \frac{M}{R} (a\mathbf{u}_\rho + \rho' \mathbf{u}_z)$$

Llevando los valores obtenidos a la ecuación (12.3.1), teniendo en cuenta que los límites de integración para  $\varphi$  son 0 y  $2\pi$  y para  $\rho'$  son 0 y  $R$ ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o M}{4\pi R} e \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{(a\mathbf{u}_\rho + \rho' \mathbf{u}_z)}{(a^2 + (\rho')^2)^{3/2}} \rho' d\rho'$$

Como en el problema anterior, sustituyendo  $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi$ , quedan unas integrales de la forma  $\cos \varphi d\varphi$  y  $\sin \varphi d\varphi$ , que integradas entre 0 y  $2\pi$  se anulan; en consecuencia el término que multiplica  $\mathbf{u}_\rho$  es nulo, quedando la integral reducida a la siguiente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o M}{4\pi R} e \mathbf{u}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho'^2 d\rho'}{(a^2 + (\rho')^2)^{3/2}}$$

La integración produce la relación siguiente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o M}{4\pi R} e 2\pi \left[ -\frac{\rho'}{(a^2 + \rho'^2)^{1/2}} + \ln \left( \rho' + (a^2 + \rho'^2)^{1/2} \right) \right]_0^R \mathbf{u}_z$$

En definitiva, el campo magnético es,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o M}{2 R} e \left( \ln \left( \frac{R + (a^2 + R^2)^{1/2}}{a} \right) - \frac{R}{(a^2 + R^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z$$

#### PROBLEMA 12.4

Tenemos una arandela, de radio interior  $a$  exterior  $b$  y espesor  $e$  ( $e \ll a$ ), como muestra la figura P12.4. La arandela está imanada uniformemente, con  $\mathbf{M} = M\mathbf{u}_z$ .

- 1) Calcular las densidades de corriente de imanación  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ .
- 2) Utilizando las corrientes  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ , calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P del eje Z.  $OP = z_o$ . ( $z_o \gg e$ ).

#### Solución

1) *Densidades de corriente de imanación*

Las densidades de corriente  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$  se calculan mediante la ecuaciones (12.5).

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}; \quad \mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

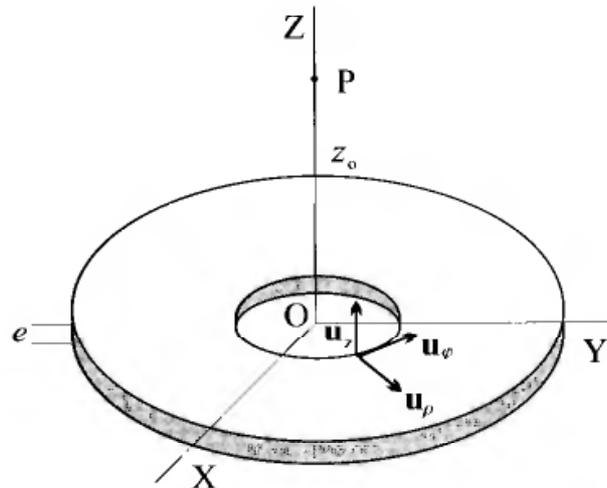


Figura P12.4

Como  $\mathbf{M}$  es uniforme, las derivadas son nulas, por tanto  $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ , y en consecuencia,

$$\mathbf{J}_m = 0$$

La corriente  $\mathbf{K}_m$  sobre la superficie de las coronas circulares es nula, ya que sobre ellas  $\mathbf{M} \times \mathbf{n} = 0$ .

Sobre la superficie cilíndrica de radio  $a$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_\rho$ , por tanto,

$$\mathbf{K}_m = M\mathbf{u}_z \times (-\mathbf{u}_\rho) = -M\mathbf{u}_\varphi$$

Sobre la superficie cilíndrica de radio  $b$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho$ , por tanto,

$$\mathbf{K}'_m = M\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho = M\mathbf{u}_\varphi$$

En resumen, las corrientes sobre las superficies cilíndricas son,

$$\mathbf{K}_m = -M\mathbf{u}_\varphi \text{ en } \rho = a$$

$$\mathbf{K}'_m = M\mathbf{u}_\varphi \text{ en } \rho = b$$

### 2) Campo magnético

El campo magnético en el punto P del eje Z se calcula aplicando la ley de Biot y Savart en la forma indicada por la ecuación (12.7), con  $\mathbf{J}_m = 0$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (12.4.1)$$

Dado que el espesor es muy pequeño, en el cilindro de radio  $a$ ,  $ds' = e ad\varphi$ . Los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  son,

$$\mathbf{r} = z_0\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z_0\mathbf{u}_z - a\mathbf{u}_\rho$$

El módulo de  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  será,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (a^2 + z_o^2)^{1/2}$$

Sobre el cilindro de radio  $b$  tendremos los siguientes valores,

$$\mathbf{r} = z_o \mathbf{u}_z; \mathbf{r}' = b \mathbf{u}_\rho; \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z_o \mathbf{u}_z - b \mathbf{u}_\rho; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (b^2 + z_o^2)^{1/2}$$

Sustituyendo los valores correspondientes al cilindro de radio  $a$  en la ecuación (12.4.1) y considerando que los límites para  $\varphi$  son 0 y  $2\pi$ , la integral de dicha ecuación queda de la forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-M \mathbf{u}_\varphi \times (z_o \mathbf{u}_z - a \mathbf{u}_\rho) a e}{(a^2 + z_o^2)^{3/2}} d\varphi \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M (-z_o \mathbf{u}_\rho - a \mathbf{u}_z) a e}{(a^2 + z_o^2)^{3/2}} d\varphi \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que  $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi$ , la integral queda en la forma,

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} M a e \int_0^{2\pi} \frac{(-z_o \mathbf{u}_z - a(\mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi))}{(a^2 + z_o^2)^{3/2}} d\varphi$$

Las integrales entre 0 y  $2\pi$  de  $\cos \varphi d\varphi$  y  $\sin \varphi d\varphi$  son nulas, por lo que el campo magnético será,

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_o}{2} \frac{M a^2 e z_o}{(a^2 + z_o^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

Sobre el cilindro de radio  $b$  se procede de forma análoga, lo único que cambia son el radio y el sentido de la corriente, por lo que en la expresión para  $\mathbf{B}_2$  se obtiene cambiando en la expresión anterior  $a$  por  $b$  y el signo,

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{2} \frac{M b^2 e z_o}{(b^2 + z_o^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

El campo magnético total en el punto P es,

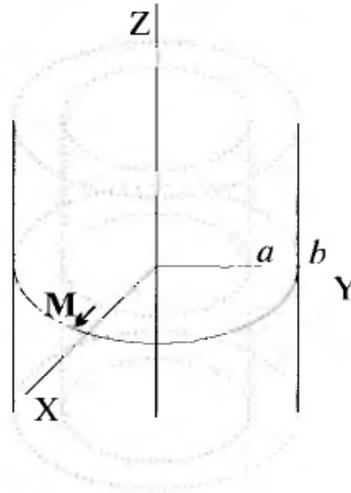
$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o M e z_o}{2} \left( \frac{b^2}{(b^2 + z_o^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2 + z_o^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 12.5

Un tubo indefinido, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , está compuesto por una material uniformemente imanado, de manera que  $\mathbf{M} = M \mathbf{u}_r$ .

1) Calcular las densidades de corriente de imanación  $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ .

2) Obtener el campo magnético  $\mathbf{B}$  en un punto del eje Z.

**Solución**1) *Densidades de corriente de imanación***Figura P12.5**

Puesto que la imanación es constante, tenemos

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$$

Las corrientes de imanación superficiales se producen en los límites del material imanado, es decir, en las superficies laterales interna y externa, ya que por tratarse de un cilindro indefinido las coronas circulares inferior y superior del tubo no se consideran.

Para la superficie lateral exterior, de radio  $b$ , tenemos que,

$\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi$ . Por tanto,

$$\mathbf{K}_{mb} = M \mathbf{u}_x \times (\mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi) = M \sin \varphi \mathbf{u}_z$$

Para la superficie interior  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_\rho = -\mathbf{u}_x \cos \varphi - \mathbf{u}_y \sin \varphi$ ; sustituyendo queda,

$$\mathbf{K}_{ma} = -M \sin \varphi \mathbf{u}_z$$

2) *Cálculo de  $\mathbf{B}$  en el eje*

Para calcular el campo magnético se puede proceder aplicando la ley de Biot y Savart, para el caso de corrientes superficiales, tanto a  $\mathbf{K}_{ma}$  como a  $\mathbf{K}_{mb}$ , sumando luego ambos campos magnéticos.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (12.5.1)$$

Como se trata de corrientes indefinidas en la dirección del eje  $Z$ , el campo es el mismo en cualquier punto de dicho eje, por tanto obtenemos el campo en el origen de coordenadas donde  $\mathbf{r} = 0$ .

2a) Para la superficie exterior,  $\rho = b$ , los vectores de posición son:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = b\mathbf{u}_\rho + z'\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -b\mathbf{u}_\rho - z'\mathbf{u}_z; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (b^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{K}_{mb} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = M \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_z \times (-b\mathbf{u}_\rho - z'\mathbf{u}_z) = M \operatorname{sen} \varphi (-b\mathbf{u}_\varphi)$$

El vector unitario  $\mathbf{u}_\varphi$  en función de los vectores unitarios de coordenadas cartesianas es,

$$\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x \operatorname{sen} \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi$$

por tanto,

$$\mathbf{K}_{mb} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = b M (\mathbf{u}_x \operatorname{sen}^2 \varphi - \mathbf{u}_y \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi)$$

La superficie elemental  $ds' = b d\varphi dz'$ . Los límites de integración son 0 y  $2\pi$  para  $\varphi$  y  $-\infty$  e  $\infty$  en el caso de  $z'$ .

Sustituyendo,

$$\mathbf{B}_b = \frac{\mu_o}{4\pi} M b^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(b^2 + z'^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u}_x \operatorname{sen}^2 \varphi - \mathbf{u}_y \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi) d\varphi,$$

donde las integrales toman los siguientes valores,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi = \left[ \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi = 0$$

Por tanto,

$$\mathbf{B}_b = \frac{1}{4} \mu_o M b^2 \mathbf{u}_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(b^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{4} \mu_o M b^2 \frac{1}{b^2} \left[ \frac{x}{\sqrt{(b^2 + x^2)}} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_b = \frac{1}{2} \mu_o M \mathbf{u}_x$$

2b) Para la superficie interior de radio  $a$  procedemos de forma análoga al caso anterior. Ahora cambiamos el radio y el sentido de la corriente  $\mathbf{K}_{ma} = -\mathbf{K}_{mb}$ , la única consecuencia es que cambia el signo del campo magnético, que es de la forma,

$$\mathbf{B}_a = -\frac{1}{2} \mu_o M \mathbf{u}_x$$

Por tanto el campo total vale,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b = 0$$

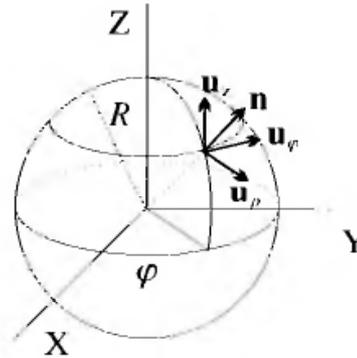
## PROBLEMA 12.6

La distribución de imanación sobre una esfera de radio  $R$ , cuyo centro coincide con el origen de coordenadas es,

$$\mathbf{M} = (M z + M') \mathbf{u}_z$$

- 1) Calcular las densidades de corriente de imanación  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ .
- 2) Con estas densidades calcular el potencial vector magnético en el origen de coordenadas.

**Solución**



**Figura P12.6**

1) *Densidades de corriente*

Como en los problemas anteriores,  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$  se calculan mediante las ecuaciones (12.5).

Teniendo en cuenta la forma del rotacional en coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{J}_m = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\rho + \left( \frac{\partial M_\rho}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho M_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial M_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_z$$

La corriente  $\mathbf{J}_m$ , considerando que  $M$  solo tiene componente  $M_z$  y esta es solo función de la coordenada  $z$ , será nula,

$$\mathbf{J}_m = 0$$

La densidad de corriente  $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ , se obtiene considerando el valor de  $M$  dado y que sobre la superficie de la esfera, como muestra la figura P12.6,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z \cos \theta + \mathbf{u}_\rho \sin \theta$ .

$$\mathbf{K}_m = (M z + M') \mathbf{u}_z \times (\mathbf{u}_z \cos \theta + \mathbf{u}_\rho \sin \theta) = (M z + M') \sin \theta \mathbf{u}_\varphi$$

Resumiendo, las densidades de corriente son,

$$\mathbf{J}_m = 0 ; \quad \mathbf{K}_m = (M z + M') \sin \theta \mathbf{u}_\varphi$$

2) *Potencial vector magnético*

Con las densidades de corriente obtenidas calculamos el potencial vector magnético utilizando las ecuaciones (12.3), (12.4). Dados los valores de  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  queda en la forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}_m ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{12.6.1}$$

Los vectores de posición  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ , así como  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  y  $ds'$  son,

$$\mathbf{r} = 0 ; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{n} ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R ; \quad ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Llevando los distintos términos obtenidos sobre la ecuación (12.6.1), y teniendo en cuenta que los límites de integración para  $\theta$  son 0 y  $\pi$ , y para  $\varphi$ , 0 y  $2\pi$ , el potencial vector queda de la forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_\varphi d\varphi \int_0^\pi R(Mz + M') \sin^2\theta d\theta$$

Considerando que el vector unitario  $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x \sin \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi$ , la integral anterior se transforma en la siguiente.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\mathbf{u}_x \sin \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi) d\varphi \int_0^\pi R(Mz + M') \sin^2\theta d\theta$$

Las integrales de  $\sin \varphi d\varphi$  y  $\cos \varphi d\varphi$  entre 0 y  $2\pi$  son nulas, por tanto el potencial vector será también nulo en  $\mathbf{r} = 0$ .

$$\mathbf{A}(0) = 0$$

### PROBLEMA 12.7

Un cilindro de radio  $R$  y longitud  $2L$ , dispuesto como indica la figura P12.7.1, está construido con un material cuya imanación es  $\mathbf{M} = M\mathbf{u}_z$ .

1) Calcular el potencial escalar magnético en puntos situados sobre el eje  $Z$ .

2) Mediante el potencial escalar obtener los vectores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  en los puntos  $P(0, 0, 0)$ ,  $P'(0, 0, 2L)$  y  $P''(0, 0, -2L)$ .

3) Calcular los valores de  $\mathbf{H}$  en  $P$  cuando  $L = 0.1R$  y  $L = 10R$ .

### Solución

Se calcula el potencial escalar mediante la ecuación (12.10) que sirve para definirlo.

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' - \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr' \quad (12.10)$$

Dado que  $\mathbf{M}$  es uniforme y por tanto no depende de ninguna coordenada,

$$\nabla' \cdot \mathbf{M} = 0$$

El valor de  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$  sobre la superficie cilíndrica de radio  $R$  es nulo, dado que  $\mathbf{n}$  es perpendicular a  $\mathbf{M}$ .

Sobre la superficie del círculo cuyo centro está en  $(0, 0, L)$   $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$ , y en consecuencia,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = M$$

Sobre la del círculo con centro en  $(0, 0, -L)$   $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_z$ ,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M\mathbf{u}_z \cdot (-\mathbf{u}_z) = -M$$

En el cálculo de  $\phi_m$  sobre el eje Z distinguimos dos casos: 1º cuando consideramos los puntos entre  $-L$  y  $L$ , dentro del cilindro imanado; 2º para puntos en los que  $|z| > L$ , fuera del cilindro imanado.

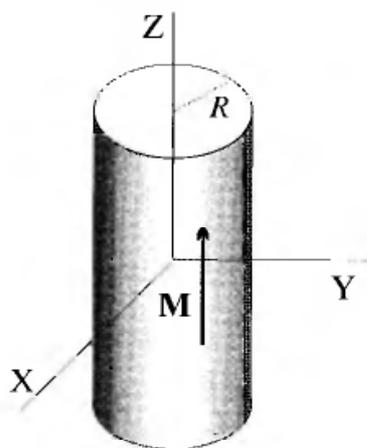


Figura P12.7.1

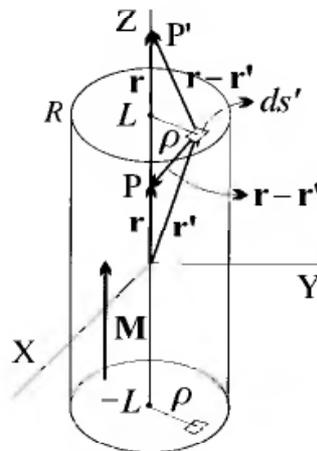


Figura P12.7.2

1a) Puntos en el interior del cilindro

La integración de la ecuación (12.10) se compone de dos partes, una correspondiente al círculo con centro en  $z = L$  y la otra para el centrado en  $z = -L$ . Los vectores de posición para el primer círculo, como muestra la figura P12.6.2, son:

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}' = \rho'\mathbf{u}_\rho + L\mathbf{u}_z ; \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -(L - z)\mathbf{u}_z - \rho'\mathbf{u}_\rho$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ((\rho')^2 + (L - z)^2)^{1/2}$$

Para el segundo serán,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}' = \rho'\mathbf{u}_\rho - L\mathbf{u}_z ; \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (L + z)\mathbf{u}_z - \rho'\mathbf{u}_\rho$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ((\rho')^2 + (L + z)^2)^{1/2}$$

La superficie elemental en ambos casos es,  $ds' = \rho' d\varphi' d\rho'$ .

Llevando los datos anteriores a la ecuación (12.10) obtenemos la siguiente integral,

$$\phi_m = \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R \left( \frac{\rho'}{((\rho')^2 + (L - z)^2)^{1/2}} - \frac{\rho'}{((\rho')^2 + (L + z)^2)^{1/2}} \right) d\rho'$$

La integración produce la ecuación siguiente,

$$\phi_m = \frac{M}{2} \left[ ((\rho')^2 + (L - z)^2)^{1/2} - ((\rho')^2 + (L + z)^2)^{1/2} \right]_0^R$$

$$\phi_m = \frac{M}{2} \left( (R^2 + (L - z)^2)^{1/2} - (R^2 + (L + z)^2)^{1/2} + 2z \right) \quad (12.7.1)$$

1b) Fuera del cilindro  $|z| > L$

Lo único que cambia son los vectores de posición respectivos.

Para  $z > 0$ , Disco centrado en  $(0, 0, L)$ ,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}' = \rho'\mathbf{u}_\rho + L\mathbf{u}_z ; \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (z - L)\mathbf{u}_z - \rho'\mathbf{u}_\rho$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ((\rho')^2 + (z - L)^2)^{1/2}$$

Disco centrado en  $z = -L$ ,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; \mathbf{r}' = \rho'\mathbf{u}_\rho - L\mathbf{u}_z ; \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (z + L)\mathbf{u}_z - \rho'\mathbf{u}_\rho$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ((\rho')^2 + (z + L)^2)^{1/2}$$

Como sólo han variado los términos  $(z + L)$  y  $(z - L)$  entre paréntesis correspondientes a  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , la ecuación (12.7.1) en este caso se transforma en la siguiente,

$$\phi_m = \frac{M}{2} \left( (R^2 + (z - L)^2)^{1/2} - (R^2 + (z + L)^2)^{1/2} + 2L \right) \quad (12.7.2)$$

Para  $z < 0$ .

Teniendo en cuenta los valores de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  respectivos, se llega a una expresión igual a la ecuación (12.7.2).

### 2) Vectores de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$

El cálculo del vector  $\mathbf{H}$  se hace mediante la ecuación (12.22),  $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$ .

#### 2a) Dentro del cilindro

Dentro del cilindro se aplica la ecuación (12.7.1) para  $\phi_m$ . Como el potencial escalar solo depende de la coordenada  $z$ ,

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial\phi_m}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{H} = \frac{M}{2} \left( \frac{(L - z)}{(R^2 + (L - z)^2)^{1/2}} + \frac{(L + z)}{(R^2 + (L + z)^2)^{1/2}} - 2 \right) \mathbf{u}_z \quad (12.7.3)$$

El vector  $\mathbf{B}$  se obtiene mediante la ecuación,  $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

$$\mathbf{B} = \mu_o \frac{M}{2} \left( \frac{(L - z)}{(R^2 + (L - z)^2)^{1/2}} + \frac{(L + z)}{(R^2 + (L + z)^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z \quad (12.7.4)$$

En el punto  $P(0, 0, 0)$   $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  son:

$$\mathbf{H} = M \left( \frac{L}{(R^2 + L^2)^{1/2}} - 1 \right) \mathbf{u}_z \quad (12.7.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_o M \frac{L}{(R^2 + L^2)^{1/2}} \mathbf{u}_z \quad (12.7.6)$$

Las ecuaciones (12.7.5) y (12.7.6) muestran que en el interior del cilindro imanado el campo  $\mathbf{H}$  tiene sentido opuesto a la imanación  $\mathbf{M}$ , mientras que el campo magnético tiene el mismo sentido que  $\mathbf{M}$ .

Como  $\mathbf{H}$  es de sentido opuesto se le llama *campo desimanador*. El factor que multiplica a  $M$  en la ecuación (12.7.5), que depende de la forma geométrica del cuerpo considerado y de la dirección de imanación, se denomina *factor desimanador*.

2b) *Fuera del cilindro*

Fuera del cilindro se sigue el mismo procedimiento, pero ahora se utiliza la ecuación (12.7.2) para  $\phi_m$ . El resultado para  $\mathbf{H}$  es,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} M \left( \frac{-(z-L)}{(R^2 + (z-L)^2)^{1/2}} + \frac{(z+L)}{(R^2 + (z+L)^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z \quad (12.7.7)$$

El campo magnético  $\mathbf{B}$  ahora es,  $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_o M \left( \frac{-(z-L)}{(R^2 + (z-L)^2)^{1/2}} + \frac{(z+L)}{(R^2 + (z+L)^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z \quad (12.7.8)$$

En los puntos  $P'(0, 0, 2L)$  y  $P''(0, 0, -2L)$   $\mathbf{H}$  vale lo mismo, como se demuestra sustituyendo  $z = 2L$  y  $z = -2L$  en (12.7.7). Su valor es,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} M \left( \frac{3L}{(R^2 + (3L)^2)^{1/2}} - \frac{L}{(R^2 + L^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z \quad (12.7.9)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_o M \left( \frac{3L}{(R^2 + (3L)^2)^{1/2}} - \frac{L}{(R^2 + L^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z \quad (12.7.10)$$

Las ecuaciones (12.7.9) y (12.7.10) muestran que fuera del cilindro imanado  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  tienen la misma dirección y sentido.

Comparando las ecuaciones (12.7.3) y (12.7.7) podemos comprobar que en  $z = L$  hay una discontinuidad del campo  $H$ , es decir, hay un salto en el valor de  $H$  igual al módulo de la imanación  $M$ , además de un cambio en

el sentido de  $\mathbf{H}$ , pasa de  $-\mathbf{u}_z$  a  $\mathbf{u}_z$ . Las discontinuidades de la imanación  $M$  en  $z = L$  y  $z = -L$ , son las fuentes donde nacen y mueren las líneas de campo  $\mathbf{H}$ .

3) *Valores de  $\mathbf{H}$  en función del tamaño del cilindro imanado*

Si sustituimos en la ecuación (12.7.5)  $L = 0,1R$  obtenemos,

$$\mathbf{H} \simeq -0,9 M \mathbf{u}_z$$

En este caso el factor desimanador es 0,9, muy próximo a la unidad, que es el valor que corresponde a una placa indefinida.

Sustituyendo  $L = 10R$  en la ecuación (12.7.5) obtenemos,

$$\mathbf{H} \simeq -0,005 M \mathbf{u}_z$$

Ahora el factor desimanador es muy pequeño, prácticamente cero, como corresponde a un cilindro indefinido en la dirección del eje.

Estos ejemplos muestran la razón por la cual es muy difícil imanar una placa en la dirección normal a sus planos, ya que el campo desimanador es prácticamente igual a la imanación; mientras que por otro lado es muy fácil imanar un trozo de hilo (cilindro prácticamente indefinido), dado que el campo desimanador es muy pequeño.

### PROBLEMA 12.8

Dos cilindros indefinidos coaxiales, cuyos radios están indicados en la figura P12.8. son de un material conductor, siendo sus respectivas permeabilidades  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Por los cilindros circulan corrientes del mismo valor pero con sentidos contrarios. Se suponen uniformes las densidades de corriente.

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en función de la distancia al eje.

**Solución**

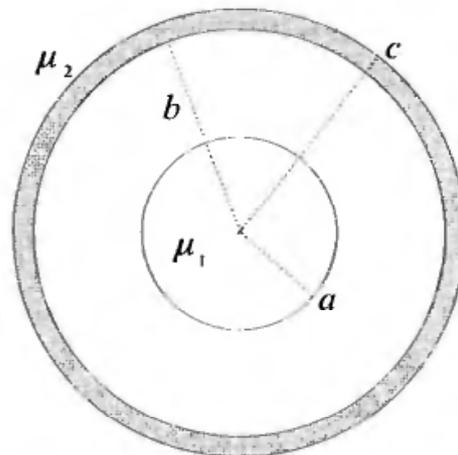


Figura P12.8

El procedimiento que seguimos es calcular en primer lugar el campo  $\mathbf{H}$  mediante el teorema de Ampère, ecuación (12.20) y después se obtiene  $\mathbf{B}$  mediante la ecuación  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Además se aplica la simetría cilíndrica del sistema y la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  en las superficies de separación entre los distintos medios.

*Zona 1*  $0 < \rho \leq a$

La densidad de corriente en el conductor de radio  $a$  es

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

Aplicando el teorema de Ampère tendremos,

$$\oint_C \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = H_{\varphi 1} 2\pi \rho ; \quad \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

De donde se deduce que,

$$H_{\varphi 1} = I \frac{\rho}{2\pi a^2}$$

$$\mathbf{H}_1 = I \frac{\rho}{2\pi a^2} \mathbf{u}_\varphi ; \quad \mathbf{B}_1 = \mu_1 I \frac{\rho}{2\pi a^2} \mathbf{u}_\varphi$$

*Zona 2*  $a < \rho \leq b$

Procedemos de forma análoga al caso anterior, pero ahora,

$$\oint_C \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = H_{\varphi 2} 2\pi \rho ; \quad \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I$$

De lo anterior se deduce que,

$$H_{\varphi 2} = \frac{I}{2\pi \rho}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi ; \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0 \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi$$

*Zona 3*  $b < \rho \leq c$

Ahora debemos tener en cuenta que la corriente en el conductor externo es de sentido contrario a la anterior y su densidad es,

$$J' = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$$

Las dos integrales son de la forma,

$$\oint_C \mathbf{H}_3 \cdot d\mathbf{l} = H_{\varphi 3} 2\pi \rho ; \quad \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \pi(\rho^2 - b^2) = I \frac{(\rho^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)}$$

Por tanto,

$$H_{\varphi 3} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{(\rho^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)}$$

$$\mathbf{H}_3 = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{(\rho^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} \mathbf{u}_\varphi ; \quad \mathbf{B}_3 = \mu_2 \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{(\rho^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} \mathbf{u}_\varphi$$

Zona 4  $\rho > c$

En esta zona el campo  $\mathbf{H}$  es nulo por que,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I - I = 0$$

$$\mathbf{H}_4 = 0 \text{ y } \mathbf{B}_4 = 0$$

### PROBLEMA 12.9

Por un conductor rectilíneo e indefinido, de radio  $a$ , circula una corriente  $I$ . Una arandela, de radio interior  $a$ , exterior  $b$  y espesor  $c$ , de material cuya permeabilidad es  $\mu$ , está dispuesta como indica la figura P12.9.

Calcular  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  para  $\rho > a$ , dentro y fuera de la arandela.

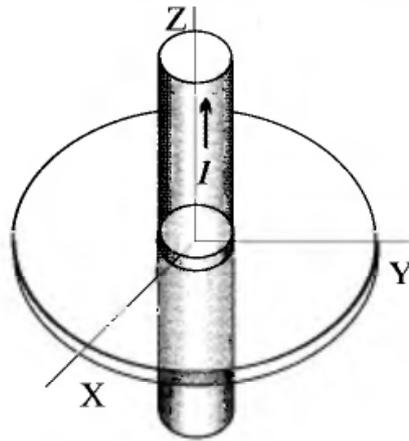


Figura P12.9

### Solución

Como en los ejercicios anteriores calculamos  $\mathbf{H}$  aplicando el teorema de Ampère, ecuación (12.20). Además se aplican las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (12.30), (12.34) y (12.35) para las componentes normales de  $\mathbf{B}$  y tangenciales de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ . También se tiene en cuenta la simetría cilíndrica del sistema.

*Cálculo de  $\mathbf{H}$*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \rightarrow 2\pi\rho H_\varphi = I \rightarrow H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Dada la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$ , este campo es en todas las zonas el dado por la ecuación siguiente,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

El campo magnético  $\mathbf{B}$  depende de la zona considerada. Se obtiene a partir del valor de  $\mathbf{H}$ , aplicando la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  y la ecuación (12.35) para las condiciones de frontera.

Para  $a \leq \rho \leq b$

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} = \mu_o \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Zona en la que  $a \leq \rho \leq b$  y dentro de la arandela,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Zona en la que  $a \leq \rho \leq b$  y fuera de la arandela,

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} = \mu_o \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Como se puede comprobar los distintos valores de  $\mathbf{B}$  cumplen las condiciones de frontera indicadas; es decir, las componentes tangenciales de  $\mathbf{B}$  no son continuas en los límites que separan la arandela del vacío.

Para  $\rho > b$ ,  $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$ .

### PROBLEMA 12.10

Tenemos un sistema de conductores coaxiales indefinidos, cuyos radios respectivos son  $R_1$  y  $R_2$ . Por el conductor de radio  $R_1$  circula la corriente  $I$  y por el otro una corriente  $I$  en sentido contrario. En el espacio entre conductores existe dos zonas de material, como indica la figura P12.10, con permeabilidades  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .

Calcular los vectores de campo  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  en el espacio entre conductores.

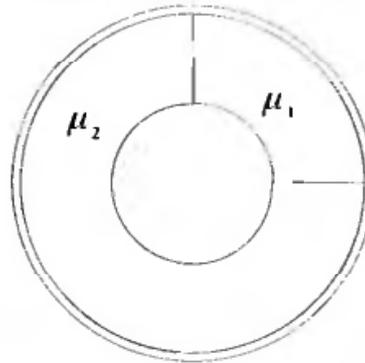


Figura P12.10

### Solución

La solución a este problema se obtiene utilizando el teorema de Ampère dado por la ecuación (12.20) y la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  expresadas por la ecuación (12.30).

La simetría del sistema y de la corriente que circula por el conductor central es cilíndrica. Además las intensidades de campo tienen distinto módulo en el medio comprendido entre  $0 - \pi/2$  del que ocupa el resto del espacio ( $\pi/2 - 2\pi$ ). Con  $d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi$ ,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{H}_1 \cdot \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi + \int_{\pi/2}^{2\pi} \mathbf{H}_2 \cdot \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi = \rho \left( H_{\varphi 1} \frac{\pi}{2} + H_{\varphi 2} \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$\rho \left( H_{\varphi 1} \frac{\pi}{2} + H_{\varphi 2} \frac{3\pi}{2} \right) = I \quad (12.10.1)$$

De la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  se deriva que,

$$B_{n1} = B_{n2} \text{ y como } B_1 = \mu_1 H_1 ; B_2 = \mu_2 H_2$$

$$\mu_1 H_{\varphi 1} = \mu_2 H_{\varphi 2} \quad (12.10.2)$$

Las ecuaciones (12.10.1) y (12.10.2) forman un sistema del que se pueden obtener  $H_{\varphi 1}$  y  $H_{\varphi 2}$ .

$$H_{\varphi 1} = \frac{2\mu_2 I}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \frac{1}{\rho} ; H_{\varphi 2} = \frac{2\mu_1 I}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \frac{1}{\rho}$$

Teniendo en cuenta esta solución y la relación  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , los vectores de campo en las distintas zonas serán,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{2I\mu_2}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi ; \mathbf{H}_2 = \frac{2I\mu_1}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{2I\mu_1\mu_2}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

### PROBLEMA 12.11

Tenemos un sistema de conductores coaxiales indefinidos, cuyos radios respectivos son  $a$  y  $b$ . Por dichos conductores circulan corrientes del mismo módulo pero sentido contrario. En un sector del volumen comprendido entre los conductores, véase la figura P12.11, existe un material de permeabilidad  $\mu = 100\mu_0$ .

1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  y comparar con el caso de que no existiera material entre los conductores.

2) Calcular el flujo de  $\mathbf{B}$  en una sección de longitud unidad perpendicular a  $\mathbf{u}_\varphi$ . Comparar los resultados que se obtienen en los dos casos citados en el apartado anterior.

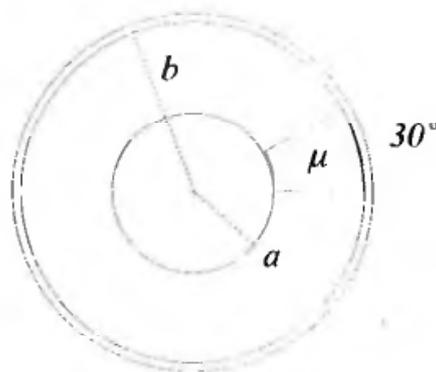


Figura P12.11

**Solución***1) Vectores de campo*

El problema se resuelve aplicando el teorema de Ampère, dado por la ecuación (12.20), la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$ , ecuación (12.30), y la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ .

*1a) Cuando no existe medio material entre conductores*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow 2\pi\rho H_\varphi = I$$

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Los vectores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  serán,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

*1b) Cuando existe un sector de material como el indicado en la figura*

Las intensidades de campo son distintas en cada sector. Los límites para cada sector son  $0, -\pi/6$  y  $0, -11\pi/6$ .

De  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$  se deduce que,

$$\rho \left( H_{\varphi 1} \frac{\pi}{6} + H_{\varphi 2} \frac{11\pi}{6} \right) = I \quad (12.11.1)$$

La continuidad de las componentes normales determina la relación siguiente,

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{y como } B_1 = \mu H_1 \quad ; \quad B_2 = \mu_0 H_2$$

$$\mu H_{\varphi 1} = \mu_0 H_{\varphi 2} \quad (12.11.2)$$

Las ecuaciones (12.11.1) y (12.11.2) forman un sistema que nos permite calcular  $H_{\varphi 1}$  y  $H_{\varphi 2}$ .

$$H_{\varphi 1} = \frac{6\mu_o I}{\pi(\mu_o + 11\mu)} \frac{1}{\rho} ; \quad H_{\varphi 2} = \frac{6\mu I}{\pi(\mu_o + 11\mu)} \frac{1}{\rho}$$

De las ecuaciones anteriores, considerando que  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  y que  $\mu = 100\mu_o$ ,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{6I}{\pi 1101} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi} ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{600I}{\pi 1101} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mu_o \frac{600I}{\pi 1101} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi}$$

La comparación de los resultados obtenidos en 1a) y 1b) nos muestra que la introducción de un sector con alta permeabilidad, aumenta el campo magnético  $\mathbf{B}$  en dicho espacio, ya que  $600/1101 > 1/2$ , y modifica los valores de  $\mathbf{H}$  en las dos zonas, aumentando ligeramente en el vacío y disminuyendo de forma importante en la zona donde se sitúa el sector ( $6/1101 \ll 1/2$ ).

## 2) Flujo

El flujo por unidad de longitud  $l$  en el caso 1a), con  $d\mathbf{s} = l d\rho \mathbf{u}_{\varphi}$ , será,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mu_o \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_{\varphi} \cdot \mathbf{u}_{\varphi} l d\rho = \mu_o \frac{I}{2\pi} l \ln \frac{b}{a}$$

$$\frac{\Phi}{l} = \mu_o \frac{I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

El flujo por unidad de longitud en el caso 1b) será,

$$\Phi' = \int_a^b \mu_o \frac{600I}{\pi 1101} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi} \cdot \mathbf{u}_{\varphi} l d\rho = \mu_o \frac{600I}{\pi 1101} l \ln \frac{b}{a}$$

$$\frac{\Phi'}{l} = \mu_o \frac{600I}{\pi 1101} \ln \frac{b}{a}$$

Dado que los campos magnéticos son, aproximadamente, un 9 % superiores en el segundo caso que en el primero, lo mismo ocurre con los flujos.

## PROBLEMA 12.12

Por un cilindro conductor indefinido de radio  $a$ , circula una corriente  $I$ , y está situado en el límite de separación entre dos medios como indica la figura P12.12. Suponemos los medios homogéneos e isotrópicos, cuyas permeabilidades son:  $\mu_1 = 2\mu_o$  y  $\mu_2 = 8\mu_o$ . Siendo su conductividad nula y su permitividad  $\epsilon_o$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  en los dos medios, para  $\rho > a$ .

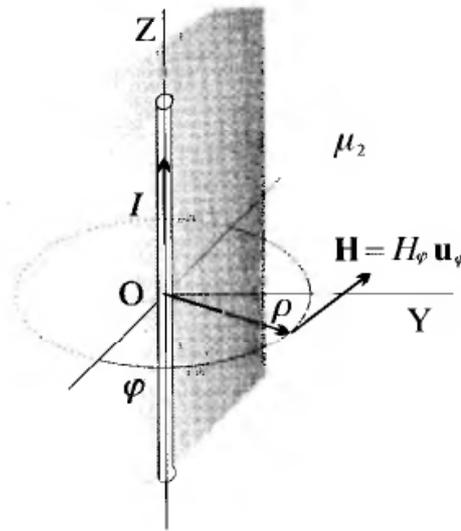


Figura P12.12

**Solución**

Calculamos los vectores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  de forma análoga a los problemas anteriores, es decir, aplicamos el teorema de Ampère y la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$ , ecuaciones (12.20) y (12.30). Además tenemos en cuenta que  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , con lo cual podemos obtener  $\mathbf{M}$ .

$$\text{De } \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \text{ se deduce que,}$$

$$\pi\rho(H_{\varphi 1} + H_{\varphi 2}) = I \quad (12.12.1)$$

La continuidad de las componentes normales determina la relación siguiente,

$$B_{n1} = B_{n2} \text{ y como } B_1 = \mu_1 H_1 ; B_2 = \mu_2 H_2$$

$$\mu_1 H_{\varphi 1} = \mu_2 H_{\varphi 2} \quad (12.12.2)$$

El sistema formado por las ecuaciones (12.12.1) y (12.12.2) nos permite calcular  $H$  en los dos medios.

$$H_{\varphi 1} = \frac{I\mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho} ; H_{\varphi 2} = \frac{I\mu_1}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho}$$

Utilizando los valores anteriores calculamos  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{M}$  en los dos medios,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I\mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi ; \mathbf{H}_2 = \frac{I\mu_1}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{I\mu_1\mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} - \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \frac{I \mu_2}{\pi (\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0} \frac{I \mu_1}{\pi (\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Sustituyendo los valores de  $\mu_1 = 2\mu_0$  y  $\mu_2 = 8\mu_0$ , quedan de la forma,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{4I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{8I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{4I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{M}_2 = \frac{7I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

### PROBLEMA 12.13

En un medio magnético indefinido se practica un hueco cilíndrico, indefinido en la dirección del eje X. El hueco se recubre con una capa cilíndrica de otro material. La sección transversal del sistema se muestra en la figura P12.13. Sobre el eje X situamos un conductor filiforme indefinido por el que circula una corriente  $I$ . Las permeabilidades de los dos medios son  $\mu_1 = 10\mu_0$  y  $\mu_2 = 100\mu_0$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{M}$  en los distintos medios.

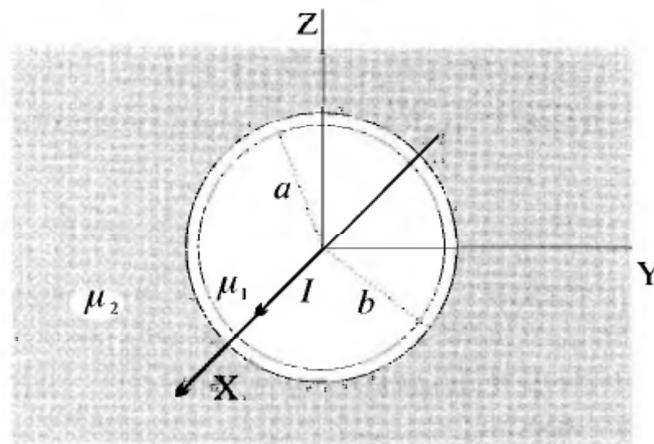


Figura P 12.13

### Solución

La solución del problema se obtiene aplicando el teorema de Ampère dado por la ecuación (12.20) y el comportamiento de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  en la frontera entre los distintos medios expresadas por las ecuaciones (12.34) y (12.35).

Operamos de forma análoga a como hemos hecho en problemas anteriores.

$$\text{De } \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow 2\pi\rho H_\varphi = I$$

se deduce que,

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Zona  $0 \leq \rho \leq a$

Utilizando el valor de  $H_\varphi$  y la relación  $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ,

$$\mathbf{H}_o = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{B}_o = \mu_o \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{M}_o = 0$$

Zona  $a < \rho \leq b$

Las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  son continuas, dado que no existe corriente superficial, en consecuencia,

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_o$$

Las componentes tangenciales de  $\mathbf{B}$  cumplen la siguiente condición,

$$\frac{B_{to}}{\mu_o} = \frac{B_{t1}}{\mu_1} \text{ de donde } B_{t1} = \frac{\mu_1}{\mu_o} B_{to}$$

Dada la simetría del sistema  $B_{to} = B_o$  y  $B_{t1} = B_1$ , por tanto,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \text{ con } \mu_1 = 10\mu_o \rightarrow \mathbf{B}_1 = \mu_o \frac{5I}{\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_o} - \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_1 - \mu_o}{\mu_o} \mathbf{H}_1 = \frac{9I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Zona  $\rho > b$

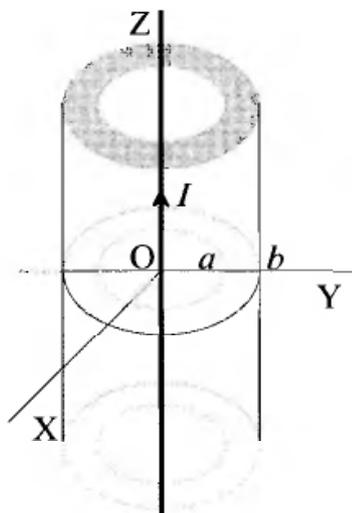
Con las mismas consideraciones que en el caso anterior, y teniendo en cuenta que ahora los medios limítrofes son respectivamente de permeabilidad  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , los vectores  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{B}_2$  y  $\mathbf{M}_2$  son,

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_o \quad ; \quad \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 = \mu_o \frac{50I}{\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{M}_2 = \frac{99I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

### PROBLEMA 12.14

Un tubo indefinido en la dirección del eje Z de material magnético con permeabilidad  $\mu$ , cuyo radio interior es  $a$  y el exterior  $b$ , se dispone como indica la figura 12.14. Sobre el eje del tubo, eje Z, se sitúa un hilo indefinido por el que circula una corriente  $I$ .

Aplicando las condiciones en los límites para los vectores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ , calcular  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  dentro y fuera del material que compone el tubo.

**Solución****Figura P12.14**

Aplicando el teorema de Ampère como en los problemas anteriores el campo  $\mathbf{H}$  será,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

En la superficie cilíndrica de separación entre el vacío y el material de permeabilidad  $\mu$  se aplica la condición de continuidad de las componentes tangenciales del vector intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ . Es decir, para  $\rho = a$

$$H_\varphi(a^+) = H_\varphi(a^-)$$

Lo mismo ocurre para  $\rho = b$ . En consecuencia tenemos que el campo  $\mathbf{H}$  es continuo y no cambia al pasar del material magnético al vacío.

En cuanto al campo magnético  $\mathbf{B}$  se obtiene aplicando la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ .

Fuera del material, en el vacío, será,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Y dentro del material de permeabilidad  $\mu$ ,

$$\mathbf{B} = \mu \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

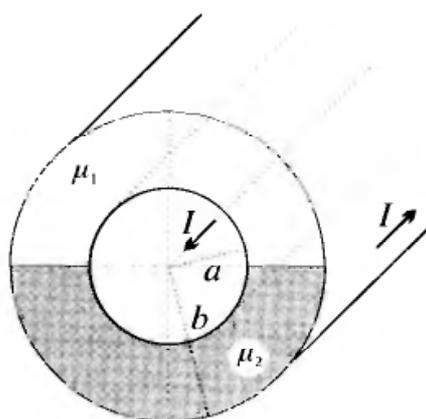
**PROBLEMA 12.15**

Dado un cable coaxial, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ . El espacio interior está ocupado por dos medios de permeabilidades  $\mu_1 = 2\mu_0$  y  $\mu_2 = 3\mu_0$ , véase la figura P12.15. Por el conductor de radio  $a$  circula una corriente  $I$ , y por el de radio  $b$  una corriente  $I$  en sentido opuesto.

1) Calcular los vectores de campo  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  en los dos medios magnéticos.

2) Calcular la densidad de carga de imanación  $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$  en la superficie de separación entre los dos medios.

**Solución**



**Figura P12.15**

Por la simetría cilíndrica del problema se deduce que los campos tienen sólo componente polar, esto es  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$  son paralelos a  $\mathbf{u}_\varphi$ .

Aplicando el teorema de Ampère a un camino circular comprendido entre los radios  $a$  y  $b$ ,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

donde  $d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi$ ,  $a < \rho < b$ .

Aplicamos las condiciones de continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$ , y puesto que la dirección normal a la frontera de los medios es, precisamente,  $\mathbf{u}_\varphi$ ,

$$B_{n1} = B_{n2} \rightarrow B_{\varphi 1} = B_{\varphi 2}$$

Hay dos tramos diferenciados, uno entre  $0$  y  $\pi$  donde la intensidad de campo es  $\mathbf{H}_1$ , y el otro, entre  $\pi$  y  $2\pi$ , donde la intensidad de campo es  $\mathbf{H}_2$ . El teorema de Ampère nos lleva a la siguiente relación,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^\pi H_{\varphi 1} \rho d\varphi + \int_\pi^{2\pi} H_{\varphi 2} \rho d\varphi = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$\pi \rho (H_{\varphi 1} + H_{\varphi 2}) = I \quad (12.15.1)$$

La continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  unida a la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  determinan que,

$$\mu_1 H_{\varphi 1} = \mu_2 H_{\varphi 2} \quad (12.15.2)$$

La dos ecuaciones anteriores forman un sistema que nos permite calcular la intensidad de campo magnético en los dos medios,

$$H_{\varphi 1} = \frac{\mu_2 I}{\pi (\mu_1 + \mu_2) \rho} \frac{1}{\rho}; \quad H_{\varphi 2} = \frac{\mu_1 I}{\pi (\mu_1 + \mu_2) \rho} \frac{1}{\rho}$$

Si además sustituimos  $\mu_1 = 2\mu_o$ ,  $\mu_2 = 3\mu_o$  obtenemos,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{3I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi} \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{2I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi}$$

$$\mathbf{B} = \frac{I}{\pi r} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{u}_{\varphi} = \mu_o \frac{6I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi}$$

La imanación se obtiene de la relación  $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_o - \mathbf{H}$  por tanto,

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{B}/\mu_o - \mathbf{H}_1 = \frac{3I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi} \quad ; \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{B}/\mu_o - \mathbf{H}_2 = \frac{4I}{5\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\varphi}$$

En la frontera de dos materiales de distinta imanación se acumulan las densidades de un signo que depende de las imanaciones en los respectivos medios. Su expresión viene dada por la ecuación  $\sigma_m = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)$ . Por tanto, al ser las superficies de frontera perpendiculares a  $\mathbf{M}$ ,

$$\sigma_m = \mathbf{u}_{\varphi} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \frac{4I}{5\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{3I}{5\pi} \frac{1}{\rho}$$

$$\sigma_m = \frac{I}{5\pi} \frac{1}{\rho}$$

En la otra frontera  $\sigma_m$  tiene signo contrario; es decir, las densidades de cargas magnéticas son positivas al pasar de un medio de mayor permeabilidad a otro de menor y negativas en caso contrario.

### PROBLEMA 12.16

En la superficie de separación de dos medios homogéneos e isótropos, en la que  $\mathbf{K} = 0$ , demostrar que,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{A}_1}{\mu_1} - \frac{\nabla \times \mathbf{A}_2}{\mu_2} \right) = 0$$

Siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie de separación;  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  el potencial vector en cada medio;  $\mu_1$  y  $\mu_2$  las permeabilidades respectivas.

#### Solución

Para realizar la demostración utilizamos la ecuación  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y las condiciones en los límites para las componentes normales y tangenciales de  $\mathbf{B}$  en el caso de que  $\mathbf{K} = 0$  sobre la superficie. Dichas ecuaciones son la (12.30) y (12.35).

Sustituyendo  $\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2$  en la ecuación (12.30) queda,

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_1 - \nabla \times \mathbf{A}_2) = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0$$

De esta forma queda demostrada la primera relación.

En la segunda demostración se aplica la ecuación (12.35),

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} - \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} \right) = 0$$

Sustituyendo  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  por sus respectivos rotacionales, queda,

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{A}_1}{\mu_1} - \frac{\nabla \times \mathbf{A}_2}{\mu_2} \right) = 0$$

Con lo cual queda demostrada la segunda relación.

### PROBLEMA 12.17

Sobre un toroide se arrollan  $N$  espiras por las que circula una corriente  $I$ . El toroide, como muestra la figura P12.17, tiene un radio medio  $b$  y sus sección un radio  $a$  ( $b \gg a$ ). Se compone de dos mitades cuyos materiales respectivos tienen permeabilidades  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . El plano que separa los dos materiales es perpendicular a la circunferencia de radio  $b$ .

Calcular los vectores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  en los distintos puntos de la circunferencia de radio  $b$ .

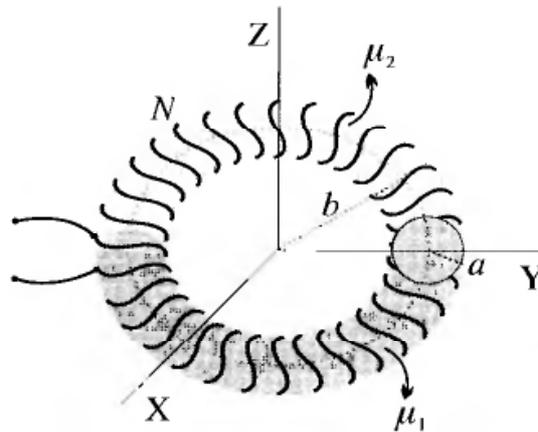


Figura 12.17

### Solución

Para obtener el campo aplicamos el teorema de Ampère en la forma dada por la ecuación (12.20). Para que exista simetría cilíndrica en la distribución de campo y corriente, suponemos que las  $N$  espiras están distribuidas uniformemente por el toroide. Si las permeabilidades de los medios son muy superiores a la del vacío, la disposición indicada en la figura produce efectos similares, ya que la dispersión de líneas de campo es prácticamente nula.

En cada medio la intensidad de campo es diferente.

La aplicación del teorema de Ampère nos lleva a la siguiente relación,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_{\varphi 1} b d\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} H_{\varphi 2} b d\varphi = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = NI$$

$$\pi b(H_{\varphi 1} + H_{\varphi 2}) = NI \quad (12.17.1)$$

La continuidad de la componentes normales de  $\mathbf{B}$  unida a la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  determinan que,

$$B_{n1} = B_{n2} \rightarrow B_{\varphi 1} = B_{\varphi 2}$$

$$\mu_1 H_{\varphi 1} = \mu_2 H_{\varphi 2} \quad (12.17.2)$$

El sistema formado por las ecuaciones (12.17.1) y (12.17.2) permite calcular el campo  $\mathbf{H}$  en los puntos de la circunferencia de radio  $b$ .

$$H_{\varphi 1} = \frac{\mu_2 NI}{\pi b(\mu_1 + \mu_2)} \quad ; \quad H_{\varphi 2} = \frac{\mu_1 NI}{\pi b(\mu_1 + \mu_2)}$$

Con los valores anteriores se obtienen  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mu_2 NI}{\pi b(\mu_1 + \mu_2)} \mathbf{u}_{\varphi} \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_1 NI}{\pi b(\mu_1 + \mu_2)} \mathbf{u}_{\varphi}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_1 \mu_2 NI}{\pi b(\mu_1 + \mu_2)} \mathbf{u}_{\varphi}$$

### PROBLEMA 12.18

Un toroide de radio exterior 11 cm e interior 9 cm, está construido con un material cuya curva de imanación se muestra en la figura 12.2(1). Sobre el toroide se arrollan 1000 espiras.

Suponemos que no hay dispersión de líneas de campo, siendo dicho campo prácticamente uniforme en el toroide. El radio medio del toroide es 10 cm.

1) Calcular la corriente mínima  $I$  que debe circular por las espiras para que el material del toroide alcance la saturación.

2) Calcular el valor del flujo, correspondiente a la saturación de  $M$ , que puede atravesar una de las espiras del toroide, cuyo radio  $R$  es un centímetro.

#### Solución

##### 1) Corriente

La curva de imanación indicada en la figura 12.2(1) llega a la saturación cuando la recta  $B = \mu_o H$  indicada en dicha figura coincide con la curva de imanación, ya que a partir de ese punto la imanación  $M$  no aumenta y,

$$B = \mu_o(H + M) = \text{constante} + \mu_o H$$

El punto donde se produce el contacto no es muy preciso pero suponemos que en la gráfica coincide con el campo,

$$H = 10^3 \text{ A/m}$$

La aplicación del teorema de Ampère a la circunferencia del radio medio del toroide proporciona la relación siguiente,

$$2\pi \times 10^{-1} H = NI = 10^3 I$$

por tanto,

$$I = 2\pi 10^{-4} H \quad (12.18.1)$$

Sustituyendo en la ecuación (12.18.1) el valor de  $H$  que coincide con el inicio de la saturación del material ( $\simeq 10^3 \text{ A/m}$ ), obtendremos la corriente mínima pedida. Esta es,

$$I \simeq 2\pi \times 10^{-1} \simeq 0,628 \text{ A}$$

### 2) Flujo

En la figura 12.2(1) la ordenada en el origen de la recta,

$$B = \mu_o H + \mu_o M$$

es  $\mu_o M$  y corresponde en la figura al punto de corte entre la recta  $B = \mu_o H$  y el eje vertical donde se representa el campo magnético  $\mathbf{B}$ . En este caso el valor es aproximadamente 1,54 T ( $\text{Wb/m}^2$ ). El flujo correspondiente a la saturación será,

$$\Phi = \pi R^2 B_s = \pi 10^{-4} \times 1,54 \simeq 4,84 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

### PROBLEMA 12.19

El circuito magnético indicado en la figura P12.19 está formado por un anillo toroidal de radio medio  $R = 10 \text{ cm}$ , con una ranura de espesor  $d = 0,1 \text{ cm}$ ; la sección transversal tiene un diámetro  $D = 1 \text{ cm}$ .

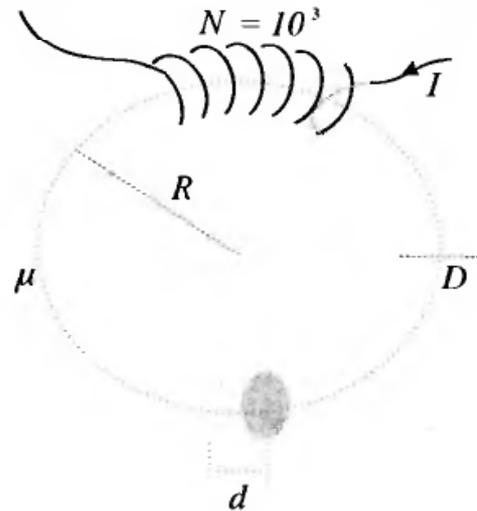
La permeabilidad del material es  $\mu = 1000\mu_o$ . El arrollamiento es de 1000 espiras. Suponemos despreciables los efectos de borde.

Calcular la corriente que debe circular por las espiras para obtener un campo magnético  $B = 0,1 \text{ T}$  en la ranura.

### Solución

Suponemos que no hay fugas de líneas de campo, además de considerar que el campo magnético es uniforme en todo el circuito, de forma análoga al caso tratado para obtener la ecuación (12.44) del circuito magnético con ranura. En este caso nos interesa calcular la corriente necesaria para obtener el flujo que corresponde a  $B = 0,1 \text{ T}$  en la ranura,

$$\Phi = 0,1 \times \pi(5 \times 10^{-3})^2 = 25\pi \times 10^{-7} \text{ Wb}$$



**Figura 12.19**

Como la relación entre flujo y reluctancia es,

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \quad (12.19.1)$$

En este problema las reluctancias son,

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l-d}{\mu S} = \frac{2\pi \times 10^{-1} - 10^{-3}}{\mu_o 10^3 \times \pi \times 25 \times 10^{-6}} \simeq \frac{200}{25\mu_o}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{d}{\mu_o S} = \frac{10^{-3}}{\mu_o \pi \times 25 \times 10^{-6}} = \frac{40}{\pi\mu_o}$$

Despejando  $I$  de la ecuación (12.19.1) y sustituyendo los valores de  $\Phi$ ,  $N$  y  $\mu_o$  obtenemos,

$$I = \frac{1}{N} \Phi (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \simeq 10^{-3} \times 25\pi \times 10^{-7} \left( \frac{200}{25\mu_o} + \frac{40}{\pi\mu_o} \right)$$

$$I = 10^{-3} \times 25\pi \times 10^{-7} \left( \frac{200}{25 \times 4\pi \times 10^{-7}} + \frac{40}{4\pi^2 \times 10^{-7}} \right)$$

$$I \simeq 0,13 \text{ A}$$

### PROBLEMA 12.20

Disponemos de un circuito magnético en forma de T como el indicado en la figura 12.20.1. Cada rama de la T tiene una sección cuadrada de 1 cm de lado y su perímetro exterior es un cuadrado de 4 cm. de lado, siendo el hueco otro cuadrado de 2 cm de lado. El material con que se ha construido la parte clara del circuito tiene una permeabilidad  $\mu = 100\mu_o$ . La zona oscura tiene permeabilidad  $\mu' = 200\mu_o$ .

Sobre la parte central se dispone un arrollamiento con  $N = 1000$  vueltas por el que circula una corriente  $I = 1$  A.

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P indicado en la figura P12.20.1, en la zona más oscura.

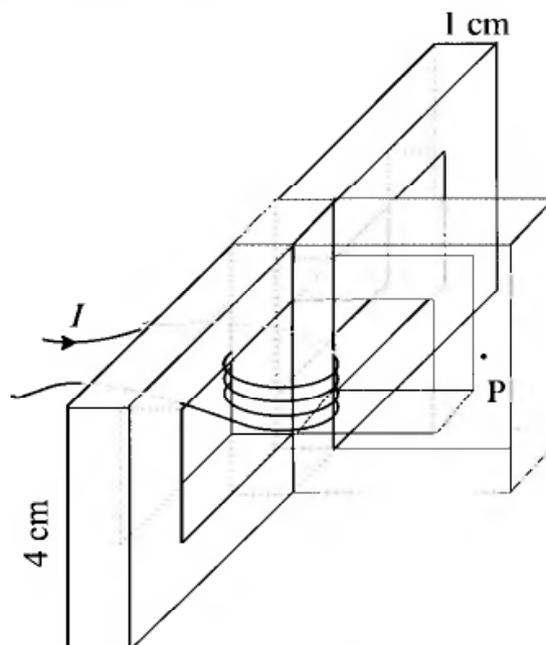


Figura P12.20.1

### Solución

El circuito se compone de un núcleo y tres ramas en paralelo con dicho núcleo. Sobre el núcleo se ha dispuesto el arrollamiento.

Se supone que no hay dispersión de líneas de campo hacia el exterior del circuito.

El sistema se puede considerar como tres ramas en paralelo, cuya reluctancia equivalente se une en serie con la otra rama y el generador de f.m.m. Las figura P12.17.2a y b muestran la forma de las ramas y el circuito eléctrico análogo.

Las reluctancias  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  son iguales, dado que tienen la misma sección  $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ , longitud  $l_1 = l_2 \cong 8 \text{ cm}$ . y permeabilidad  $\mu_r = 100$ .

La reluctancia  $\mathcal{R}_3$  difiere de las dos anteriores únicamente en la permeabilidad, que es  $\mu'_r = 200$ .

La reluctancia  $\mathcal{R}_o$  tiene la misma sección que las anteriores, su permeabilidad es  $\mu_r = 100$  y la longitud es  $l_3 \cong 4 \text{ cm}$ .

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{8 \times 10^{-2}}{100\mu_o \times 10^{-4}} = \frac{8}{\mu_o}$$

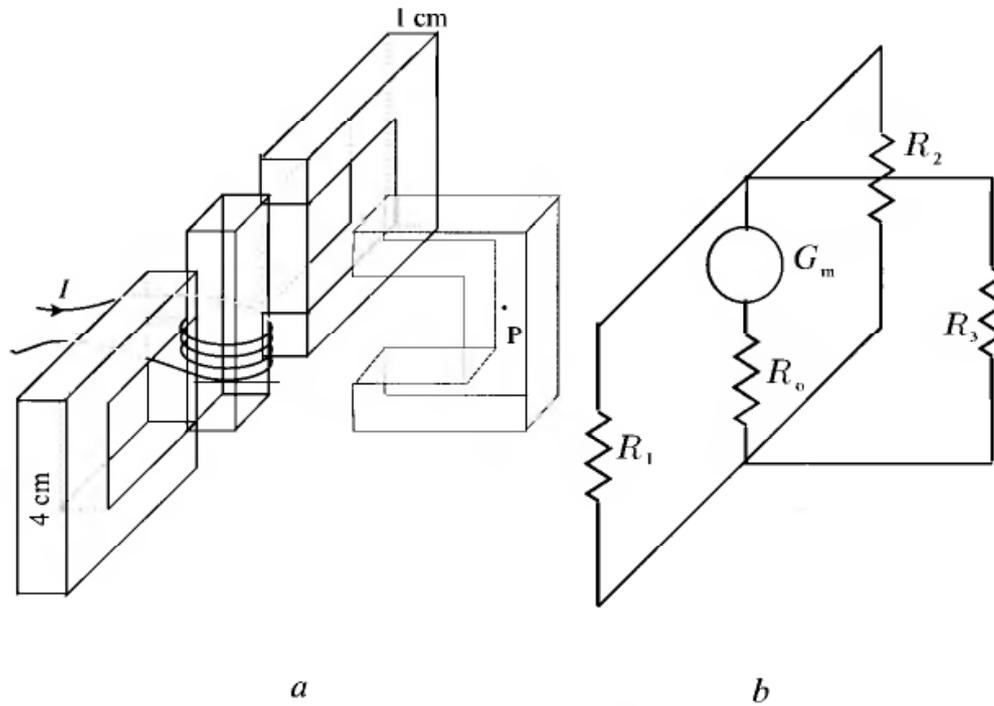


Figura P12.20.2

$$\mathcal{R}_3 = \frac{8 \times 10^{-2}}{200\mu_o \times 10^{-4}} = \frac{4}{\mu_o}; \quad \mathcal{R}_o = \frac{4 \times 10^{-2}}{100\mu_o \times 10^{-4}} = \frac{4}{\mu_o}$$

Las reluctancias en paralelo producen el siguiente resultado,

$$\frac{1}{\mathcal{R}'} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} = \mu_o \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\mu_o}{2}$$

$$\mathcal{R}' = \frac{2}{\mu_o}$$

La reluctancia total,

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_o + \mathcal{R}' = \frac{2}{\mu_o} + \frac{4}{\mu_o} = \frac{6}{\mu_o}$$

La ecuación del circuito magnético será,

$$NI = \Phi_T \mathcal{R}_T$$

El flujo total  $\Phi_T$  se obtiene despejando y sustituyendo en la ecuación anterior los valores de  $\mathcal{R}_t$ ,  $N$  e  $I$ .

$$\Phi_T = \frac{NI}{\mathcal{R}_T} = \mu_o \frac{10^3}{6} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10^3}{6} \simeq 2,094 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

El flujo  $\Phi_T$  se distribuye por las tres ramas proporcionalmente a sus reluctancias respectivas. Es decir, se verificará que,

$$\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Además como a las tres ramas en paralelo se las aplica la misma f.m.m.  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathcal{F} = \Phi_1 \mathcal{R}_1 = \Phi_2 \mathcal{R}_2 = \Phi_3 \mathcal{R}_3$$

de donde,

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{y} \quad \Phi_3 = \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_3} \Phi_1 = 2\Phi_1$$

Llevando las dos últimas ecuaciones a la del flujo total obtendremos los distintos flujos,

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{1}{4} \Phi_T \quad ; \quad \Phi_3 = \frac{1}{2} \Phi_T$$

El problema nos pide el campo magnético en el punto P situado en la rama por donde circula el flujo  $\Phi_3$ , y,

$$B = \frac{\Phi_3}{S} = \frac{\Phi_T}{2S}$$

Sustituyendo los valores de  $\Phi_T$  y  $S$  calculamos  $B$  en el punto P,

$$B \simeq \frac{2,094 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-4}} \simeq 1,047 \quad [\text{T}] \quad [\text{Wb/m}^2]$$

### PROBLEMA 12.21

Disponemos de un toroide con una ranura de espesor  $d = 2$  mm. El radio medio es  $R = 10$  cm y su sección tiene un radio  $a = 1$  cm. Sobre el toroide se arrollan 1000 espiras por las que circula una corriente  $I = 2$  A.

El toroide se ha construido con un material cuya curva de primera imanación se muestra en la figura P12.21. Suponemos que antes de aplicar la corriente el material estaba desimanado. Además se supone que no hay dispersión de líneas de campo y que la sección es la misma para el flujo en material y ranura.

Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en la ranura o entrehierro.

#### Solución

Para encontrar el campo magnético aplicamos el teorema de Ampère y tenemos en cuenta la relación no lineal entre  $B$  y  $H$  dada por la curva de imanación. Además, si suponemos que no hay dispersión de las líneas de campo y que en la ranura el flujo se concentra prácticamente en un sección igual a la del material que forma el toroide, la continuidad de las componentes normales de  $B$  nos lleva a que  $B$  es uniforme en todas las zonas,

$$B = B_g = B_i$$

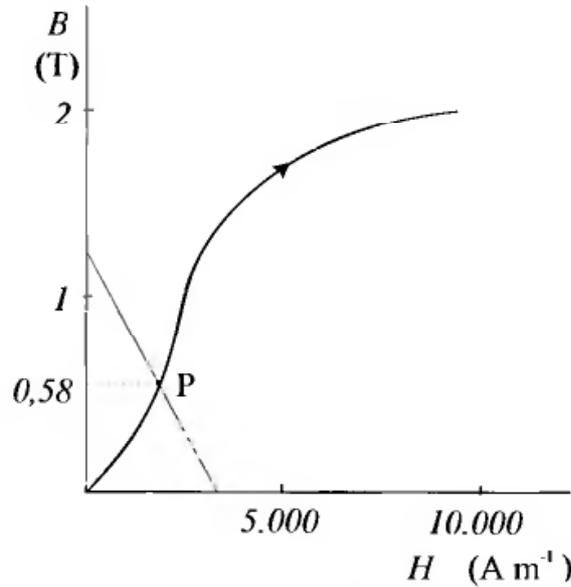


Figura P12.21

La aplicación del teorema de Ampère, considerando que la intensidad de campo  $H$  es distinta en las dos zonas, produce la ecuación siguiente,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_i(l-d) + H_g d = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = NI$$

$$H_i(l-d) + H_g d = NI \quad (12.21.1)$$

En la ranura,

$$B_g = \mu_o H_g = B_i \quad (12.21.2)$$

Despejando  $H_g$  en la ecuación (12.21.2) y llevándolo a la ecuación (12.21.1), obtenemos,

$$H_i(2\pi R - d) = -\frac{d}{\mu_o} B_i + NI$$

Despejando  $B_i$ ,

$$B_i = -\mu_o \frac{2\pi R - d}{d} H_i + \mu_o \frac{NI}{d} \quad (12.21.3)$$

La ecuación (12.21.3) es la recta de corte. Sustituyendo los respectivos valores de  $\mu_o$ ,  $N$ ,  $I$ ,  $d$  y  $R$ , tenemos el siguiente resultado,

$$B_i \simeq -3,93 \times 10^{-4} H_i + 1,25 \quad (12.21.4)$$

Representando la ecuación (12.21.4) en el diagrama de la gráfica, la intersección de la recta (12.21.4) y la curva de imanación nos da el punto

P. El campo magnético correspondiente a ese punto es el valor pedido. En este caso dicho valor es aproximadamente 0,58 T.

El campo magnético en la ranura será,

$$B \simeq 0,58 \text{ [T]}$$

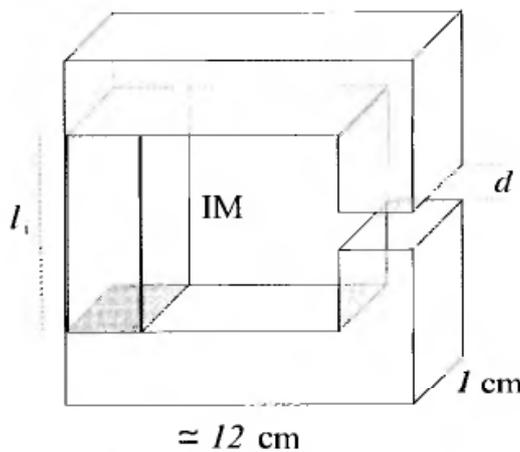
**PROBLEMA 12.22**

En la figura P12.22.1 se muestra un circuito magnético compuesto por un imán permanente IM de longitud  $l_i = 10 \text{ cm}$ , y la sección es un cuadrado de 1 cm. de lado. En serie se montan dos piezas polares de la misma sección que el imán y cuya longitud aproximada es  $l \cong 17 \text{ cm}$ . Entre las piezas polares queda una ranura de espesor  $d = 1 \text{ mm}$ .

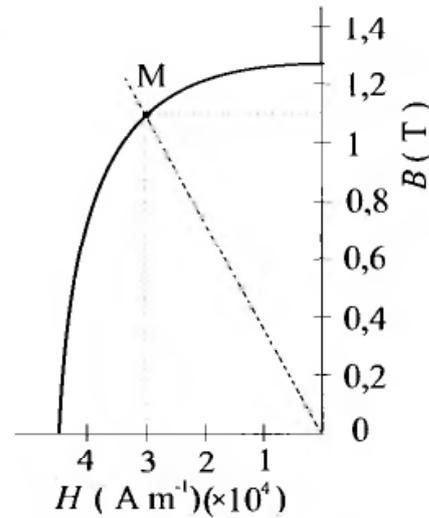
El imán tiene una curva de desimantación como la indicada en la figura P12.22.2, y las piezas polares son de hierro dulce cuya permeabilidad es  $\mu = 140\mu_o$ .

Suponemos que no hay dispersión de líneas de campo y que las secciones para el flujo son las mismas en todas las partes del circuito magnético.

Calcular el flujo magnético en la ranura.



**Figura P12.22.1**



**Figura P12.22.2**

**Solución**

De forma análoga a los casos anteriores, aplicamos el teorema de Ampère y la continuidad de las componentes normales de  $B$ , continuidad que como en casos anteriores nos lleva a que el flujo de  $B$  es el mismo para cualquier sección, es decir,

$$B_i = B_g = B_p \tag{12.22.1}$$

El teorema de Ampère produce la relación siguiente,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \rightarrow - \int_M^N \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l} = -H_i l_i = H_g d + H_p 2l$$

$$-H_i l_i = H_g d + H_p 2l \quad (12.22.2)$$

Considerando que,

$$B_i = B_p = \mu H_p = B_g = \mu_o H_g$$

La ecuación (12.22.2) se transforma en la siguiente,

$$-H_i l_i = B_i \left( \frac{d}{\mu_o} + \frac{2l}{\mu} \right) \quad (12.22.3)$$

$$-H_i = \frac{B_i}{10^{-1} \mu_o} \left( \frac{10^{-3}}{1} + \frac{2 \times 17 \times 10^{-2}}{140} \right)$$

Si las secciones para el flujo de la ranura fueran distintas que las correspondientes a las piezas polares,

$$\Phi = B_p S_p = B_g S_g$$

La ecuación (12.22.3) este caso sería,

$$-H_i l_i = B_i \left( \frac{d}{\mu_o S_g} + \frac{2l}{\mu S_p} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación (12.22.3) los valores de  $l_i$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $\mu$  y  $\mu_o$ , obtendremos la recta de corte,

$$B_i = -\mu_o \frac{175}{6} H_i = -\frac{7\pi}{6} 10^{-5} H_i \simeq -3,665 \times 10^{-5} H_i \quad (12.22.4)$$

La intersección de la recta cuya ecuación es la (12.22.4) con la curva de desimantación dada en la figura 12.22.2 produce la intersección en el punto M. A este punto le corresponde un campo magnético aproximada de 1,1 T.

El flujo en la ranura será por tanto:

$$\Phi = B_g S_g \simeq 1,1 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

### PROBLEMA 12.23

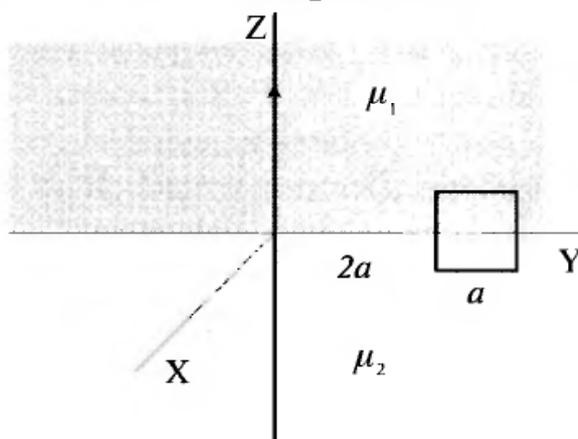
Un conductor filiforme e indefinido en la dirección del eje Z atraviesa dos medios como indica la figura P12.23. Una espira cuadrada de lado  $a$  está situada a una distancia  $2a$  del eje Z. El medio de permeabilidad  $\mu_1$  ocupa el espacio con  $z > 0$ , y el de permeabilidad  $\mu_2$  el espacio  $z < 0$ .

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre conductor y espira cuadrada.

**Solución**

Calculamos el coeficiente de inducción mutua aplicando la ecuación (11.14) que lo define.

Suponemos que por el conductor indefinido circula una corriente  $I_2 = I$ . El flujo a través de la espira se obtiene calculando en primer lugar la componente de la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$  perpendicular al plano de la espira, plano ZY. Para este cálculo aplicamos el teorema de Ampère y la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$ .

**Figura P12.23**

El resultado para  $\mathbf{H}$  es,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

En el plano YZ,

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_x$$

Dada la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  y aplicando en cada medio la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  queda,

Para  $z > 0$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}$$

Para  $z < 0$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}$$

El flujo total que atraviesa la espira debido a la corriente  $I$  en el hilo será,

$$\Phi_{12} = \Phi = \left( \int_{2a}^{3a} \mu_1 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} + \int_{2a}^{3a} \mu_2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \right)$$

$d\mathbf{s} = \mathbf{u}_x(a/2)d\rho$ . Sustituyendo e integrando queda,

$$\Phi_{12} = \Phi = \frac{I}{2\pi} \left( \int_{2a}^{3a} \mu_1 \frac{a \, d\rho}{\rho} + \int_{2a}^{3a} \mu_2 \frac{a \, d\rho}{\rho} \right)$$

$$\Phi = \frac{I a}{4\pi} (\mu_1 + \mu_2) \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

El coeficiente de inducción mutua es,

$$M_{12} = M = \frac{\Phi}{I} = \frac{a}{4\pi} (\mu_1 + \mu_2) \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

### PROBLEMA 12.24

El dispositivo indicado en la figura P12.24 consta de un conductor rectilíneo e indefinido, una espira conductora cuadrada de lado  $D$  y un anillo de material magnético no conductor de permeabilidad  $\mu$ , altura  $D$  y radios  $a$  y  $b$  ( $b = a + D/2$ ).

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre el hilo y la espira.

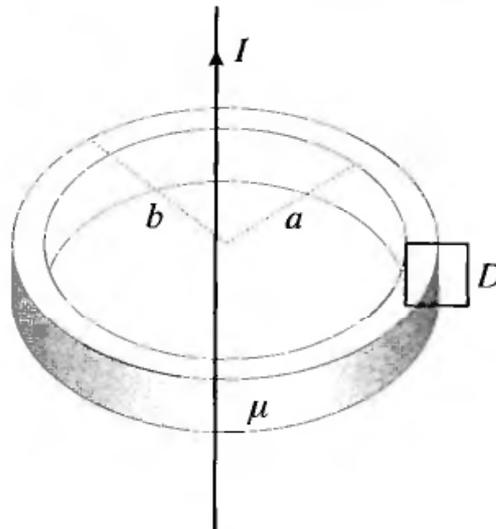


Figura P12.24

### Solución

Procedemos de forma análoga al problema anterior, es decir, calculamos  $M_{12} = M$  mediante la ecuación (11.14), considerando que por el hilo circula una corriente  $I_2 = I$ .

Mediante el teorema de Ampère y la continuidad de las componentes tangenciales del campo  $\mathbf{H}$  obtenemos el valor de  $\mathbf{H}$  en toda la zona donde se sitúa la espira.

De

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_2 = I \rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Dada la continuidad de las componentes tangenciales y aplicando en cada medio la ecuación constitutiva  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  determinamos el campo magnético dentro y fuera del anillo.

Dentro del anillo,

$$\mathbf{B}_1 = \mu \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

Fuera del anillo,

$$\mathbf{B}_2 = \mu_o \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

El flujo que atraviesa la espira debido a la corriente en el hilo, dado que  $d\mathbf{s} = Dd\rho\mathbf{u}_\varphi$ , será,

$$\Phi_{12} = \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^{a+D/2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{a+D/2}^{a+D} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

Sustituyendo los distintos valores e integrando obtenemos,

$$\Phi = \frac{DI}{2\pi} \left( \mu \ln \left( 1 + \frac{D}{2a} \right) + \mu_o \ln \left( \frac{2(a+D)}{2a+D} \right) \right)$$

El coeficiente de inducción mutua es,

$$M_{12} = M = \frac{D}{2\pi} \left( \mu \ln \left( 1 + \frac{D}{2a} \right) + \mu_o \ln \left( \frac{2(a+D)}{2a+D} \right) \right)$$

### PROBLEMA 12.25

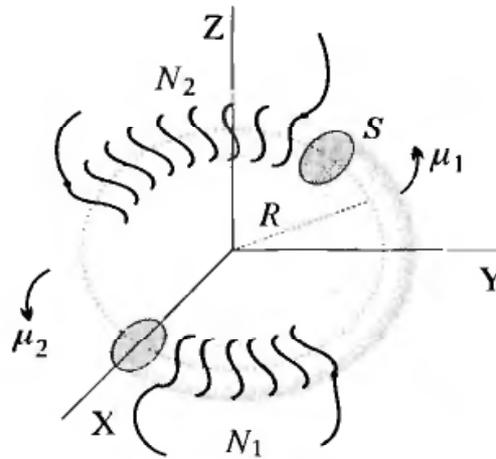
Tenemos un toroide compuesto por dos medios materiales. Uno de ellos ocupa la zona comprendida entre  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi$  y su permeabilidad es  $\mu_1$ ; el otro material ocupa el resto del toroide y su permeabilidad es  $\mu_2$ . Dos bobinas situadas como indica la figura P12.25 tienen respectivamente  $N_1$  y  $N_2$  espiras. El radio medio del toroide es  $R$  y su sección  $S$ .

Suponemos que la sección es de radio muy pequeño comparado con  $R$ , de forma que las bobinas crean campos prácticamente uniformes en el interior del toroide. Además se supone que no hay campo fuera del toroide.

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre las dos bobinas.

#### Solución

El procedimiento a seguir es análogo al utilizado en problemas anteriores. Primero calculamos el campo magnético mediante el teorema de Ampère y aplicamos la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$ . Después obtenemos el flujo a través de la bobina  $N_1$  debido al campo creado por la bobina  $N_2$ . Terminamos calculando  $M_{12}$  mediante la ecuación (11.14).



Fugra P12.25

## 1) Campo magnético

Cálculo del campo  $\mathbf{H}$  debido a una corriente  $I_2$  en la bobina  $N_2$ .

De

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_2 I_2$$

teniendo en cuenta que  $d\mathbf{l} = R d\varphi \mathbf{u}_\varphi$  y que la componente tangencial  $H_\varphi$  es distinta en cada medio, se deduce que,

$$\int_0^\pi H_{\varphi 1} R d\varphi + \int_\pi^{2\pi} H_{\varphi 2} R d\varphi = \pi R (H_{\varphi 1} + H_{\varphi 2})$$

$$\pi R (H_{\varphi 1} + H_{\varphi 2}) = N_2 I_2 \quad (12.25.1)$$

De la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  se obtiene otra relación entre las componentes de  $\mathbf{H}$ .

$$B_{n1} = B_{n2}$$

se deduce,

$$\mu_1 H_{\varphi 1} = \mu_2 H_{\varphi 2} \quad (12.25.2)$$

El sistema de ecuaciones anteriores nos permite calcular el campo en las dos zonas del toroide.

$$H_{\varphi 1} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{N_2 I_2}{\pi R} ; \quad H_{\varphi 2} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{N_2 I_2}{\pi R}$$

El campo magnético  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mu_1 \mathbf{H}_1$  es,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{N_2 I_2}{\pi R} \mathbf{u}_\varphi$$

## 2) Flujo

El flujo a través de las  $N_1$  espiras de la bobina será,

$$\Phi_{12} = BS = S N_1 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{N_2 I_2}{\pi R}$$

3) *Coefficiente de inducción mutua*

El coeficiente de inducción mutua es,

$$M_{12} = M = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = S \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{N_1 N_2}{\pi R}$$

### PROBLEMA 12.26

Dos bobinas, cuyo número de espiras es respectivamente  $N_1$  y  $N_2$ , están arrolladas en dos partes de un núcleo compuesto por dos tipos de material magnético como muestra la figura P12.26. La sección de los dos materiales es la misma y sus longitudes respectivas son:  $L_1$  para el material de permeabilidad  $\mu_1$  y la longitud media  $L_2$  para el de permeabilidad  $\mu_2$ .

Suponemos que no hay fugas de las líneas de campo.

Utilizando las ideas desarrolladas para los circuitos magnéticos calcular el coeficiente de inducción mutua entre las bobinas  $N_1$  y  $N_2$ .

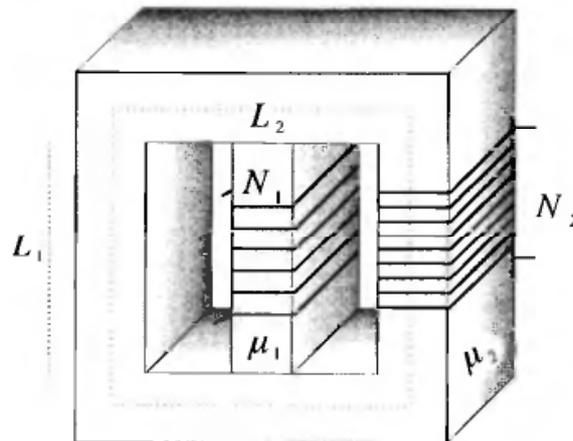


Figura P12.26

### Solución

Lo mismo que en problemas anteriores se trata de calcular el coeficiente de inducción mutua aplicando la ecuación de definición (11.14). En este caso vamos a calcular el flujo mediante las ideas desarrolladas en los circuitos magnéticos.

Como hemos visto en el apartado 11.1.8, la relación fundamental en un circuito magnético es,

$$\Phi = \frac{1}{\mathcal{R}} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (12.26.1)$$

Suponiendo que por el circuito de  $N_1$  espiras pasa una corriente  $I_1 = I$ , la fuerza magnetomotriz (f.m.m)  $\mathcal{F}$  es,

$$\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_1 I_1 = N_1 I$$

El circuito magnético se compone de una reluctancia  $\mathcal{R}_1$  formada por el núcleo central de longitud  $L_1$ , y dos reluctancias  $\mathcal{R}_2$  del mismo valor en paralelo con la anterior, formadas cada una por la mitad del núcleo periférico cuya longitud es  $L_2/2$ .

$$\mathcal{R}_1 = \frac{L_1}{\mu_1 S} \quad ; \quad \mathcal{R}_2 = \frac{L_2}{2\mu_2 S}$$

La suma de las reluctancias en paralelo es,

$$\frac{1}{\mathcal{R}_p} = \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \rightarrow \mathcal{R}_p = \frac{1}{2}\mathcal{R}_2$$

La reluctancia total será,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_p = \frac{L_1}{\mu_1 S} + \frac{L_2}{4\mu_2 S}$$

El flujo que atraviesa el núcleo central, utilizando la ecuación (12.26.1) es,

$$\Phi = N_1 I \left( \frac{L_1}{\mu_1 S} + \frac{L_2}{4\mu_2 S} \right)^{-1}$$

El flujo que atraviesa una espira de la bobina  $N_2$  es la mitad del calculado anteriormente, ya que el flujo  $\Phi$  se divide en dos partes iguales. Por las  $N_2$  espiras atravesará el flujo siguiente,

$$\Phi_{21} = \frac{1}{2} N_2 \Phi = \frac{1}{2} N_2 N_1 I \left( \frac{L_1}{\mu_1 S} + \frac{L_2}{4\mu_2 S} \right)^{-1} = \frac{\mu_1 \mu_2 N_1 N_2 2S}{4L_1 \mu_2 + L_2 \mu_1} I$$

El coeficiente de inducción mutua  $M_{12} = M_{21} = M$  es,

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{\mu_1 \mu_2}{4L_1 \mu_2 + L_2 \mu_1} N_2 N_1 2S$$

### PROBLEMA 12.27

Disponemos un tubo conductor de forma que su eje sea el eje Z. El tubo es de longitud  $L$ , su radio interior es  $a$  y el exterior  $b$ . Dicho tubo está en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = \mathbf{u}_z B_0 \cos \omega t$ . La conductividad del material que compone el tubo es  $\gamma$ . Calcular el valor medio de la potencia disipada en el tubo

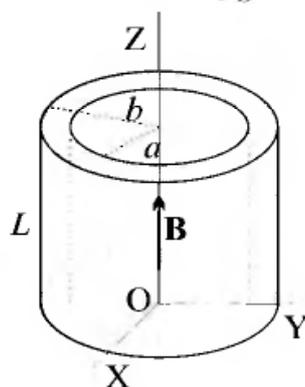
$$\langle P \rangle = (1/T) \int_0^T dt \int_a^b \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad ; \quad T = 2\pi/\omega$$

Suponemos la conductividad  $\gamma$  baja, de manera que el campo creado por las corrientes inducidas es despreciable frente  $\mathbf{B}$ .

**Solución**

Nuestro objetivo es hallar el campo eléctrico variable asociado al campo magnético variable que tenemos. Para ello aplicamos la ley de inducción de Faraday a un circuito circular paralelo al plano XY y centro sobre el eje del cilindro.

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (12.27.1)$$

**Figura P12.27**

donde  $S$  es la superficie limitada por la trayectoria circular  $C$ . Por tanto,  $d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{u}_\varphi$  y  $0 < \varphi < 2\pi$ . Por la simetría del problema deducimos que  $\mathbf{E}$  es paralelo a  $\mathbf{u}_\varphi$  e independiente del ángulo  $\varphi$ , luego,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho E$$

La parte de la derecha de la ecuación (12.27.1) se resuelve muy fácilmente teniendo en cuenta que  $\mathbf{B}$  es un campo homogéneo; es decir, igual en todos los puntos del espacio y por tanto puede salir del integrando, y perpendicular a la superficie, que es el círculo delimitado por  $C$ :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi\rho^2 = \omega\pi\rho^2 B_o \text{sen } \omega t$$

Llevando estos resultados a la ecuación (12.27.1) tenemos,

$$E = \frac{1}{2} B_o \omega \rho \text{sen } \omega t \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{2} B_o \omega \rho \text{sen } \omega t$$

Este campo eléctrico genera en el interior del tubo conductor una corriente cuya expresión viene dada por la ley de Ohm,  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ .

La potencia instantánea será,

$$P_i = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \int_V \gamma E^2 dv = \int_V \left( \frac{1}{4} \gamma B_o^2 \omega^2 \rho^2 \text{sen}^2 \omega t \right) dv$$

El valor medio de  $P_i$  es la potencia disipada en el material que forma el tubo,

$$P = \langle P_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2 \omega t \, dt \int \frac{1}{4} \gamma B_o^2 \omega^2 \rho^2 \, dv$$

La parte temporal es,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2}$$

Para la parte espacial tomamos  $dv = 2\pi\rho L d\rho$ , donde  $\rho$  varía entre  $a$  y  $b$ .

$$\frac{1}{4} \gamma B_o^2 \omega^2 2\pi L \int_a^b \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \gamma B_o^2 \omega^2 L \int_a^b \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{8} \gamma B_o^2 \omega^2 L (b^4 - a^4)$$

Finalmente la potencia media disipada es,

$$P = \frac{\pi}{16} \gamma B_o^2 \omega^2 L (b^4 - a^4)$$

### PROBLEMA 12.28

Sobre un toroide de material ferromagnético y sección cuadrada, arrollamos 1000 espiras. El radio interior es  $R_1 = 0,19$  m. y el exterior  $R_2 = 0,21$  m. Una forma aproximada de la curva de primera imanación se muestra figura P12.28. La corriente final que circula por las espiras es 2 A.

Calcular la energía suministrada para establecer el campo en el toroide.

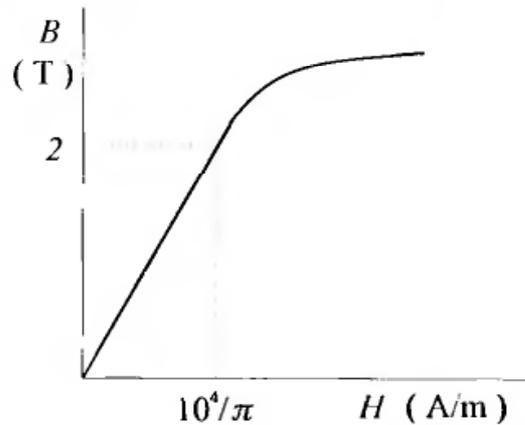


Figura P12.28

### Solución

Calculamos en primer lugar el campo  $\mathbf{H}$  dentro del toroide y comprobamos a que parte de la gráfica corresponde el campo máximo. Después calculamos la energía magnética mediante las ecuaciones (12.62) y (12.60). Para este cálculo suponemos que el campo dentro del toroide es uniforme, dado que el radio medio es mucho mayor que el radio de la sección transversal.

Aplicando el teorema de Ampère a una circunferencia en el interior de solenoide se determina  $H$ .

De

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \rightarrow H_\varphi = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

El valor de  $H$  correspondiente al radio medio del toroide,  $R = 0,2$  m, es,

$$H_{\varphi m} = \frac{2 \times 10^3}{2\pi \cdot 0,2} = \frac{5}{\pi} 10^3$$

El valor medio de  $H$  es menor que  $10^4/\pi$ , por tanto el proceso de creación del campo en el toroide se hace dentro de la zona lineal creciente de la curva de imanación. En este tramo la relación entre  $B$  y  $H$  es la siguiente,

$$B = 2\pi \times 10^{-4} H$$

La densidad de energía se calcula mediante la ecuación (12.62). Los límites de integración son,

$$\text{Para } H = 0 \rightarrow B = 0 ; \text{ Para } H = \frac{5}{\pi} 10^3 \rightarrow B = 1$$

La densidad de energía suministrada para que la corriente pase de 0 a 2 A es,

$$w_m = \int_0^1 H dB = \frac{10^4}{2\pi} \int_0^1 B dB = \frac{10^4}{4\pi}$$

La energía total se calcula integrando con respecto al volumen del toroide. Como hemos supuesto que el campo dentro del toroide es uniforme y su valor es el que corresponde al radio medio, teniendo en cuenta que el volumen del toroide es,

$$V = \frac{\pi^2}{4} (R_2 - R_1)^2 (R_2 + R_1) = \frac{\pi^2}{4} 4 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-1} = 4\pi^2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

La energía total será,

$$W_m = w_m V = \pi \times 10^{-1} \text{ [J]}$$

### PROBLEMA 12.29

Por un conductor cilíndrico flexible e indefinido y de radio  $R$ , circula una corriente  $I$ . Mediante una presión se reduce el radio del cilindro de  $R$  a  $R'$ , manteniéndose constante la corriente  $I$ .

Calcular la variación de energía magnética en el interior de un cilindro coaxial con el anterior, de radio  $R_o = 2R$  y altura  $h$ .

#### Solución

En primer lugar calculamos el campo mediante el teorema de Ampère, tanto en el interior del cilindro que transporta la corriente como en el exterior. Después se calcula la energía magnética antes y después de reducir el radio.

1) *Antes de reducir el radio*

### Campo en el interior

Aplicando el teorema de Ampère,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Como  $\mathbf{J} = I/\pi R^2$  y  $d\mathbf{s} = 2\pi\rho d\rho$ , se deduce,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_\varphi ; \quad \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I}{2\pi R^2} \rho^2$$

por tanto,

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi R^2} \rho \quad \text{para } 0 \leq \rho \leq R$$

### Campo en el exterior

Operando de forma análoga, y teniendo en cuenta que ahora,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad \text{para } \rho > R$$

La energía magnética se calcula mediante la ecuación (12.56). Suponemos que la permeabilidad interior y exterior es  $\mu_o$ , por tanto  $B = \mu_o H$ . En consecuencia la energía será,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu_o H^2 dv$$

Como  $dv = h2\pi\rho d\rho$ , y  $\rho$  varía entre 0 y  $R$  en el interior y de  $R$  a  $2R$  en el exterior,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_0^R \mu_o \left( \frac{I}{2\pi R^2} \rho \right)^2 h2\pi\rho d\rho + \frac{1}{2} \int_R^{2R} \mu_o \left( \frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 h2\pi\rho d\rho$$

$$W_m = \mu_o I^2 \frac{h}{4\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln 2 \right)$$

2) *Cuando se reduce el radio*

El procedimiento es similar al caso anterior; la única variación es que cambian  $R$  por  $R'$ , tanto en el cálculo del campo en el interior como en los límites. El resultado es que la energía ahora es,

$$W'_m = \mu_o I^2 \frac{h}{4\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{2R}{R'} \right) \right)$$

La variación de energía será,

$$\Delta W_m = W'_m - W_m = \mu_o I^2 \frac{h}{4\pi} \ln \left( \frac{R}{R'} \right)$$

**PROBLEMA 12.30**

Un cable coaxial, cuya sección transversal se muestra figura P12.30, está lleno de una material de permeabilidad  $\mu$  y permitividad  $\epsilon_0$ .

Suponemos despreciable el espesor del conductor exterior.

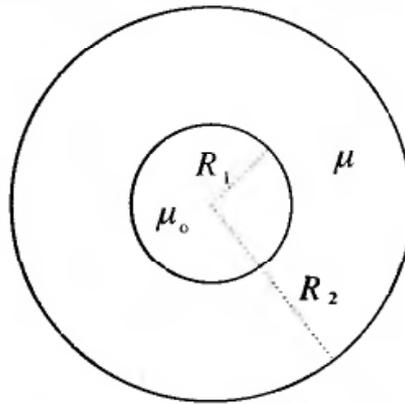
Utilizando la definición de coeficiente de autoinducción en función de la energía, calcular dicho coeficiente por unidad de longitud.

**Solución**

Para resolver este problema utilizamos la relación entre el coeficiente de autoinducción y la energía magnética dados por las ecuaciones (12.68) y (12.69).

En primer lugar calculamos el campo magnético  $\mathbf{H}$  en las dos zonas del sistema con características distintas, que son : 1<sup>o</sup> la zona dentro del cilindro conductor central  $0 \leq \rho \leq R_1$ ; 2<sup>o</sup> la zona de permeabilidad  $\mu$ ,  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ .

Suponemos que por el cilindro conductor central circula una corriente  $I$ . El campo en ambas zonas se obtiene aplicando el teorema de Ampère.

**Figura P12.30**

Para  $\rho \leq R_1$ , dada la simetría cilíndrica del sistema y que  $J = I/\pi R_1^2$ ,

De

$$\oint_C \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Para un círculo de radio  $\rho < R_1$ ,

$$\oint_C \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_\varphi ; \quad \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi \rho^2$$

De donde se deduce,

$$H_{\varphi 1} = \frac{I}{2\pi R_1^2} \rho \rightarrow \mathbf{H}_1 = \frac{I}{2\pi R_1^2} \rho \mathbf{u}_\varphi$$

De forma análoga, para  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ , la aplicación de teorema de Ampère produce,

$$\oint_C \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_{\varphi 2} \ ; \ \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_{\varphi}$$

Mediante las ecuaciones (12.68, 69) se calculan los coeficientes de autoinducción del cilindro central  $L_i$ , así como el correspondiente a la zona entre conductores y permeabilidad  $\mu$ ,  $L_e$ . El volumen elemental es  $dv = l2\pi\rho d\rho$ .

$$L_i = \frac{W_{m1}}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dv = \frac{1}{I^2} \int_V \mu_o H_1^2 dv$$

$$L_i = \frac{1}{I^2} \int_0^{R_1} \mu_o \left( \frac{I}{2\pi R_1^2 \rho} \right)^2 l2\pi\rho d\rho = \frac{\mu_o}{2\pi R_1^4} l \frac{R_1^4}{4}$$

$$L_i = \frac{\mu_o l}{8\pi}$$

El coeficiente de autoinducción  $L_i$  por unidad de longitud será,

$$\frac{L_i}{l} = \frac{\mu_o}{8\pi}$$

El coeficiente  $L_e$  es,

$$L_e = \frac{W_{m2}}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_2 dv = \frac{1}{I^2} \int_{R_1}^{R_2} \mu_o \left( \frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 l2\pi\rho d\rho$$

$$L_e = \frac{\mu_o l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Dividiendo por  $l$  obtenemos,

$$\frac{L_e}{l} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

El coeficiente total por unidad de longitud se obtiene sumando los dos anteriores, en consecuencia,

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_o}{8\pi} + \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

### PROBLEMA 12.31

La piezas polares de un electroimán están diseñadas de manera que la intensidad de campo  $\mathbf{H}$  en la zona de trabajo es de la forma:

$$\mathbf{H} = H_o \left( \frac{z_o - z}{d} \right)^{1/2} \mathbf{u}_y$$

Una muestra de permeabilidad  $\mu$  y volumen  $V$  tan pequeño que suponemos el campo uniforme en dicho volumen, está situada como indica la figura P12.31.

Calcular la fuerza sobre la muestra.

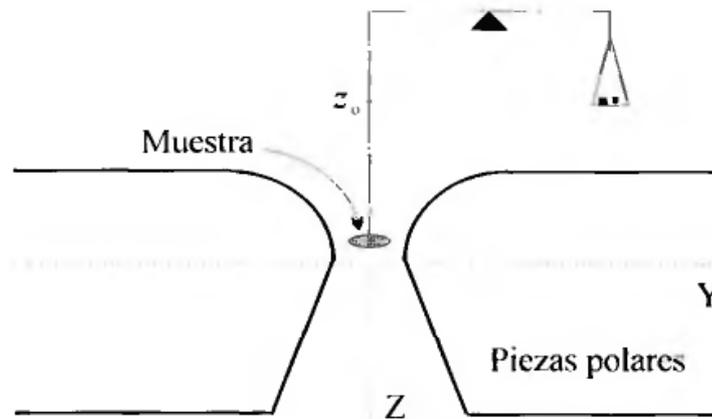


Figura P12.31

**Solución**

Calculamos la fuerza sobre la muestra mediante la ecuación (12.75).

Este procedimiento fue diseñado por P. Curie para medir susceptibilidades magnéticas de sustancias cuyas dimensiones son muy pequeñas.

Calculamos la energía en el volumen ocupado por la muestra, y dadas su forma y pequeñas dimensiones se supone el campo  $H$  uniforme dentro de ella. La variación de energía magnética con la posición es la fuerza magnética que mide la balanza.

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 V = \frac{1}{2} \mu H_o^2 \left( \frac{z_o - z}{d} \right) V$$

La fuerza es igual a la variación de la energía con la posición,

$$F_z = \frac{dW_m}{dz} = -\frac{1}{2} \mu H_o^2 \frac{V}{d}$$

Vemos que la fuerza es proporcional a la permeabilidad  $\mu$ , por tanto el sistema permite medir la permeabilidad en una muestra pequeña determinando la fuerza sobre ella con una balanza. Como  $\mu = (1 + \chi_m) \mu_o$  el método sirve para medir susceptibilidades magnéticas.

**PROBLEMA 12.32**

En un material magnético no lineal la relación entre imanación  $M$  e intensidad de campo magnético  $H$  viene dada por la curva que muestra la figura P12.32.1.

Calcular la energía por unidad de volumen suministrada al material cuando  $H$  varía entre 0 y 3 A/m.

**Nota:** La curva de la figura, en el intervalo (0, 3), se puede expresar, de forma aproximada, mediante la ecuación  $M = \frac{1}{3}H - \frac{1}{45}H^3$ .

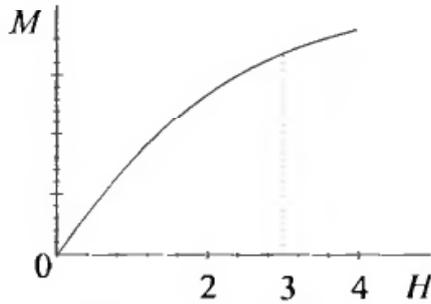


Figura P12.32.1

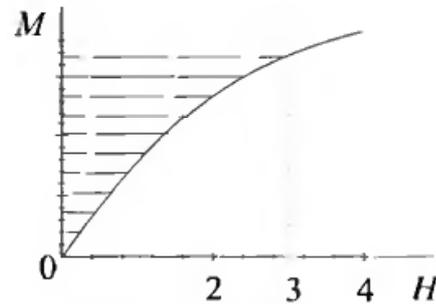


Figura P12.32.2

**Solución**

La energía magnética por unidad de volumen viene dada por la expresión (12.64),

$$w_m = \mu_o \int_a^b H dM$$

La integral representa el área limitada por la curva de imanación, la recta  $H = 0$  y la recta  $M = 3$ . En la figura P12.32.2 se muestra la zona rayada que corresponde a dicho área.

Para calcular la densidad de energía utilizamos la expresión matemática que representa la curva de forma aproximada.

$$M = \frac{1}{3}H - \frac{1}{45}H^3$$

Diferenciando la ecuación anterior tendremos,

$$dM = \frac{1}{3}dH - \frac{1}{15}H^2 dH = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{15}H^2 \right) dH$$

Sustituyendo  $dM$  en la integral, y teniendo en cuenta que los límites de integración son en este caso 0 y 3, queda,

$$w_m = \mu_o \int_0^3 H \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{15}H^2 \right) dH = \mu_o \int_0^3 \left( \frac{1}{3}H - \frac{1}{15}H^3 \right) dH$$

$$w_m = \mu_o \left[ \frac{1}{6}H^2 - \frac{1}{60}H^4 \right]_0^3 = \mu_o \left( \frac{9}{6} - \frac{81}{60} \right)$$

$$w_m = \mu_o \frac{3}{20} \quad [\text{J/m}^3]$$

**PROBLEMA 12.33**

En un cable coaxial en forma de U, con las partes rectas muy largas, se introduce mercurio como indica la figura P12.33. Se conectan los dos conductores del cable coaxial a una batería de forma que circule por ellos una corriente constante  $I$ .

Suponemos que la conductividad de los conductores que forman el cable coaxial es mucho menor que la del mercurio.

Calcular la diferencia de alturas entre las dos ramas de la U cuando pasa la corriente  $I$  por el cable coaxial.

### Solución

El peso de la columna de mercurio cuya altura  $h$  es igual a la diferencia entre las alturas que alcanzan las dos ramas; en el equilibrio es igual a la fuerza magnética sobre el mercurio. Como la corriente permanece constante, la fuerza se calcula mediante la ecuación (12.75).

Cuando suponemos la conductividad del mercurio mucho mayor que la del conductor coaxial estamos simplificando el problema, dado que en estas condiciones se puede hacer la hipótesis de que toda la corriente entre los dos conductores se cierra a través de una capa muy fina de mercurio al borde entre mercurio y vacío; de no ser así deberíamos conocer la forma de la distribución de la corriente en el mercurio entre los dos conductores.

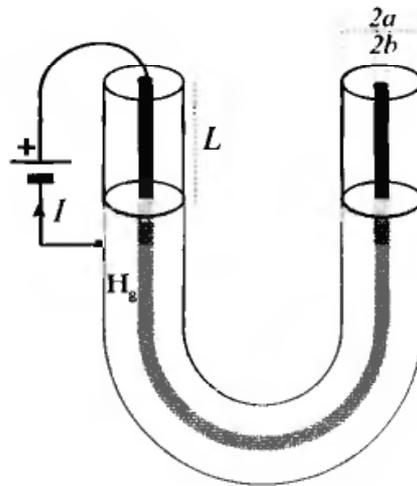


Figura P12.33

También suponemos que la permeabilidad del mercurio es prácticamente igual a  $\mu_0$ .

La aplicación del teorema de Ampère nos permite calcular el campo magnético entre los dos conductores, dicho campo es,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

La variación de energía magnética debida a un desplazamiento  $dz$  de la columna de mercurio en el brazo izquierdo es,

$$dW_m = \frac{1}{2} \int_a^b \mu_0 \left( \frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 (L + dz) 2\pi\rho d\rho - \frac{1}{2} \int_a^b \mu_0 \left( \frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 L 2\pi\rho d\rho$$

$$dW_m = \mu_o \frac{I^2}{4\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right) dz$$

La fuerza magnética será:

$$F = \frac{dW_m}{dz} = \mu_o \frac{I^2}{4\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Igualando esta fuerza con el peso de la columna de mercurio obtenemos  $h$ , que es la diferencia entre la altura de las dos columnas. Si la densidad del mercurio es  $\rho_{Hg}$  y la aceleración de la gravedad  $g$ , tenemos,

$$\rho_{Hg} g h \pi (b^2 - a^2) = \mu_o \frac{I^2}{4\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

De donde la altura  $h$  será:

$$h = \frac{\mu_o I^2}{4\pi^2 \rho_{Hg} g (b^2 - a^2)} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

### PROBLEMA 12.34

En el espacio entre dos cilindros conductores coaxiales se introduce un tubo de material cuya permeabilidad es  $\mu$  y su conductividad  $\gamma$ . La disposición de los componentes y sus dimensiones se muestran en la figura P12.34. A los conductores coaxiales se aplica un generador que mantiene la corriente constante e igual  $I$ .

Suponemos que la conductividad del tubo es mucho menor que la de los conductores coaxiales. También consideramos que el tubo se mantiene en contacto con los conductores en sus desplazamientos.

Calcular la fuerza que se ejerce sobre el tubo.

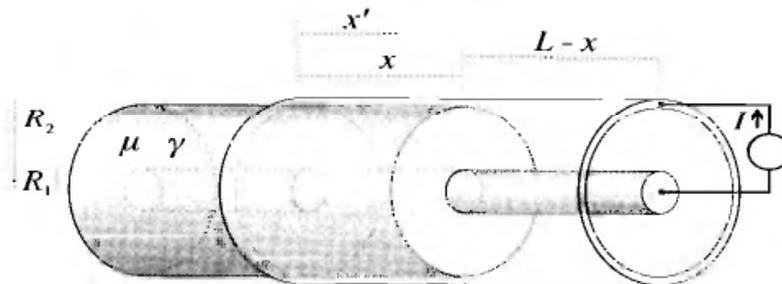


Figura P12.34

### Solución

La fuerza, dado que se mantiene la corriente constante, se calcula mediante la ecuación (12.75).

Como hemos supuesto que la conductividad del tubo es mucho menor que la de los conductores coaxiales, esto permite establecer la hipótesis de

que la corriente se cierra a través de toda la parte del tubo que está entre los conductores.

El campo magnético entre los conductores coaxiales, como hemos visto en el problema anterior es:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

En la zona donde no hay tubo el campo es,

$$\mathbf{H}_v = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

En la zona donde se cierra la corriente a través del tubo, dicha corriente va disminuyendo desde el borde hasta el final de los conductores coaxiales, de manera que la corriente que produce el campo en el tubo es,

$$I' = \frac{x'}{x} I$$

El campo magnético en el tubo será,

$$\mathbf{H}_m = \frac{I'}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi = \frac{x'}{x} \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

La energía magnética, calculada mediante la ecuación (12.56), es:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \int_x^L \mu_o H_v^2 2\pi\rho d\rho dx + \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^x \mu H_m^2 2\pi\rho d\rho dx'$$

Sustituyendo los valores de los campos respectivos e integrando queda,

$$W_m = \frac{I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_x^L \mu_o \frac{1}{\rho} d\rho dx + \frac{I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^x \mu \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \frac{1}{\rho} d\rho dx'$$

$$W_m = \frac{I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(\mu_o(L-x) + \mu \frac{x}{3}\right)$$

La fuerza magnética sobre el tubo es:

$$\mathbf{F} = \frac{dW_m}{dx} \mathbf{u}_x = \frac{I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(\frac{1}{3}\mu - \mu_o\right) \mathbf{u}_x$$

### PROBLEMA 12.35

Disponemos de un cable coaxial como indica la figura P12.35. El conductor interior es rígido y de radio  $a$ , el exterior flexible y de radio  $b$ . Mediante una batería se mantiene constante la corriente que circula por ambos conductores.

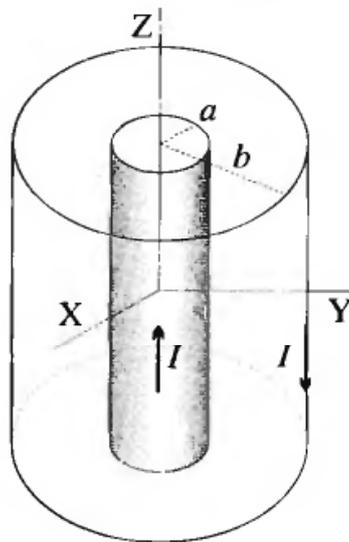
Calcular la diferencia de presión que debe existir entre la parte exterior del cable coaxial y la zona comprendida entre los conductores de radios  $a$  y  $b$ , para que no se deforme el conductor flexible.

**Solución**

La diferencia de presiones para que no se deforme el conductor debe ser igual a la presión magnética sobre dicho conductor.

La presión magnética se calcula mediante la energía magnética entre conductores y la derivada de dicha energía con respecto al radio. Dicha energía se calcula a partir del campo entre conductores, que como hemos visto en el problema anterior es,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$

**Figura P12.35**

La energía magnética será:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_a^\rho \mu_o \left( \frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 L 2\pi\rho d\rho = \mu_o \frac{I^2}{4\pi} L \ln \frac{\rho}{a}$$

La fuerza es:

$$F = \frac{dW_m}{d\rho} = \mu_o \frac{I^2}{4\pi} L \frac{1}{\rho}$$

Calculamos la diferencia de presión en  $\rho = b$  de la forma siguiente:

$$p(b) = \frac{F(b)}{S} = \frac{F(b)}{2\pi b L} = \mu_o \frac{I^2}{8\pi^2} \frac{1}{b^2}$$

Como el campo magnético en  $\rho = b$  es:

$$B = \mu_o \frac{I}{2\pi b}$$

la diferencia de presión en función del campo magnético será:

$$p = \frac{1}{2\mu_o} B^2$$

## PROBLEMA 12.36

Calcular la presión magnética sobre las placas paralelas e indefinidas, dispuestas como indica la figura 12.36, y por las que circulan corrientes cuyas densidades superficiales se indican.

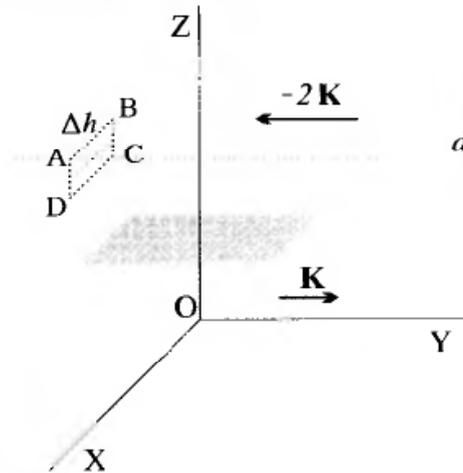


Figura P12.36

## Solución

La presión sobre una superficie  $ds = dx dy$  se calcula a partir de la variación de energía que se origina en un desplazamiento virtual  $dz$  de la placa correspondiente.

El campo magnético debido a la distribución de corriente superficial sobre la placa superior se obtiene aplicando el teorema de Ampère a un contorno ABCD perpendicular a la dirección de la corriente. Dicho campo para la placa superior es:

$$H_1 2\Delta h = 2K\Delta h$$

$$\mathbf{H}_1 = K \mathbf{u}_x \text{ para } z < d ; \quad \mathbf{H}'_1 = -K \mathbf{u}_x \text{ para } z \geq d$$

El correspondiente a la placa inferior es:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{2}K \mathbf{u}_x \text{ para } z > 0 ; \quad \mathbf{H}'_2 = -\frac{1}{2}K \mathbf{u}_x \text{ para } z < 0$$

Los valores del campo magnético en las tres zonas son los siguientes:

Zona por encima de los dos planos,  $z > d$ ,

$$\mathbf{H}_a = \mathbf{H}'_1 + \mathbf{H}_2 = -\frac{1}{2}K \mathbf{u}_x$$

Zona comprendida entre los planos,  $0 \leq z \leq d$ :

$$\mathbf{H}_b = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \frac{3}{2}K \mathbf{u}_x$$

Zona por debajo de los dos planos,  $z < 0$ ,

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}'_2 = \frac{1}{2}K \mathbf{u}_x$$

La densidad de energía magnética en las zonas por encima y debajo de los dos planos es la misma e igual a,

$$w'_m = \frac{1}{2}\mu_o H_a^2 = \frac{1}{2}\mu_o H_c^2 = \frac{1}{8}\mu_o K^2$$

La densidad de energía en la zona entre placas es,

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_o H_b^2 = \frac{9}{8}\mu_o K^2$$

En el desplazamiento  $dz$  de una superficie elemental  $ds = dx dy$  de la placa superior se produce la siguiente variación de la energía magnética:

$$dW_m = \left( \frac{9}{8}\mu_o K^2 - \frac{1}{8}\mu_o K^2 \right) dx dy dz$$

La fuerza sobre la citada superficie elemental será:

$$F = \frac{dW_m}{dz} = \mu_o K^2 dx dy$$

La presión es por tanto,

$$p = \frac{F}{dx dy} = \mu_o K^2 = \frac{1}{2\mu_o} (B_b^2 - B_a^2)$$

### PROBLEMA 12.37

Tenemos un sistema formado por un imán permanente entre cuya piezas polares se mueve una espira rectangular. Los lados de la espira son  $h$  y  $l$  ( $l \gg h$ ). La espira está formada por unos conductores cuya resistencia es  $R$  y una pila de f.e.m.  $V$ . La espira se puede mover en el plano XY y en la dirección del eje Y.

Como consecuencia de la fuerza magnética la espira se mueve con una parte dentro de las piezas polares como muestra la figura P12.37.

1) Mediante la segunda ley de Kirchoff establecer la relación entre tensiones y corrientes y calcular la energía que suministra la pila en un intervalo de tiempo  $dt$ .

2) Calcular la fuerza magnética sobre el lado  $h$  de la espira y el trabajo realizado para desplazarla una distancia  $dy$ . Comparar este resultado con la energía obtenida en el apartado anterior.

### Solución

1) *Energía que suministra la pila*

La 2ª Ley de Kirchoff se aplica a un circuito cerrado por el que circula una cierta corriente  $I$  y donde tenemos varias fuentes de f.e.m. y varias resistencias; se puede expresar como,

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum I R_i$$

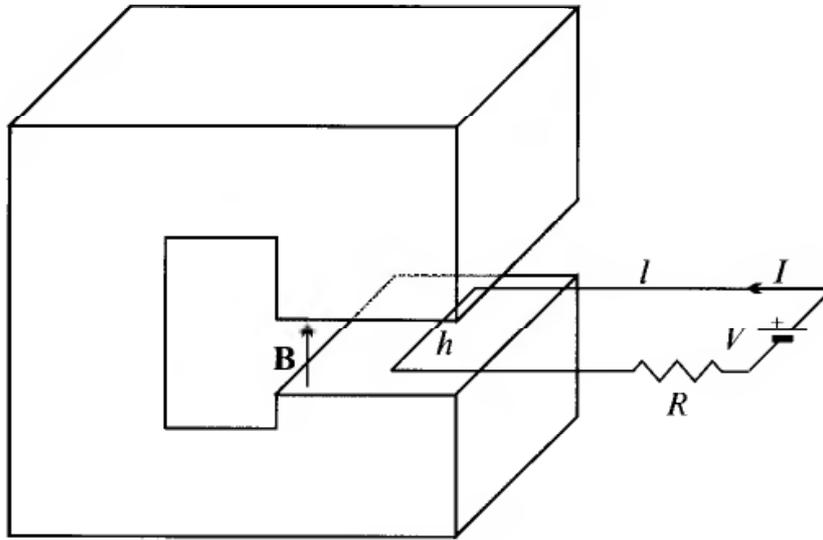


Figura P12.37

En nuestro caso hay dos fuentes de f.c.m.: la de la pila,  $V$ , y la inducida según la Ley de Faraday,  $\mathcal{E}$ , puesto que el flujo magnético que atraviesa el circuito varía al tener éste movimiento en la dirección del eje  $Y$ . Sólo hay una resistencia,  $R$ . Entonces la 2ª Ley de Kirchoff queda,

$$V + \mathcal{E} = IR$$

Calculamos  $\mathcal{E}$  a partir de la mencionada Ley de Faraday.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Despejando  $V$  de la primera ecuación y sustituyendo,

$$V = IR + \frac{d\Phi}{dt}$$

La potencia que suministra la pila es  $VI$ , y el trabajo que realiza en el intervalo de tiempo  $dt$  es, por tanto,

$$dW_{em} = VI dt$$

Sustituyendo  $V$  de la expresión anterior,

$$dW_{em} = I^2 R dt + I d\Phi$$

*Variación del flujo en un desplazamiento  $dy$  hacia la derecha.*

Si consideramos  $y$  la distancia del lado izquierdo al borde del imán, la variación de superficie será,

$$(h(y - dy) - h y) = -h dy$$

y tiene orientación  $\mathbf{u}_z$  si recorremos el contorno de la superficie en el sentido de la corriente  $I$ ; por tanto  $ds = -h dy \mathbf{u}_z$ . Como  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$ ,

$$d\Phi = -B h dy$$

en consecuencia,

$$dW_{em} + I B h dy = I^2 R dt \quad (12.37.1)$$

En un desplazamiento hacia la derecha, la energía suministrada por la pila más la debida a la f.e.m. inducida se disipa en la resistencia.

### 2) Fuerza magnética

La fuerza que actúa sobre un conductor que transporta corriente en un campo magnético es

$$d\mathbf{F}_m = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Si la aplicamos a los dos conductores paralelos que se introducen parcialmente bajo la piza polar, observamos que  $d\mathbf{l}$  tiene distinto signo en ambos, siendo todo lo demás igual. Deducimos por tanto que sólo el tramo perpendicular de longitud  $h$  contribuye a la fuerza total. En este caso,  $d\mathbf{l} = \mathbf{u}_x dx$ ,

$$d\mathbf{F}_m = I B (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z) dx$$

$$\mathbf{F}_m = I B (-\mathbf{u}_y) \int_0^h dx = -I B h \mathbf{u}_y$$

Para que se desplace la espira una distancia  $dy$  hacia la derecha tenemos que aplicar una fuerza mecánica  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m$ . El trabajo mecánico para desplazar la espira será,

$$dW = -\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u}_y dy = I B h \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y dy = I B h dy \quad (12.37.2)$$

Vemos entonces que el trabajo mecánico que debemos realizar para desplazar la espira hacia la derecha,  $I B h dy$ , es igual a la energía aportada por el término inductivo indicado en el primer miembro de la ecuación (12.37.1). Esta energía es de signo opuesto al producto escalar de la fuerza magnética por el desplazamiento.

El análisis de ese resultado nos lleva a lo siguiente: el trabajo mecánico necesario para desplazar la espira contra la fuerza magnética provoca un cambio en el flujo que da lugar a una f.e.m. inducida. Dicha f.e.m. modifica la corriente que circula por el circuito, de manera que la energía disipada en la resistencia se debe tanto a la suministrada por la pila como a la f.e.m. inducida en el movimiento de la espira dentro del campo magnético. Y la energía debida a la inducción electromagnética es igual al trabajo mecánico. También podemos observar que el trabajo debido a la fuerza de Lorentz es del mismo módulo pero de signo opuesto a la energía debida a la f.e.m. inducida.

Si el movimiento de la espira se hace en el sentido de la fuerza magnética, es decir, hacia la izquierda, cambia el sentido de la f.e.m. inducida, es decir, ahora,

$$d\Phi = Bhdy$$

y

$$dW_{em} - IBhdy = RI^2 dt$$

La fuerza magnética provoca un movimiento de la espira que tiene como consecuencia un campo eléctrico inducido, y este campo modifica la corriente que circula por la espira y por tanto la energía disipada en la resistencia. Es decir, el trabajo de la fuerza Lorentz se hace a través del cambio de flujo que genera un campo eléctrico inducido; dicho campo realiza trabajo sobre las cargas en el hilo aumentando o disminuyendo la corriente y por tanto la energía disipada en la resistencia. Esto pone de manifiesto que en el caso de campos variables hay que analizar los efectos de la fuerza magnética a través de los campos inducidos.

## Capítulo 13

# CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

### 13.1 INTRODUCCIÓN

En capítulos anteriores hemos estudiado los campos debidos a cargas estáticas y corrientes constantes así como la ley de inducción electromagnética que pone de manifiesto la dependencia entre un campo eléctrico y otro magnético variable con el tiempo.

En éste capítulo se completa el estudio de las relaciones entre los campos eléctrico y magnético con la aportación de Maxwell que muestra como las fuentes de un campo magnético variable no sólo son las corrientes de conducción sino que pueden ser producidos por campos eléctricos variables a través de un término denominado corriente de desplazamiento. De esta manera se muestra la interdependencia entre los campos eléctrico y magnético y podemos hablar del campo electromagnético. La consecuencia de esta interdependencia son las ondas electromagnéticas cuyas ecuaciones y forma de propagación también se estudian en este capítulo.

#### 13.1.1 ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones del campo eléctrico y magnético estudiadas hasta ahora y la ecuación de continuidad derivada del principio de conservación de la carga son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (13.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (13.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (13.5)$$

A estas debemos añadir las ecuaciones constitutivas que relacionan los distintos vectores a través de parámetros que caracterizan los medios desde un punto de vista macroscópico:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (13.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (13.7)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (13.8)$$

En las ecuaciones (13.1) a (13.5) podemos observar lo siguiente:

1) Que un campo eléctrico se puede generar por un campo magnético variable ecuación (13.2), pero no ocurre lo mismo con  $\mathbf{H}$ , puesto que el campo magnético lo origina la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , ecuación (13.4).

2) Que las ecuaciones (13.4) y (13.5) son contradictorias, inconsistentes, dado que si aplicamos la divergencia a la ecuación (13.4),

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Sin embargo la ecuación (13.5) muestra que  $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$ .

Esta inconsistencia fue resuelta por Maxwell modificando la ecuación (13.4). Para ello Maxwell demostró que si en la ecuación (13.5) se sustituye la densidad de carga  $\rho$  por  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ , el resultado es,

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Es decir, si consideramos la corriente total  $\mathbf{J}_t$ ,

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (13.9)$$

La divergencia de  $\mathbf{J}_t$  es nula. Sustituyendo  $\mathbf{J}_t$  en la ecuación (13.4) obtenemos,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (13.10)$$

Esta ecuación resuelve la contradicción entre la ecuación (13.4), teorema de Ampère, y la ecuación de continuidad. El término

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

fue denominado por Maxwell **corriente de desplazamiento**. La nueva ecuación obtenida por Maxwell, no sólo elimina la contradicción indicada, sino que además amplía el teorema de Ampère a corrientes variables y muestra que un campo magnético variable puede ser generado por un campo eléctrico variable; es decir, por un conjunto de cargas cuya densidad o posición varían con el tiempo. En definitiva la ecuación (13.10) completa el conjunto de ecuaciones que expresan la interdependencia entre los campos eléctrico y magnético; lo que nos permite introducir el campo electromagnético como una entidad que engloba los fenómenos eléctricos y magnéticos tanto con cargas y corrientes estacionarias como variables lenta o rápidamente.

La interdependencia entre los campos eléctrico y magnético es la base de los fenómenos de radiación (generación de ondas electromagnéticas) como predijo Maxwell y posteriormente descubrió Hertz. Además Maxwell dedujo de su teoría que la luz es una onda electromagnética que se propaga en el vacío.

#### 13.1.1.1 Ecuaciones de Maxwell Lorentz

Interesa resumir el conjunto de ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos desde un punto de vista clásico. El primer grupo de ecuaciones son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (13.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (13.10)$$

Las ecuaciones constitutivas forman el segundo grupo y son:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (13.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (13.7)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (13.8)$$

El sistema formado por las ecuaciones (13.2), (13.10) y las tres ecuaciones constitutivas consta de quince incógnitas, las componentes de los cinco vectores, y quince ecuaciones que permiten calcular las componentes de los vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{J}$ .

En el primer grupo de ecuaciones está implícita la ecuación de continuidad, lo que se puede demostrar calculando la divergencia de los dos miembros de la ecuación (13.10) y aplicando la ecuación (13.1).

El conjunto anterior se complementa con la fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13.11)$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (13.12)$$

Las ecuaciones enumeradas en este apartado nos permiten estudiar desde el punto de vista clásico los problemas de dinámica de partículas cargadas y su interacción con el campo electromagnético.

### 13.1.1.2 Forma integral de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones en forma diferencial nos dan las relaciones entre vectores en cada punto del espacio. En los problemas se trata de aplicar las ecuaciones a objetos de formas determinadas, por lo que es necesario utilizar la forma integral de las citadas ecuaciones. Dicha forma integral es la siguiente:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho dv \quad (13.13)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (13.14)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (13.15)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (13.16)$$

La ecuación (13.13) es la forma integral del teorema de Gauss, que se deriva de la ley de Coulomb. La ecuación (13.14) es la ley de inducción electromagnética, ley de Faraday. La ecuación (13.15) es el teorema de

la divergencia derivado de la ley de Biot y Savart. La ecuación (13.16) es la forma integral de la ecuación descubierta por Maxwell, que amplía el teorema de Ampère a corrientes no estacionarias y completa la relación entre los campos eléctrico y magnético.

### 13.1.2 CONDICIONES EN LOS LÍMITES

Cuando existe más de un tipo de material en el espacio donde calculamos los vectores de campo, debemos obtener la solución en cada zona y después relacionar las soluciones mediante las condiciones en la frontera para dichos vectores. Suponemos que los medios son lineales, homogéneos e isótropos.

#### 13.1.2.1 Condiciones en los límites entre medios lineales

De forma análoga a como procedimos en electrostática y magnetostática, se aplican las ecuaciones de Maxwell, en forma integral, en la frontera. Consideramos una caja cilíndrica como la indicada en la figura 13.1a para componentes normales y un camino MNPQ como el indicado en la figura 13.2b para las tangenciales.

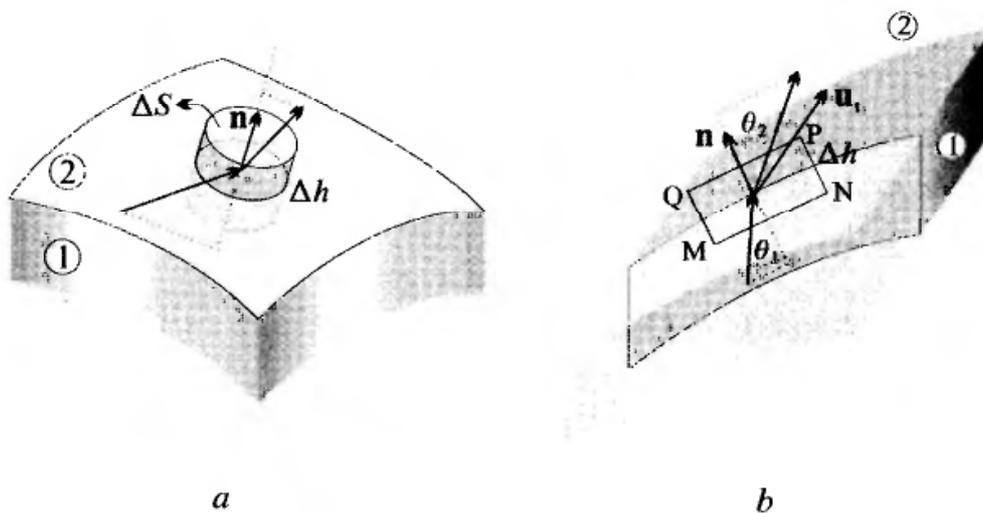


Figura 13.1

#### Componentes normales

De la ecuación (13.13) se deduce que:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma = \rho_s \quad (13.17)$$

$\sigma = \rho_s$  es la densidad superficial de carga en la frontera.

Aplicando la ecuación constitutiva  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ , las componentes normales de  $\mathbf{E}$  cumplen la siguiente relación,

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = \sigma \quad (13.18)$$

De la ecuación (13.15) se deduce en forma análoga que,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (13.19)$$

La ecuación  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  nos lleva a la siguiente relación,

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0 \quad (13.20)$$

De  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$  en forma integral se deduce que,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} \quad (13.21)$$

La ecuación constitutiva  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  nos lleva a la relación,

$$\mathbf{n} \cdot (\gamma_2 \mathbf{E}_2 - \gamma_1 \mathbf{E}_1) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} \quad (13.22)$$

#### *Componentes tangenciales*

Las componentes tangenciales se obtienen aplicando las ecuaciones (13.14) y (13.16) para la circulación de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  al camino MNPQ entre los dos medios cuando  $h \rightarrow 0$ .

De la ecuación (13.14), y siempre que la derivada del segundo miembro esté acotada en la frontera, se deduce que:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (13.23)$$

Considerando que  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$ ,

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{1}{\varepsilon_2} \mathbf{D}_2 - \frac{1}{\varepsilon_1} \mathbf{D}_1 \right) = 0 \quad (13.24)$$

A partir de la ecuación (13.16), considerando que  $\partial\mathbf{D}/\partial t$  esté acotada en la frontera, se deduce que:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (13.25)$$

$\mathbf{K}$  es la densidad de corriente superficial en la superficie de separación entre los medios.

Utilizando la ecuación  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2 - \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1 \right) = \mathbf{K} \quad (13.26)$$

*Dependencia entre las condiciones en los límites*

Se puede demostrar fácilmente que la ecuación (13.1) se obtiene aplicando la divergencia a la ecuación (13.10) y sustituyendo  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  mediante la ecuación de continuidad (13.5). De forma análoga se puede obtener la ecuación (13.3) aplicando la divergencia a la ecuación (13.2) que produce la relación  $\partial/\partial t(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$ , y si en un instante  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  lo será siempre. En consecuencia, las citadas ecuaciones son interdependientes.

Como de la ecuación (13.1) se derivan las componentes normales de  $\mathbf{D}$  y de la ecuación (13.10) las tangenciales de  $\mathbf{H}$ , dada su interdependencia se deduce que dichas condiciones en los límites son equivalentes para campos dependientes del tiempo. Lo mismo se puede decir de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  y tangenciales de  $\mathbf{E}$ .

**13.1.3.2 Condiciones en los límites cuando uno de los medios es un buen conductor**

Suponemos que el medio 1 es un buen conductor, es decir  $\gamma_1$  muy elevada, prácticamente infinita.

*Campos estáticos*

En campos estáticos  $\mathbf{E}$  es nulo dentro del conductor, por tanto las condiciones en los límites serán,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma = \rho_s \quad (13.27)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (13.28)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (13.29)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (13.30)$$

*Campos variables*

Suponemos los campos dependientes del tiempo de forma que,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)$$

La ecuación (13.10) unida a las constitutivas  $\mathbf{J}_1 = \gamma_1 \mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E}_1$ , nos lleva a,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\gamma_1 + j\omega\epsilon_1} \nabla \times \mathbf{H}_1$$

Si  $\mathbf{H}_1$  es finito y  $\gamma_1 + j\omega\epsilon_1$  muy elevado,

$$\mathbf{E}_1 = 0$$

Es decir, para campos variables el campo eléctrico dentro de un buen conductor es nulo.

Considerando la ecuación (13.2),  $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$  y que  $\mathbf{E}_1 = 0$ ,

$$\mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = 0$$

De esta ecuación se deduce que dentro de un buen conductor los campos magnéticos que varían rápidamente son nulos. No ocurre así con los campos estáticos, ya que  $\mathbf{E}$  es cero pero no  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ ; también se da esta circunstancia para campos que varían lentamente.

Las condiciones en la frontera con un buen conductor, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, son de la forma,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma = \rho_s \quad (13.31)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (13.32)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad (13.33)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = 0 \quad (13.34)$$

Como hemos visto antes, las condiciones dadas por las ecuaciones (13.31) y (13.34) son equivalentes y lo mismo ocurre con las dos restantes.

### 13.1.3 ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

En este apartado tratamos la conservación de la energía en un campo electromagnético, para ello consideramos el balance de potencia en un volumen dado.

Si en un volumen determinado  $V$  existe una distribución de cargas y corrientes el trabajo realizado por unidad de tiempo en dicho volumen es,

$$P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (13.35)$$

Las fuerzas magnéticas no realizan trabajo por que siempre son perpendiculares al camino recorrido. Esta potencia puede ser disipada en forma de calor o transformada en energía mecánica. También puede existir un

generador que suministre potencia que en parte se disipe y el resto se radie a través de la superficie  $S$  que limita  $V$  o se transforme en una energía electromagnética variable en el tiempo dentro del volumen  $V$ .

Para expresar de forma explícita los distintos componentes que intervienen en el balance de potencia procedemos de la siguiente forma: Despejamos  $\mathbf{J}$  de la ecuación (13.10) y la sustituimos en la ecuación (13.35), después aplicamos la relación vectorial,

$$\nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

y sustituimos  $\nabla \times \mathbf{E}$  por su valor dado en la ecuación (13.2). Realizando operaciones queda,

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv - \int_V \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv$$

Si los medios son lineales,

$$\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{y} \quad \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

Sustituyendo las relaciones anteriores y aplicando el teorema de la divergencia al primer término del segundo miembro queda,

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \quad (13.36)$$

La ecuación (13.36) es conocida como **teorema de Poynting**. Se define el vector de Poynting mediante la siguiente ecuación,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (13.37)$$

Cada uno de los términos del segundo miembro de la ecuación (13.36) tiene el significado siguiente:

El primer término representa el flujo del vector de Poynting o flujo de potencia a través de la superficie  $S$  que limita el volumen  $V$  considerado. El vector de Poynting  $\mathbf{S}$  es la energía por unidad de tiempo y unidad de área.

El segundo término representa la variación temporal de la suma de las energías eléctrica y magnética (energía electromagnética) en el volumen  $V$ .

Si consideramos que sobre las cargas actúa el campo  $\mathbf{E}$  más otro  $\mathbf{E}'$  de origen electromecánico o químico (baterías),

$$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}') \quad (13.38)$$

Despejando  $\mathbf{E}$  y sustituyendo en la ecuación (13.36) obtenemos,

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}' dv + \int_V \frac{J^2}{\gamma} dv$$

Llevando esta relación a la ecuación (13.36) queda,

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}' dv = \int_V \frac{J^2}{\gamma} dv + \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \quad (13.39)$$

El teorema de Poynting expresado por la ecuación (13.39) muestra que la variación con el tiempo de la energía electromagnética en el volumen considerado más el flujo de potencia a través de toda la superficie  $S$  que limita el volumen  $V$  más la potencia disipada por efecto Joule es igual a el trabajo por unidad de tiempo suministrado o realizado por las fuentes externas en el volumen  $V$ .

Hemos considerado medios lineales, si existieran medios no lineales y con pérdidas la ecuación (13.39) no sería válida. Para que pudiera expresar el balance de potencia deberíamos introducir las pérdidas de energía no atribuidas a la conductividad, además de modificar las expresiones de la energía electromagnética.

#### 13.1.4 MOMENTO ELECTROMAGNÉTICO

En el apartado anterior hemos visto el flujo de energía atribuido al campo electromagnético. En éste introduciremos el momento asociado al campo electromagnético.

Si en un volumen dado existen las distribución carga  $\rho$  y corriente  $J$ , la fuerza sobre ellas en un volumen elemental obtenida a partir de la fuerza de Lorentz será,

$$d\mathbf{F} = (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})dv$$

Integrando esta expresión a todo el espacio, teniendo en cuenta las ecuaciones (13.2) y (13.3) y suponiendo que estamos en el vacío, se obtiene la siguiente ecuación,

$$\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V=\infty} \varepsilon_o(\mathbf{E} \times \mathbf{B})dv = 0 \quad (13.40)$$

La fuerza  $\mathbf{F}$  actúa sobre los portadores de carga en reposo o movimiento, es decir, sobre las partículas cargadas que forman la materia. Por otro lado la ley de Newton establece que  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ,  $\mathbf{p}$  es el momento mecánico de las partículas. Sustituyendo esta relación en la ecuación anterior y dado que en este caso no hay diferencia entre la derivada parcial y total, obtenemos,

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} + \int_{V=\infty} \varepsilon_o(\mathbf{E} \times \mathbf{B})dv \right) = 0 \quad (13.41)$$

La ecuación anterior muestra que el momento, cantidad de movimiento, total no varía, se conserva. Al término integral se le conoce con el nombre de **momento electromagnético**,

$$\mathbf{p}_e = \int_{V=\infty} \varepsilon_o(\mathbf{E} \times \mathbf{B})dv \quad (13.42)$$

También se introduce la **densidad de momento electromagnético**,

$$\mathbf{g} = \varepsilon_o(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \varepsilon_o\mu_o(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{c^2}\mathbf{S} \quad (13.43)$$

Vemos que la densidad de momento electromagnético  $\mathbf{g}$  es igual al vector de Poynting dividido por el cuadrado de la velocidad de propagación del campo electromagnético en el vacío.

Terminamos expresando, por analogía con mecánica, la **densidad de momento angular** mediante la siguiente relación,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \varepsilon_o\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (13.44)$$

Donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición en el punto considerado.

### 13.1.5 ECUACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ecuaciones de Maxwell resumidas en el apartado 13.2 son el instrumento adecuado para el análisis del comportamiento de los campos eléctrico y magnético. Se puede comprobar que las ondas de campos eléctrico y magnético cumplen las ecuaciones de Maxwell, por lo que históricamente se utilizaron dichas ecuaciones para predecir la radiación y propagación de ondas electromagnéticas.

A partir de las ecuaciones (13.1, 2, 3, 10) se puede deducir la ecuación de ondas, tanto para el campo eléctrico como el magnético. En dicha deducción suponemos que los medios son lineales y están caracterizados por las constantes  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ , de forma que aplicamos la ecuaciones constitutivas,  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  y  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ .

La ecuación de ondas para el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se puede obtener aplicando el operador rotacional a la ecuación (13.2). Utilizando la relación vectorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

sustituyendo  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$  y  $\nabla \times \mathbf{H}$  mediante la ecuación (13.10), el resultado es,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho \quad (13.45)$$

Esta es la ecuación de ondas no homogénea, también conocida como ecuación de Helmholtz, para el campo eléctrico. Si en el medio considerado las densidades de corriente y carga son nulas, la ecuación anterior se simplifica y obtenemos la ecuación de ondas homogénea, que es de la forma siguiente,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (13.46)$$

La ecuación anterior se puede representar mediante la D'Alembertiana,

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\square^2 \mathbf{E} = 0 \quad (13.47)$$

De forma análoga podemos obtener la ecuación de ondas para el campo magnético  $\mathbf{H}$ . Aplicando el rotacional a la ecuación (13.10), considerando que los medios son lineales con  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  y utilizando la ecuación (13.2) para  $\nabla \times \mathbf{E}$ , obtenemos la ecuación siguiente,

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (13.48)$$

Esta es la ecuación de ondas no homogénea para  $\mathbf{H}$ . En el caso de que  $\mathbf{J} = 0$ , obtenemos la ecuación de ondas homogénea siguiente,

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (13.49)$$

Mediante las ecuaciones (13.46) y (13.49) estudiamos la propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío.

Con las ecuaciones (13.45) y (13.48) analizamos los problemas con fuentes y se obtienen los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en función de las fuentes  $\mathbf{J}$  y  $\rho$ . También nos sirven las ecuaciones anteriores para estudiar los casos en que sin existir fuentes externas,  $\mathbf{J}$  y  $\rho$  están relacionadas con el campo  $\mathbf{E}$  respectivamente a través de  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  y  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$ .

### 13.1.6 POTENCIALES ELECTRODINÁMICOS

En el apartado anterior hemos visto como podemos estudiar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  de una onda electromagnética en función de las fuentes  $\mathbf{J}$  y  $\rho$ . En la

práctica, con frecuencia es más fácil obtener la solución de unos potenciales y después obtener los campos a partir los potenciales.

En electrostática y magnetostática hemos introducido los potenciales escalar  $V$  y vector  $\mathbf{A}$ . En el caso de campos variables, como cabe esperar, los potenciales  $V$  y  $\mathbf{A}$  están relacionados. De la ecuación (13.3), como vimos en magnetostática se deduce que,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (13.50)$$

Llevando esta relación a la ecuación (13.2) obtenemos,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Es decir, como en electrostática,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Por tanto,

$$\mathbf{E} = -\left( \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (13.51)$$

Las ecuaciones (13.50) y (13.51) nos dan  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  en función de los **potenciales electrodinámicos**  $V$  y  $\mathbf{A}$ . Dichos campos no se modifican si sustituimos los potenciales por otros relacionados de la forma siguiente,

$$V' = V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (13.52)$$

Las ecuaciones anteriores se conocen como **transformaciones de norma (gauge transformations)**, y son transformaciones de los potenciales que dejan invariantes los campos.

### 13.1.6.1 Ecuaciones de onda para los potenciales

Nos interesa obtener las ecuaciones que permitan calcular los potenciales en función de las fuentes  $\mathbf{J}$  y  $\rho$ .

Suponemos los medios lineales de forma que  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  y  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ . Sustituyendo en la ecuación (13.10) las ecuaciones constitutivas anteriores y utilizando las relaciones entre campos y potenciales, obtenemos,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

Teniendo en cuenta la relación vectorial para  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$  queda,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

En el segundo miembro de la ecuación anterior aparece el término,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

que complica la ecuación para el potencial vector  $\mathbf{A}$ . Por otra parte el teorema de Helmholtz establece que un vector no queda completamente definido si no se conoce su divergencia y rotacional. En el vector  $\mathbf{A}$  sólo se ha definido su rotacional mediante la ecuación (13.50), por tanto podemos utilizar la relación anterior para definir la divergencia. Dicha relación, igual a cero, se conoce como **condición de Lorentz** y permite definir  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  en función del potencial escalar  $V$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (13.53)$$

Esta condición de Lorentz permite en primer lugar simplificar la ecuación para el potencial vector  $\mathbf{A}$ , de manera que,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (13.54)$$

Dicha ecuación se conoce como ecuación de ondas para el potencial vector  $\mathbf{A}$  y permite calcular  $\mathbf{A}$  en función de las fuentes  $\mathbf{J}$ .

La ecuación de ondas para el potencial escalar se obtiene sustituyendo el valor de  $\mathbf{E}$  dado por la ecuación (13.51) en la ecuación (13.1) y considerando la condición de Lorentz establecida mediante la ecuación (13.53). La ecuación de ondas para el potencial escalar  $V$  será,

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (13.55)$$

Dicha ecuación es de forma análoga a la anterior, siendo en este caso la fuente de potencial la densidad de carga  $\rho$ .

*Condiciones en los límites para los potenciales*

En la frontera entre dos medios, de la ecuación (13.51) y siempre que  $\partial \mathbf{A} / \partial t$  sea finita, se deduce que,

$$V_2 = V_1 \quad (13.56)$$

Las componentes tangenciales del potencial vector  $\mathbf{A}$  son continuas en la frontera dado que  $\mathbf{B}$  es finita y  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Por otra parte la condición de Lorentz, suponiendo que  $\partial V / \partial t$  es finita, nos permite deducir que las componentes normales de  $\mathbf{A}$  son continuas, por tanto se verifica que,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \quad (13.57)$$

en la frontera entre dos materiales.

### Potenciales retardados

La solución de la ecuación no homogénea para el potencial vector  $\mathbf{A}$  en un medio indefinido es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp j(\omega t - k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dv' \quad (13.58)$$

Donde la frecuencia  $f$ , número de onda  $k$  y la velocidad de propagación de la onda  $v$  se relacionan de la forma siguiente:

$$\omega = 2\pi f \ ; \ k = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{v} \ ; \ v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (13.59)$$

El término  $k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = t'$ , es el tiempo que tarda el campo generado en  $\mathbf{r}'$  por la fuente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  en  $t = 0$  en observarse a una distancia  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . La ecuación (13.58) se conoce como potencial vector retardado.

Dado que la ecuación (13.55) es de forma análoga a la ecuación (13.54), su solución es también similar, es decir,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp j(\omega t - k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dv' \quad (13.60)$$

También se conoce a  $V(\mathbf{r}, t)$  como el potencial escalar retardado.

Tanto el potencial vector como el escalar retardados son parecidos a los obtenidos en electrostática y magnetostática; el único elemento que los diferencia es el factor,

$$\exp j(\omega t - k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = e^{j(\omega t - k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}$$

Dicho factor es el término que pone de manifiesto la dependencia temporal de las fuentes y que la propagación de una perturbación se hace con velocidad finita  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , velocidad de propagación del campo electromagnético en un medio cuyas constantes son  $\mu$  y  $\epsilon$ .

### 13.1.7 ONDAS PLANAS EN DIELECTRICOS

En el apartado anterior hemos visto que la solución de la ecuación de ondas no homogénea para  $\mathbf{A}$  y  $V$  son los potenciales retardados, de los cuales se derivan los campos eléctrico y magnético. Las ondas electromagnéticas (OE) tienen su origen en fuentes variables con el tiempo. Los campos eléctrico y magnético generados se propagan con velocidad finita dependiente

del medio, alejándose de la fuente. La forma de propagación se describe mediante la solución de la ecuación de ondas sin fuentes.

Las ondas electromagnéticas (OE) tienen dos propiedades importantes:

1ª La OE una vez generada en un punto por la fuente se olvida de ella, es decir, después de generada no tiene conexión con el sistema de cargas o corrientes que la producen, en otras palabras la onda sigue su propagación sin que le afecte si la fuente sigue emitiendo o no.

2ª La OE transporta energía que se pone de manifiesto cuando interactúa con cargas aisladas o medios materiales modificando el movimiento en el primer caso y cambiando el estado o las características térmicas y eléctricas del medio.

Ahora vamos a estudiar la propagación de OE en medios dieléctricos sin pérdidas, es decir, medios no conductores sin pérdidas debidas a fenómenos de histéresis o relajación dieléctrica. Además suponemos que el medio es no dispersivo, en otras palabras que  $\varepsilon$  y  $\mu$  no dependen de la frecuencia.

Una onda plana uniforme es una solución de la ecuación de ondas que se caracteriza por que su campo eléctrico en un instante dado tiene el mismo módulo y fase en todos los puntos de un plano perpendicular a la dirección de propagación. Este plano se llama frente de onda o plano de onda.

Estudiamos las ondas planas monocromáticas, que son las más simples y nos permiten analizar las características principales. Una onda periódica no sinusoidal puede obtenerse superponiendo ondas monocromáticas mediante una serie de Fourier. En el caso de ondas no periódicas la superposición es en la forma dada por la integral de Fourier. Por la razones expuestas el estudio de las ondas monocromáticas es básico para el tratamiento de otro tipo de ondas.

La solución de la ecuación (13.46) se obtiene ensayando una de la forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}_o \exp j(\omega t - k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})) \quad (13.61)$$

Esta expresión muestra que el campo eléctrico es la parte real de un campo en forma compleja donde  $\omega = 2\pi f$ ,  $\mathbf{n}$  es el vector unitario en la dirección de propagación,  $k$  es el número de onda y  $\mathbf{r}$  el vector de posición en el punto del espacio donde se observa  $\mathbf{E}$ .

Llevando la expresión (13.61) a la ecuación (13.46) vemos que satisface dicha ecuación y la constante de propagación  $k$ , o número de onda, está relacionada con la frecuencia y características del medio a través de la ecuación siguiente,

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c} \quad [\text{rad/m}] \quad (13.62)$$

El vector  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ , cuya dirección es la de propagación, se le llama **vector de onda**,

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \mathbf{n}\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} \quad (13.63)$$

La parte real de la ecuación (13.61) es una onda que se propaga en la dirección  $\mathbf{n}$  y

$$l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

$l$  es la distancia desde el origen al plano donde el campo tiene el mismo módulo y fase, plano de onda. En este se verifica que,

$$\omega t - k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \omega t - kl = \text{constante}$$

La velocidad de propagación de la onda, es decir, de los planos de fase constante se obtiene derivando la ecuación anterior,

$$v = \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{dt} = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (13.64)$$

En una onda interesa a veces expresar la constante  $k$  en función de la longitud de onda  $\lambda$ . Como  $\lambda = vT$  y  $T = 2\pi/\omega$ ,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (13.65)$$

### 13.1.7.1 Relaciones entre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en una onda plana

En primer lugar vamos a demostrar que en un medio donde no hay cargas ( $\rho = 0$ ), el campo  $\mathbf{E}$  es perpendicular a la dirección de propagación,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$ . A partir de  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  se demuestra que,

$$\mathbf{E}_o \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (13.66)$$

Por tanto  $\mathbf{E}_o$  debe ser perpendicular a  $\mathbf{n}$ ; es decir, el campo  $\mathbf{E}$  es perpendicular a la dirección de propagación y en consecuencia está en el plano de onda.

#### *Relación entre $\mathbf{H}$ y $\mathbf{E}$*

La intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$  se puede deducir del campo  $\mathbf{E}$  mediante la ecuación (13.2),

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla \times \left( \mathbf{E}_o e^{-jk\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} \right) = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_o e^{-jk\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (13.67)$$

$\mathbf{H}$  es perpendicular al campo  $\mathbf{E}$  y a la dirección de propagación.

Se introduce el concepto de **impedancia intrínseca** mediante la relación,

$$Z_o = \frac{E}{H} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} = \frac{\omega\mu}{k} \quad (13.68)$$

Todos los cálculos realizados se pueden repetir para una onda propagándose en dirección  $-\mathbf{n}$ , el resultado sería el mismo salvo el sentido de  $\mathbf{H}$  que sería el contrario.

### 13.1.7.2 Potencia transmitida por una onda plana

Tomando los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  obtenidos anteriormente podemos comprobar que el vector de Poynting tiene la dirección de propagación de la onda. El vector de Poynting instantáneo es,

$$\mathbf{S} = \text{Re } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \text{Re } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)) \times \frac{1}{2} (\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t))$$

$\mathbf{E}^*$  y  $\mathbf{H}^*$  son los complejos conjugados de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j2\omega t}) \quad (13.69)$$

El valor medio del vector anterior es,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j2\omega t}) dt$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})) \quad (13.70)$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  dados por las ecuaciones (13.61 y 67), obtenemos el vector de Poynting que expresa la potencia transmitida por unidad de superficie en la dirección de propagación de la onda,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_o^2 \mathbf{n} \quad (13.71)$$

También podemos calcular los valores medios de las densidades de energía eléctrica y magnética, estos son,

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) = \frac{1}{4} \varepsilon E_o^2 \quad (13.72)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right) = \frac{1}{4} \mu H_o^2 \quad (13.73)$$

Donde  $E_o$  y  $H_o$  son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético. Dada la relación entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en una onda plana, se demuestra que las dos densidades de energías son iguales, es decir, que,

$$\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon E_o^2 \quad (13.74)$$

La relación entre el vector de Poynting y la suma de las densidades de energías eléctrica y magnética es,

$$\frac{\langle S \rangle}{\langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = v \quad (13.75)$$

La potencia transmitida a través de la unidad de superficie es igual a la velocidad de propagación por la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética.

#### 13.1.7.4 Onda polarizada

Una onda está polarizada linealmente cuando se verifica que el vector  $\mathbf{E}$  oscila sobre una recta en el plano perpendicular a  $\mathbf{n}$  en un punto dado. Está polarizada elípticamente cuando el extremo del vector  $\mathbf{E}$  describe una elipse sobre el plano citado.

Si suponemos que la onda se propaga en la dirección de eje Y,  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_y$ , y está polarizada linealmente en la dirección del eje Z, el campo eléctrico será de la forma,

$$\mathbf{E}(y, t) = \operatorname{Re} \left( \mathbf{u}_z E_o e^{j(\omega t - ky)} \right) = \mathbf{u}_z E_o \cos(\omega t - ky) \quad (13.76)$$

La polarización elíptica, suponiendo que la onda se propaga en la dirección del eje Y, se compone de dos ondas polarizadas linealmente, una en la dirección del eje Z y otra en la dirección de  $\mathbf{u}_x$  y desfasada  $\pi/2$ .

$$\mathbf{E}(y, t) = \operatorname{Re} \left( \mathbf{u}_z E_{oz} e^{-jkz} - j \mathbf{u}_x E_{ox} e^{-jkz} \right) e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{E}(y, t) = \mathbf{u}_z E_{oz} \cos(\omega t - ky) + \mathbf{u}_x E_{ox} \operatorname{sen}(\omega t - ky) \quad (13.77)$$

En este caso el extremo del vector  $\mathbf{E}$  describe una elipse en el plano  $y = y_o$ . Si los valores de las amplitudes son iguales,  $E_z = E_{ox}$ , la figura descrita será una circunferencia y se dice que la onda está polarizada circularmente.

### 13.1.8 ONDAS PLANAS EN MEDIOS CON PÉRDIDAS

En este apartado veremos la solución de la ecuación de ondas cuando en el medio por el que se propagan se producen pérdidas de energía debido, bien a la conductividad del material o bien a que en el dieléctrico o medio magnético se producen pérdidas de energía debido a los fenómenos de relajación dieléctrica o histéresis.

La forma de tener en cuenta este fenómeno consiste en introducir una permitividad de forma compleja, es decir, en un medio con pérdidas dieléctricas,

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (13.78)$$

Además en el propio dieléctrico se pueden producir pérdidas debidas a la conductividad derivada de la existencia de cargas libres; este tipo de pérdidas también se incluyen en la parte imaginaria de la forma compleja de la permitividad.

En un medio magnético se produce un proceso análogo al que hemos indicado en el caso de dieléctricos, por tanto las pérdidas se expresan mediante una permeabilidad compleja,

$$\mu = \mu' - j\mu'' \quad (13.79)$$

Los medios ferromagnéticos son los que presentan más pérdidas, pero la relación  $\mu''/\mu'$  es tan pequeña que se suelen despreciar las pérdidas magnéticas frente a las debidas a la conductividad y relajación dieléctrica. Por esta razón no tendremos en cuenta la forma compleja de la permeabilidad en este apartado.

El otro parámetro que intervine en las pérdidas de un material es la conductividad  $\gamma$ , que produce la disipación de energía asociada al efecto Joule; a estas pérdidas se les conoce como pérdidas de tipo óhmico.

La permitividad permeabilidad y conductividad dependen de la frecuencia, por tanto, debemos considerar esta circunstancia al estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en un medio; por ello tomamos los valores obtenidos experimentalmente en el rango de frecuencias que se considere. Un ejemplo típico es el agua, cuyos valores estáticos a cero grados son:  $\varepsilon' = 87,9\varepsilon_0$  y  $\varepsilon'' = 0$ ; mientras que para la misma temperatura y frecuencia 50 GHz,  $\varepsilon' = 8,28\varepsilon_0$  y  $\varepsilon'' = 14,34\varepsilon_0$ .

En el análisis siguiente suponemos que  $\rho = 0$  y que también es nula la corriente debida a fuentes externas. Sólo consideramos la corriente en el

conductor debida al campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ . La ecuación de ondas (13.45) en este caso se transforma en la siguiente,

$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} \quad (13.80)$$

Para el caso de una onda monocromática con  $\mathbf{E} = \exp(j\omega t)$  la ecuación anterior se transforma en,

$$\nabla^2\mathbf{E} + \varepsilon\mu\omega^2\mathbf{E} = j\omega\gamma\mu\mathbf{E}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} + (\varepsilon\mu\omega^2 - j\omega\gamma\mu)\mathbf{E} = \nabla^2\mathbf{E} + \omega^2\mu(\varepsilon - j\gamma/\omega)\mathbf{E} = 0 \quad (13.81)$$

Similar a la de un dieléctrico con permitividad  $\varepsilon_c = (\varepsilon - j\gamma/\omega)$ .

Comparando con la solución en el caso de medios sin pérdidas, la ecuación anterior tiene solución de la forma,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  si,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - j\omega\gamma\mu \quad (13.82)$$

Esta relación, se conoce con el nombre de **relación de dispersión** y pone de manifiesto que ahora la constante de propagación  $k$  y el vector de propagación  $\mathbf{k}$  son números complejos.

Se define por tanto  $\mathbf{k}$  de la forma siguiente:

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta} + j\boldsymbol{\alpha} \quad (13.83)$$

Donde los vectores  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$ , en la mayoría de los casos, tienen la misma dirección y sentido que el vector  $\mathbf{n}$  introducido para los medios sin pérdidas. En algún caso, como ocurre con la incidencia oblicua de una onda electromagnética sobre una plano que separa el vacío de un medio conductor,  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  no tienen la misma dirección en la zona correspondiente al medio conductor.<sup>1</sup> En este caso,

$$\mathbf{E}_o \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) \exp(-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$$

La onda se amortigua en la dirección del vector  $\boldsymbol{\alpha}$ . Si  $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$  los planos de fase constante, perpendiculares a  $\boldsymbol{\beta}$ , forman un ángulo con los planos de amplitud constante perpendiculares a  $\boldsymbol{\alpha}$ . Es decir, los planos de fase constantes son distintos de los planos de amplitud constante. A este tipo de ondas se las denomina ondas planas no homogéneas.

En nuestro análisis vamos a suponer que  $\boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{n}$  y  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{n}$  de manera que,

<sup>1</sup>Véase el libro de Reitz, Milford y Christy [23], apartado 18.4

$$\mathbf{k} = (\beta + j\alpha)\mathbf{n} \quad (13.84)$$

Analizaremos dos casos en la relación de dispersión: el primero es cuando  $\gamma = 0$ ,  $\mu$  constante y  $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ ; y el segundo para  $\varepsilon$  y  $\mu$  constantes pero con  $\gamma$  distinto de cero.

### 13.1.8.1 Dieléctricos con pérdidas

Suponemos que  $\gamma = 0$  y  $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ . La constante de propagación será,

$$k^2 = \mu\omega^2(\varepsilon' - j\varepsilon'') = \omega^2\varepsilon'\mu \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \quad (13.85)$$

Se define la **tangente de pérdidas** mediante la siguiente relación,

$$\tan \delta_p = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad (13.86)$$

y dicha relación mide la potencia disipada en el medio. A  $\delta_p$  se le conoce bajo el nombre de **ángulo de pérdidas**.

Para la constante propagación  $k$  se toma la parte positiva de la raíz cuadrada, es decir,

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu} \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{1/2} \quad (13.87)$$

#### *Dieléctricos con pequeñas pérdidas*

Ahora vamos a considerar el caso más general de un dieléctrico con pequeñas pérdidas, caracterizado por que  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ . En este caso podemos aplicar a la ecuación (13.87) el desarrollo del binomio y tomar los dos primeros términos.

Para  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$

$$k \simeq \omega\sqrt{\varepsilon'\mu} \left(1 - j\frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \quad (13.88)$$

Teniendo en cuenta que  $k = \beta + j\alpha$ , se deduce que,

$$\beta \simeq \omega\sqrt{\varepsilon'\mu} \left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right) \quad \text{rad/m} \quad (13.89)$$

$$\alpha \simeq -\frac{1}{2}\omega\sqrt{\varepsilon'\mu} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \quad \text{Np/m} \quad (13.90)$$

La constantes  $\beta$  y  $\alpha$ , en el SI, se miden en radianes/m y neperios/m.

La constante de fase en medio con pequeñas pérdidas se puede simplificar despreciando el segundo término del paréntesis, por tanto queda,

$$\beta \simeq \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \quad \text{rad/m} \quad (13.91)$$

que es prácticamente igual a la de un medio sin pérdidas.

El exponente de la parte espacial será,

$$-jk = -j\beta + \alpha$$

por tanto,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{E}_o e^{j\omega t} \exp((-j\beta + \alpha)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (13.92)$$

Si suponemos la onda plana se propaga en la dirección del Y,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{j\omega t} \exp(-j\beta + \alpha)y = \mathbf{E}_o \exp j(\omega t - \beta y) \exp(\alpha y) \quad (13.93)$$

Como  $\alpha$ , según la expresión (13.90) es negativa  $\exp(\alpha y)$  representa una *atenuación* en la dirección de avance la onda, por esta razón a  $\alpha$  se la denomina **constante de atenuación**. El término  $\exp j(\omega t - \beta y)$  expresa la fase de la onda, por lo que a  $\beta$  se la denomina **constante de fase**. Si sustituimos los distintos términos,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \exp j\omega(t - \sqrt{\varepsilon' \mu} y) \exp(-\omega \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon' \mu} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) y) \quad (13.94)$$

Si suponemos que  $\mathbf{E}_o = \mathbf{u}_z E_o \exp j0$ , la parte real del campo anterior será,

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_o \exp(\alpha y) \cos(\omega t - \beta y) \quad (13.95)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  dados por las ecuaciones (13.90) y (13.91).

Teniendo en cuenta el valor de  $k$  dado por la ecuación (13.88) podemos encontrar el valor de la **impedancia intrínseca**,

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\omega \mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{-1/2}$$

El desarrollo en serie del binomio, si tomamos los dos primeros términos, nos lleva a la siguiente relación para la **impedancia intrínseca** en un medio con pequeñas pérdidas,

$$Z \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 + j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \quad (13.96)$$

La **velocidad de fase** será,

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} \quad (13.97)$$

La longitud de onda viene dada por la relación siguiente,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \simeq \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}} \quad (13.98)$$

### 13.1.8.2 Conductores

Ahora consideramos que  $\epsilon$  y  $\mu$  son constantes y  $\gamma \neq 0$ . la relación (13.82) queda de la forma siguiente,

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \left(1 - j \frac{\gamma}{\epsilon \omega}\right)$$

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left(1 - j \frac{\gamma}{\epsilon \omega}\right)^{1/2} \quad (13.99)$$

Los conductores tienen un tratamiento parecido a los dieléctricos si asimilamos la parte compleja de la permitividad a  $\gamma/\omega$ , es decir, si consideramos  $\epsilon = \epsilon'$  y ponemos,

$$\epsilon'' = \frac{\gamma}{\omega} \quad \text{o} \quad \gamma = \omega \epsilon''$$

La diferencia en el comportamiento se debe a que generalmente  $\epsilon''$  es pequeña mientras que  $\gamma/\omega$  puede variar considerablemente en función del conductor.

#### *Malos conductores*

Se consideran malos conductores a los de baja conductividad, de manera que podemos suponer a la frecuencia considerada  $\gamma \ll \omega \epsilon$ . Con esta condición puede ocurrir que un mal conductor puede cumplirla para una frecuencia y dejar de cumplirla para una frecuencia más baja. Vamos a analizar el caso en que se cumpla la citada condición para  $\gamma$ . La ecuación (13.98) se puede simplificar aplicando el desarrollo del binomio y tomando únicamente los dos primeros términos,

$$k \simeq \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left(1 - j \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\epsilon \omega}\right)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos en el caso de dieléctricos con pequeñas pérdidas para obtener  $\beta$  y  $\alpha$ , ahora,

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad \text{rad/m} \quad (13.100)$$

$$\alpha = -\frac{\beta}{2} \sqrt{\epsilon \mu} \left(\frac{\gamma}{\epsilon \omega}\right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad \text{Np/m} \quad (13.101)$$

Vemos que son similares a las obtenidas en el dieléctrico. Se puede pasar de una a otra cambiando  $\varepsilon$  por  $\varepsilon'$  y  $\gamma$  por  $\omega\varepsilon''$ .

La velocidad de fase es,

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (13.102)$$

y la longitud de onda viene dada por la relación siguiente,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \simeq \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

### *Buenos conductores*

Se consideran buenos conductores a los que su conductividad es del orden de  $10^7$ , en este rango se encuentran metales como el oro ( $\gamma = 4,1 \times 10^7$  S/m), plata ( $\gamma = 6,17 \times 10^7$  S/m) y cobre ( $\gamma = 5,8 \times 10^7$  S/m).

Nos vamos a limitar al caso en que suponemos que  $\gamma$  no depende de la frecuencia, cosa que no ocurre por ejemplo en un plasma, y además se cumple la condición  $\gamma \gg \omega\varepsilon$ .

Con estas condiciones la constante de propagación será,

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \left(1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^{1/2} \quad (13.104)$$

En este caso en el binomio  $1 \ll j\gamma/\varepsilon\omega$  y

$$\left(-j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^{1/2} \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

por tanto,

$$k \simeq \sqrt{\omega\mu\gamma} \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right) \simeq \left(\frac{\omega\mu\gamma}{2}\right)^{1/2} (1-j) \quad (13.105)$$

de donde se deduce que,

$$\beta \simeq \left(\frac{\omega\mu\gamma}{2}\right)^{1/2} ; \quad \alpha \simeq -\left(\frac{\omega\mu\gamma}{2}\right)^{1/2} \quad (13.106)$$

La velocidad de fase es,

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \simeq \left(\frac{2\omega}{\mu\gamma}\right)^{1/2} \quad (13.107)$$

y la longitud de onda viene dada por la relación siguiente,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \simeq 2\pi \left(\frac{\omega\mu\gamma}{2}\right)^{-1/2} \quad (13.108)$$

El exponente de la parte espacial será,

$$-jk = -j\beta + \alpha$$

por tanto,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{E}_o e^{j\omega t} \exp(-j\beta + \alpha) \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \quad (13.109)$$

Si suponemos la onda plana se propaga en la dirección del Y,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{j\omega t} \exp(-j\beta + \alpha)y = \mathbf{E}_o \exp j(\omega t - \beta y) \exp(\alpha y) \quad (13.110)$$

Como  $\alpha$ , según la expresión (13.106), es negativa  $\exp(\alpha y)$  representa una atenuación en la dirección de avance de la onda. El término  $\exp j(\omega t - \beta y)$  expresa la fase de la onda. Si sustituimos los distintos términos,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \exp j \left( \omega t - \left( \frac{\omega \mu \gamma}{2} \right)^{1/2} y \right) \exp \left( - \left( \frac{\omega \mu \gamma}{2} \right)^{1/2} y \right) \quad (13.111)$$

Si tomamos  $\mathbf{E}_o = \mathbf{u}_z E_o \exp j0$ , la parte real del campo anterior será de la forma,

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_o \exp(\alpha y) \cos(\omega t - \beta y) \quad (13.112)$$

Donde los valores  $\alpha$  y  $\beta$  vienen dados por las ecuaciones (13.106).

Debido a la atenuación la onda disminuye su amplitud en la dirección de propagación; cuando el factor de atenuación alcanza el valor  $\exp(-1) \simeq 0,368$ , la onda ha recorrido una distancia,

$$\delta = -\frac{1}{\alpha} \simeq \left( \frac{\omega \mu \gamma}{2} \right)^{-1/2} \quad (13.113)$$

A esta distancia se la llama **profundidad de penetración**.

En los metales indicados anteriormente, cuya conductividad es del orden de  $10^7$ , y para una frecuencia cuya pulsación es del orden de  $10^{10}$  Hz, (frecuencia en el rango de las microondas),

$$\delta \simeq (2\pi 10^{-7} \times 10^{10} \times 10^7)^{-1/2} \simeq 4 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Si la frecuencia correspondiera a la zona visible del espectro electromagnético,  $\omega$  del orden de  $10^{15}$  Hz,  $\delta$  será del orden de los  $10^{-8}$  metros. Aunque la conductividad varía con la frecuencia, este dato muestra por qué los metales son opacos.

La **impedancia intrínseca** se obtiene teniendo en cuenta su definición y el valor de  $k$ , en este caso dado por la ecuación (13.105),

$$Z_c = \frac{\omega\mu}{k} \simeq \left(\frac{\omega\mu}{2\gamma}\right)^{1/2} (1 + j) \quad (13.114)$$

### 13.1.8.3 Energía electromagnética

Es interesante ver como se comportan las densidades de energía eléctrica y magnética en el caso de medios con pérdidas, así como el vector de Poynting.

*Energía en el caso de un dieléctrico con pequeñas pérdidas*

Se calcula la densidad de energía mediante la relación,

$$w_{em} = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

Para los campos tomamos las ecuaciones siguientes,

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_o \exp(\alpha y) \cos(\omega t - \beta y)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_x \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_o \exp(\alpha y) \cos(\omega t - \beta y + \theta_d)$$

$$w_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon E_o^2 \exp(2\alpha y) (\cos^2(\omega t - \beta y) + \cos^2(\omega t - \beta y + \theta_d))$$

dato que el valor medio de coseno cuadrado es 1/2, el valor medio de  $w_{em}$  será,

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon E_o^2 \exp(2\alpha y) \quad (13.115)$$

*Energía en el caso de un buen conductor*

En este caso los campo vienen dados por las ecuaciones,

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_o \exp(\alpha y) \cos(\omega t - \beta y)$$

$$\mathbf{H} \simeq \mathbf{u}_x \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} E_o \exp(\alpha y) \cos\left(\omega t - \beta y - \frac{\pi}{4}\right)$$

La densidad de energía en este caso es,

$$w_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon E_o^2 \exp(2\alpha y) \left( \cos^2(\omega t - \beta y) + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right) \cos^2\left(\omega t - \beta y - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

El valor medio ahora será,

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon E_o^2 \exp(2\alpha y) \left( 1 + \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right) \quad (13.116)$$

Las dos ecuaciones anteriores muestran que en un conductor la densidad de energía magnética es muy superior a la eléctrica. Para un buen conductor  $\gamma \gg \omega\varepsilon$  y por tanto  $1 \ll \gamma/\omega\varepsilon$ , en consecuencia la densidad de energía

es prácticamente la debida al campo magnético. Con estas condiciones la ecuación anterior se simplifica y queda de la forma,

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\omega} E_o^2 \exp(2\alpha y) \quad (13.117)$$

#### 13.1.8.4 Vector de Poynting

Con los campos utilizados en el apartado anterior podemos calcular el vector de Poynting en los dos casos estudiados para la energía electromagnética.

##### *Dieléctrico con pequeñas pérdidas*

El vector de Poynting viene dado por la siguiente ecuación,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Los campos están dados por las ecuaciones indicadas para dieléctricos con pequeñas pérdidas, y como  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y$ ,

$$\mathbf{S} = \mathbf{u}_y E_o^2 \frac{|k|}{\omega \mu} \exp(2\alpha y) \cos(\omega t - \beta y) \cos(\omega t - \beta y + \theta_d) \quad (13.118)$$

La dirección y sentido del vector  $\mathbf{S}$  sigue siendo la misma que la de propagación de la onda. Por tanto el valor medio del vector de Poynting ahora es,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \frac{|k|}{\omega \mu} \cos \theta_d E_o^2 \exp(2\alpha y) \quad (13.119)$$

Si recordamos que la constante  $k$  viene dada por la ecuación (13.88)

$$k \simeq \omega \sqrt{\epsilon' \mu} \left( 1 - \frac{1}{2} j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right) = |k| (\cos \theta_d + j \sen \theta_d)$$

$$|k| \cos \theta_d = \omega \sqrt{\epsilon' \mu} = \beta$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu} E_o^2 \exp(2\alpha y) \quad (13.120)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon'}{\mu} \right)^{1/2} E_o^2 \exp(-\omega \sqrt{\epsilon' \mu} \left( \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right) y) \quad (13.121)$$

##### *Buenos conductores*

Procediendo de forma análoga al caso anterior, podemos calcular el vector de Poynting sin más que sustituir los valores de  $\beta$  y  $\alpha$  por los correspondientes a un buen conductor, es decir, por,

$$\beta = -\alpha = \left(\frac{\omega\mu\gamma}{2}\right)^{1/2}$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E_o^2 \exp(-(2\omega\mu\gamma)^{1/2} y) \quad (13.122)$$

### 13.1.9 RADIACIÓN DE UN DIPOLO

En este apartado vamos a calcular, mediante los potenciales retardados, los campos eléctrico y magnético debidos a un dipolo elemental.

En primer lugar vamos a establecer lo elementos que caracteriza a un dipolo elemental.

En la figura 13.2a se muestra el esquema de dicho dipolo. Consiste en un hilo orientado en la dirección del eje Z, de longitud  $l$  al que un generador, a través de una línea de transmisión, le suministra una corriente uniforme a lo largo de dicho hilo,

$$i(t) = I_o \cos \omega t = \text{Re} (I_o \exp(j\omega t)) \quad (13.123)$$

En los extremos del hilo se acumulará una carga, cuya relación con la corriente se obtiene aplicando la ecuación de continuidad sobre una esfera que rodee un extremo del hilo. Una entrada de corriente supone un incremento de la carga en extremo del hilo, por tanto,

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (13.124)$$

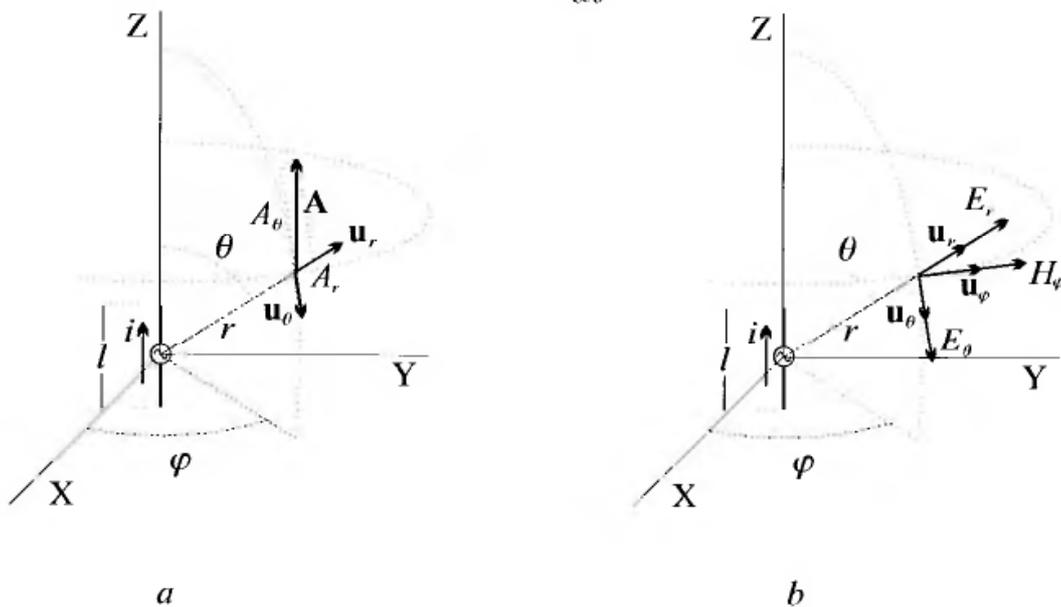


Figura 13.2

La carga en un extremos será positiva y en el otro negativa, ya que el generador hace que las cargas se desplacen de un extremo a otro (oscilen entre los extremos), provocando la acumulación en un extremo de las cargas procedentes del otro. Con las expresiones anteriores podemos obtener la carga en forma compleja,

$$q(t) = q_o \operatorname{Re} \exp(j\omega t) = \operatorname{Re} \frac{I_o}{j\omega} \exp(j\omega t)$$

El momento dipolar del dipolo elemental se define mediante la siguiente expresión,

$$\mathbf{p} = \mathbf{u}_z \operatorname{Re}(q_o l) \exp(j\omega t) = \mathbf{u}_z \operatorname{Re} \frac{I_o}{j\omega} l \exp(j\omega t) \quad (13.125)$$

Una vez establecido como funciona el dipolo elemental, vamos a ver como se procede para calcular los potenciales retardados y los campos.

Los campos se pueden obtener a partir de los potenciales escalar y vector mediante las relaciones (13.50) y (13.51), para lo cual necesitamos calcular tanto el potencial vector como el escalar; o bien se puede utilizar la ecuación (13.50) para obtener el campo magnético y la ecuación de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \epsilon_o \mathbf{E} \quad (13.126)$$

para obtener  $\mathbf{E}$ , con lo que sólo se calcula el potencial vector  $\mathbf{A}$ .

En este apartado vamos a seguir el segundo procedimiento.

*Potencial vector  $\mathbf{A}$*

Obtenemos el potencial vector aplicando la relación (13.58). En este caso  $\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = \mathbf{u}_z I_o dz'$ , y los límites de integración  $-l/2$  y  $l/2$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_o \mathbf{u}_z \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13.127)$$

Para integrar la expresión anterior debemos analizar como se puede aproximar  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  en función de las dimensiones del dipolo y la frecuencia de operación. La aproximación para el denominador es menos crítica que para el exponente, por tanto estudiaremos dicha aproximación en los dos casos. Con  $\mathbf{r}' = z' \mathbf{u}_z$  y  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ , desarrollando el módulo tenemos que,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + z'^2 - 2z'r \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z)^{1/2}$$

En los extremos,  $z' = \pm l/2$ ,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left( r^2 + \frac{l^2}{4} - lr \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z \right)^{1/2} = r \left( 1 + \left( \frac{l}{2r} \right)^2 - \frac{l}{r} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z \right)^{1/2}$$

En el caso de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  en el denominador, y para el valor máximo de  $\mathbf{r}'$ , si  $l \ll r$  los términos,

$$\left(\frac{l}{2r}\right)^2 \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{l}{r} \ll 1$$

por tanto, cuando buscamos la aproximación del denominador podemos utilizar,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r$$

Cuando tratamos el efecto sobre la fase debemos tener en cuenta que  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  está multiplicado por  $k$ ,

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Con la condición  $l \ll r$  podemos seguir despreciando el término  $(l/2r)^2$  y mediante el desarrollo del binomio, utilizando los dos primeros términos, tenemos que,

$$\left(1 - \frac{l}{r} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{l}{2r} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z$$

Ahora,

$$k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq kr - k \frac{l}{2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z$$

Para que el segundo término de la expresión anterior sea mucho menor que el primero,

$$k \frac{l}{2} = \frac{2\pi l}{2\lambda} = \pi \frac{l}{\lambda} \ll 1$$

Es decir,  $l \ll \lambda$

Esto se cumple cuando la longitud de dipolo es mucho menor que la longitud de onda, que a su vez depende de la frecuencia de oscilación. En definitiva para el término exponencial podemos poner,

$$k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq kr$$

Con el análisis que hemos hecho, para un punto muy alejado del dipolo y para una longitud de onda mucho mayor que la longitud de dicho dipolo, el potencial vector será,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{u}_z I_0 \exp(-jkr)}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} dz'$$

Una vez realizada la integración con respecto a  $z'$ , se puede expresar de la forma siguiente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{u}_z l I_0 \exp(-jkr)}{4\pi r} \quad (13.128)$$

*Campo magnético*

A partir del potencial vector obtenido, mediante  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , calculamos el campo magnético. Para ello expresamos dicho potencial en función de sus componentes en coordenadas esféricas, que con indica la figura 13.2a son,

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \cos \theta - \mathbf{u}_\theta \sin \theta$$

Es decir, no hay componente  $\mathbf{u}_\varphi$  ya que la simetría del dipolo es cilíndrica, en consecuencia,

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{l I_o \exp(-jkr)}{r} \cos \theta \\ A_\theta &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{l I_o \exp(-jkr)}{r} \sin \theta \\ A_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (13.129)$$

Utilizando el rotacional en coordenadas esféricas, multiplicando y dividiendo por  $jk$ , sacando factor común a  $(\sin \theta) \exp(-jkr)$  y operando queda la expresión para la intensidad de campo magnético de la forma siguiente,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_\varphi \frac{l I_o}{4\pi} k^2 (\sin \theta) \exp(-jkr) \left( \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \quad (13.130)$$

Vemos que el campo magnético es perpendicular la dirección de propagación. El término proporcional a  $1/r$  se ha obtenido a través de la derivada de la exponencial que tiene en cuenta la fase y esta tiene su origen en la corriente de desplazamiento.

*Campo eléctrico*

En este caso vamos a calcular el campo eléctrico aplicando la ecuación de Maxwell. Como el campo magnético sólo tiene componente  $\mathbf{u}_\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \frac{l I_o}{4\pi} \left\{ -\mathbf{u}_r \frac{k^2}{r} 2 \cos \theta \exp(-jkr) \left( \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{u}_\theta \frac{k^2}{r} (\sin \theta) \exp(-jkr) \left( -jk \left( \frac{1}{jk} + \frac{1}{r(jk)^2} \right) - \frac{1}{(jk)^2 r^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Sacando factor común  $jk$  en el numerador y operando, las componentes del campo eléctrico quedan de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{k^3}{\omega\epsilon_o} \frac{l I_o}{4\pi} 2 \cos \theta \exp(-jkr) \left( \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \\ E_\theta &= -\frac{k^3}{\omega\epsilon_o} \frac{l I_o}{4\pi} \sin \theta \exp(-jkr) \left( \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \end{aligned} \quad (11.131)$$

$$E_{\varphi} = 0$$

Las expresiones, tanto para el campo eléctrico como para el magnético, son complejas y la dependencia con respecto a la distancia  $r$  sugiere tres zonas distintas. 1ª Puntos muy alejados del dipolo conocida como **zona de radiación**; 2ª zona intermedia conocida como **zona de inducción** y 3ª muy próxima al dipolo denominada **zona cuasi-estática**.

#### *Zona de radiación*

Esta zona se corresponde con el término  $1/jkr$ . Se desprecian los demás términos por que se considera  $kr \gg 1$  y por tanto el cuadrado y cubo de su inversa es despreciable frente al primer término. Como  $k = \omega/c$ , en dicha aproximación influye la frecuencia de oscilación del dipolo; cuanto más baja sea la frecuencia menor será  $k$  y por tanto debe aumentar  $r$  para que se siga cumpliendo la condición indicada; es decir, la condición se cumple para puntos más alejados del dipolo.

Los campos en dicha zona serán,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\varphi} \frac{l I_o j k}{4\pi r} \exp(-jkr) (\text{sen } \theta) \quad (13.132)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\theta} \frac{1}{\omega \epsilon_o} \frac{l I_o j k^2}{4\pi r} \exp(-jkr) (\text{sen } \theta)$$

Si tenemos en cuenta que,

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_o \mu_o} \quad \text{y} \quad Z_o = \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2}$$

podemos expresar el campo eléctrico de la forma siguiente,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\theta} Z_o \frac{l I_o j k}{4\pi r} \exp(-jkr) (\text{sen } \theta) \quad (13.133)$$

Observamos que en la **zona de radiación** los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación y entre sí; además están en fase y la relación entre sus módulos es,

$$\frac{E_{\theta}}{H_{\varphi}} = Z_o \quad (13.134)$$

Esta relación nos permite expresar el campo eléctrico en función del magnético o a la inversa,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_o} \mathbf{u}_r \times \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = Z_o \mathbf{u}_r \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (13.135)$$

A la distribución espacial corresponde una fase que esta relacionada con la longitud de onda por la ecuación siguiente,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{f} \quad (13.136)$$

Las características que hemos enunciado son las mismas que vimos en el capítulo anterior para una onda plana en el vacío.

#### *Potencia radiada*

Para calcular la potencia radiada en esta zona obtenemos el valor medio del vector de Poynting y lo integramos sobre una esfera cuyo centro es el origen de coordenadas y radio  $r \gg l$ .

El valor medio del vector de Poynting será,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_\varphi \left( Z_o \frac{l I_o}{4\pi} \exp(-jkr) (\text{sen } \theta) \frac{jk}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{l I_o}{4\pi} (\text{sen } \theta) \exp(jkr) \frac{-jk}{r} \right) \right\} \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_r Z_o \left( \frac{l I_o}{4\pi} \right)^2 \frac{k^2}{r^2} \text{sen}^2 \theta \end{aligned} \quad (13.137)$$

Sobre la esfera  $d\mathbf{s} = r^2 \text{sen } \theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r$ , por tanto la potencia radiada es,

$$P = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r) Z_o \left( \frac{l I_o}{4\pi} \right)^2 \frac{k^2}{r^2} \text{sen}^2 \theta r^2 \text{sen } \theta d\theta d\varphi$$

Los límites de integración son:  $0, 2\pi$  para  $\varphi$ , y  $0, \pi$  para  $\theta$

$$P = \frac{1}{2} Z_o k^2 \left( \frac{l I_o}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \text{sen}^3 \theta d\theta$$

realizando operaciones queda,

$$P = \frac{1}{12\pi} Z_o k^2 (l I_o)^2 = \frac{1}{12\pi} \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} k^2 (l I_o)^2 \quad [\text{W}] \quad (13.138)$$

El resultado anterior nos muestra que la potencia radiada no depende de la distancia, siempre que se cumplan las aproximaciones que hemos utilizado y que la radiación se propague en el vacío o un medio no disipativo.

Por lo que hemos visto en este apartado el dipolo genera una onda que se propaga transportando un energía que no se atenúa si no la trasfiere

mediante una interacción con partículas cargadas o un medio material con pérdidas.

Para la radiación electromagnética el término que más nos interesa es el proporcional a  $1/r$ , ya que es el único que puede transmitir energía y por tanto información a puntos alejados del dipolo. Por esta razón en los próximos apartados sólo nos referiremos a él.

Además este término tiene su origen en la derivada de componente exponencial del potencial vector y este se debe a que en la ecuación de ondas interviene la derivada segunda con respecto al tiempo. A su vez dicha derivada figura en la ecuación de ondas como consecuencia de la corriente de desplazamiento introducida por Maxwell. Es decir, la generación y propagación de ondas, desde un punto de vista clásico, se pueden explicar mediante la aplicación de las ecuaciones de Maxwell. Su comprobación experimental por Hertz supuso la confirmación del modelo de comportamiento del campo electromagnético propuesto por Maxwell.

#### 13.1.9.1 Diagrama y resistencia de radiación

Como hemos visto en el apartado anterior los campos debidos a un dipolo oscilante constan de distintos términos y podemos dividir el espacio en dos zonas, una, la zona próxima al dipolo, donde intervienen los campos que no componen el término de radiación y llevan asociada una energía reactiva que fluctúa en función de la frecuencia de oscilación. La otra zona, conocida como zona de radiación, se caracteriza por que en ella sólo intervienen las componentes de los campos proporcionales a  $1/r$ . En lo que sigue nos vamos a referir únicamente a la zona de radiación ya que la contribución de los otros términos al campo radiado es despreciable.

Un dispositivo radiante como un dipolo elemental o un antena tiene unas propiedades que caracterizan sus cualidades para la radiación de un campo electromagnético. Las más destacadas son el **diagrama de radiación** y la **resistencia de radiación**.

##### *Diagrama de radiación*

Para tener una visión aproximada de como se distribuye la intensidad de campo en función de la orientación del dipolo o dispositivo que radia se representa la intensidad de campo. El **diagrama de radiación** consiste en un gráfico que representa las intensidades de campo radiado, para una distancia determinada, en función de la orientación del dipolo o dispositivo que genera el campo electromagnético en la zona de radiación.

A partir de los campos magnético y eléctrico dados por las ecuaciones

(13.132) y (13.133), podemos obtener su representación para una distancia determinada.

El campo eléctrico en función del ángulo  $\theta$  es proporcional a  $\sin \theta$ , su diagrama se indica en la figura 13.4. En dicha figura se representa un valor del campo normalizado, es decir, sólo se representa la función  $|\sin \theta|$ .

La figura 13.3 muestra una sección paralela al plano XZ, conocida como plano  $E$ . En la sección paralela al plano XY, conocido como plano  $H$ , las líneas de campo magnético son circunferencias con centro en el eje Z.

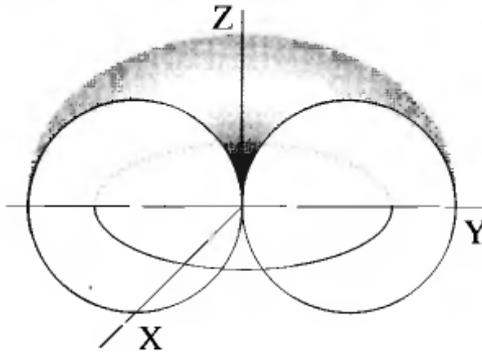


Figura 13.3

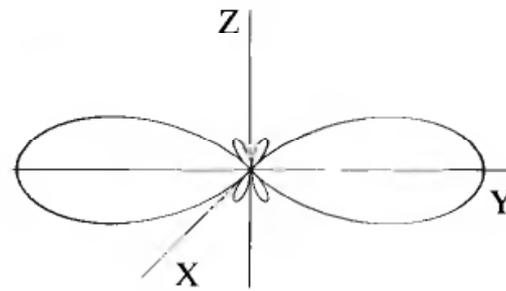


Figura 13.4

El diagrama de radiación de las antenas utilizadas en la práctica es más complicado que el de la figura 13.3 correspondiente a un dipolo elemental. La figura 13.4 representa una sección, plano  $E$ , del diagrama correspondiente a una antena lincal de longitud  $L = 7\lambda/6$ . En dicha figura vemos que existen dos **lóbulos principales** simétricos con respecto al eje Z y cuatro **lóbulos laterales** también simétricos con respecto al mismo eje.

En el análisis de las características de las antenas se tienen en cuenta unos parámetros que se derivan del diagrama de radiación. Aunque hay distintos parámetros, los que más se suelen utilizar son dos: El ángulo que abarca el lóbulo principal, también conocida como **anchura del haz**, que indica amplitud de la zona principal de radiación. Y el **nivel de los lóbulos laterales**. Para que la energía radiada se concentre en la dirección del eje del lóbulo principal es necesario que dichos niveles sean muy pequeños frente al lóbulo principal.

#### *Intensidad de la radiación*

También interesa conocer como se distribuye la potencia radiada en función de la orientación del dipolo o antena que radia. Para ello se introduce la **intensidad de radiación**. Esta magnitud se define a partir del valor medio del vector de Poynting; dicha **intensidad de radiación** se define como el valor medio de la potencia por unidad de ángulo sólido. Como a

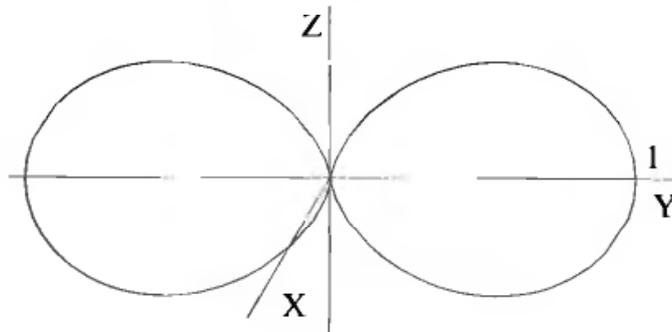
cada unidad de ángulo sólido le corresponde un área igual al cuadrado del radio de la esfera considerada, la intensidad será el valor medio del vector de Poynting por el cuadrado del radio,

$$I_R = \langle S \rangle r^2 \quad (13.139)$$

La intensidad se mide en vatios por estereorradián (W/sr).

Para los campos de un dipolo oscilante tomamos el módulo de la ecuación (13.137), por tanto la intensidad será,

$$I_R(\theta) = \frac{1}{2} Z_o k^2 \left( \frac{l I_o}{4\pi} \right)^2 \text{sen}^2\theta \quad (13.140)$$



**Figura 13.5**

En la figura 13.5 se muestra el diagrama de radiación correspondiente a la intensidad de radiación normalizada, representada por  $\text{sen}^2\theta$ . Este diagrama muestra que el lóbulo principal es más estrecho que el correspondiente al campo eléctrico. La intensidad, si no se disipa potencia en el medio por el que se propaga la radiación, es independiente de la distancia.

#### *Directividad*

Hasta ahora hemos hablado del diagrama de radiación, pero no hemos visto la forma de introducir un parámetro cuantitativo que nos de idea de la proporción entre la potencia transmitida en la dirección de los lóbulos laterales y la correspondiente la dirección del lóbulo principal. Interesa conocer la efectividad de una antena para transmitir la potencia radiada en la dirección del lóbulo principal. Para ello se introduce el parámetro conocido como **directividad**

Utilizamos la intensidad de radiación dada por la ecuación (13.140) y el valor medio de la potencia radiada a través de una esfera de radio  $r$ , que teniendo en cuenta la ecuación (13.138) es,

$$P = \oint_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{12\pi} Z_o k^2 (l I_o)^2 \quad (13.141)$$

La potencia media por estereorradián es  $P/4\pi$ .

La intensidad de radiación máxima corresponde a  $\theta = \pi/2$ , es decir,

$$(I_R)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} Z_o k^2 \left( \frac{l I_o}{4\pi} \right)^2 \quad (13.142)$$

Se define la **directividad** como la relación entre la intensidad máxima y la potencia media por estereorradián; en forma matemática,

$$D = \frac{(I_R)_{\text{máx}}}{P/4\pi} = \frac{4\pi(I_R)_{\text{máx}}}{P} \quad (13.143)$$

Esta expresión compara el valor máximo de la intensidad de la radiación emitida, que corresponde al lóbulo principal, con el valor medio de la potencia transmitida en todas las direcciones, intensidad media, que incluye la que se transmite en la dirección de los lóbulos laterales.

#### *Resistencia de radiación*

La potencia radiada por un dipolo o antena se mide a través de un parámetro conocido con **resistencia de radiación**. Dicho parámetro es la hipotética resistencia que disipa la potencia que radia el dipolo o antena, cuando la corriente en dicha resistencia es igual al máximo de la corriente que se suministra al dipolo o antena.

Si suponemos que en la antena no hay pérdidas de potencia por efecto Joule u otra causa, la potencia radiada por la antena será igual a la suministrada por un generador. Si el generador suministra una corriente  $i = I_o \cos \omega t$ , la potencia media suministrada es,

$$P_i = \frac{1}{2} R I_o^2$$

Si no hay pérdidas  $P_i = P$ , es decir, la potencia suministrada es igual a la radiada.

La **resistencia de radiación** será,

$$R = \frac{2P}{I_o^2} \quad (13.144)$$

Si la resistencia es muy grande quiere decir que la antena radia mucha energía.

En el caso de un dipolo oscilante, si tenemos en cuenta la ecuación (13.138),

$$R = \frac{1}{6\pi} Z_o k^2 l^2 \quad (13.145)$$

Como  $Z_o = 120\pi \Omega$ , y  $k = 2\pi/\lambda$ , sustituyendo tenemos,

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (13.146)$$

Para cualquier tipo de antena se obtiene la resistencia de radiación aplicando la ecuación (13.144) con los datos de potencia y corriente correspondientes a la antena considerada.

En el caso de las antenas que se utilizan en la práctica, la antena y su zona próxima contribuyen a la potencia, por un lado con la potencia reactiva debida a los campos no radiados de la zona próxima y por otro con las pérdidas óhmicas en los conductores que forman la antena. Esto lleva a que el generador que suministra potencia ve a la antena como una impedancia compleja  $Z_r = (R + R_p) + jX_r$ . Donde  $R$  es la resistencia de radiación,  $R_p$  es la resistencia debida a las pérdidas en los conductores que forman la antena y  $X_r$  corresponde a la energía reactiva.

### 13.1.10 ANTENA LINEAL

El dipolo elemental nos ha servido para introducir las ideas fundamentales sobre radiación electromagnética, pero dicho dipolo no es el dispositivo más adecuado para radiar un campo electromagnético de forma eficiente, ya que la potencia radiada es muy pequeña.

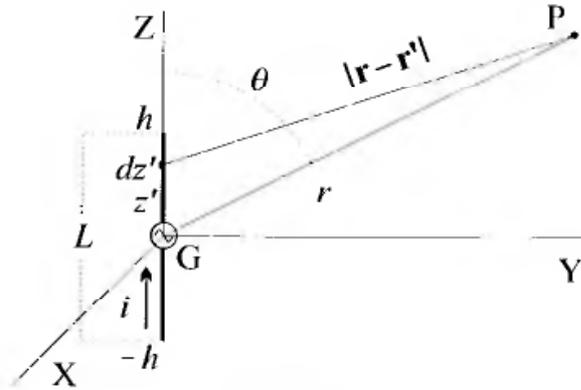
En la práctica se utilizan dispositivos más complejos y hay una gran variedad, dependiendo su diseño del uso al que se destina.

Una antena es un dispositivo, que cuando actúa como emisor, transforma una señal (onda) guiada que procede de un generador, en una señal que se propaga por el espacio abierto. Si opera como receptor transforma una señal que procede del espacio abierto en otra guiada que se aplica a un dispositivo electrónico que funciona como detector.

Aquí vamos a estudiar una antena sencilla conocida con el nombre **antena lineal**, formada por una varilla de longitud  $L$  como muestra la figura 13.6 y que se alimenta por su centro. Es decir, la forman dos varillas rectas de longitud  $h$  y un generador  $G$  que representa donde se aplican los terminales de un cable coaxial o línea de transmisión unida a un generador que está en un punto alejado de la antena.

La **antena lineal** se puede considerar como un conjunto de dipolos elementales unidos en serie, con la particularidad de que la corriente de

cada dipolo elemental depende de la corriente en cada punto de la antena lineal.



**Figura 13.6**

Si conocemos la distribución de corriente a lo largo de la antena podemos obtener los campos radiados mediante una integración de los campos debidos a los dipolos elementales situados en cada punto de la antena. La mayor dificultad está en conocer la distribución de corriente. Para una antena lineal formada por un buen conductor de sección despreciable frente a su longitud y alimentada por su parte central, sabemos que en sus extremos hay acumulación de carga y la corriente es nula; pero la determinación de la corriente en los puntos intermedios es un problema complejo, que hoy se resuelve mediante el uso de ordenadores con los programas de cálculo adecuados.

Aquí nos proponemos hacer un análisis que nos permita conocer las características más destacadas de una antena lineal. Para ello vamos a suponer una distribución de corriente, que sin ser la real, permita el análisis que nos proponemos. Suponemos que el generador suministra una corriente sinusoidal, por tanto sobre la antena se distribuirá una corriente que es nula en sus extremos. En estas condiciones una buena aproximación de dicha distribución es una corriente estacionaria cuya expresión matemática es la siguiente:

$$I(z') = I_o \operatorname{sen} k(h - |z'|) = \begin{cases} I_o \operatorname{sen} k(h - z') & \text{para } z' > 0 \\ I_o \operatorname{sen} k(h + z') & \text{para } z' < 0 \end{cases} \quad (13.147)$$

A cada punto de coordenada  $z'$  le corresponde un dipolo elemental de longitud  $dz'$  cuyos campos en puntos muy alejados de la antena se obtendrán aplicando las ecuaciones (13.132) y (13.133). En el caso del campo eléctrico, sustituyendo  $r$  por  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{r} - z'\mathbf{u}_z|$ , tenemos que,

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\theta Z_o \frac{1}{4\pi} \exp(-jk|\mathbf{r} - z'\mathbf{u}_z|) (\operatorname{sen} \theta) \frac{jk}{|\mathbf{r} - z'\mathbf{u}_z|} I_o \operatorname{sen} k(h - |z'|) dz'$$

Vamos a ver en primer lugar como se tiene en cuenta el efecto del módulo de la distancia al dipolo elemental.

$$|\mathbf{r} - z'\mathbf{u}_z| = (r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta)^{1/2} = r \left( 1 + \frac{z'^2}{r^2} - 2\frac{z'}{r} \cos \theta \right)^{1/2}$$

Para  $z' \ll r$  el término  $z'^2/r^2$  es despreciable frente a los demás. Los dos primeros términos del desarrollo de binomio nos dan,

$$\left( 1 - 2\frac{z'}{r} \cos \theta \right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{z'}{r} \cos \theta$$

por tanto, la forma aproximada de la distancia es,

$$|\mathbf{r} - z'\mathbf{u}_z| \simeq r \left( 1 - \frac{z'}{r} \cos \theta \right) = r - z' \cos \theta$$

En el denominador de la expresión del campo podemos incluso simplificar más su expresión, ya que para  $r \gg h$ ,  $r - z' \cos \theta \simeq r$ . Por ejemplo si  $h = 0,5$  m y  $r = 1000$  m el error cometido en la aproximación es muy pequeño; y estos datos son incluso más favorables en las aplicaciones reales.

Esta nueva aproximación no se puede hacer para el término que figura en el exponente, es decir, la fase, por que la corriente en cada punto de la antena es distinta y dicho exponente tiene en cuenta la contribución del dipolo en cada punto. Si despreciamos el término  $\exp(jkz' \cos \theta)$  es como si en un instante dado todos los dipolos elementales tuvieran la misma contribución en lugar de una proporcional a  $\cos(kz' \cos \theta)$  en cada punto.

Con las aproximaciones indicadas el campo será,

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\theta Z_o \frac{j}{4\pi r} \frac{k}{r} e^{-jkr} \exp(jkz' \cos \theta) (\sin \theta) I_o \sin k(h - |z'|) dz'$$

El módulo del campo se obtendrá integrando la expresión anterior entre  $-h$  y  $h$ ,

$$E_\theta = Z_o \frac{j}{4\pi r} \frac{k}{r} e^{-jkr} I_o (\sin \theta) \int_{-h}^h \exp(jkz' \cos \theta) \sin k(h - |z'|) dz'$$

Como  $\exp(jkz' \cos \theta) = \cos(kz' \cos \theta) + j \sin(kz' \cos \theta)$ ,

$$E_\theta = Z_o \frac{j I_o k \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \int_{-h}^h (\cos(kz' \cos \theta) + j \sin(kz' \cos \theta)) \sin k(h - |z'|) dz'$$

La función  $\sin k(h - |z'|)$  es par, es decir,  $\sin k(h - |z'|) = \sin k(h - |-z'|)$ , ya que  $|z'| = |-z'|$ . La función  $\sin(kz' \cos \theta)$  es impar,  $\sin(kz' \cos \theta) = -\sin(-kz' \cos \theta)$ , por tanto la integral,

$$\int_{-h}^h (j \sin(kz' \cos \theta)) \sin k(h - |z'|) dz' = 0$$

Es decir, la suma de los productos elementales entre 0 y  $h$  es de signo opuesto a la correspondiente a 0 y  $-h$  y por tanto la integral es nula.

El primer término de la integral es el producto de dos funciones pares, por tanto, no es nulo, y podemos expresarlo de la forma siguiente,

$$f(\theta) = 2 \int_0^h \cos(kz' \cos \theta) \operatorname{sen} k(h - |z'|) dz'$$

Teniendo en cuenta la relación trigonometría,

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B))$$

y sustituyendo en la integral queda,

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \cos^2 \theta} (2 \cos(kh \cos \theta) - 2 \cos(kh))$$

Operando,

$$f(\theta) = \frac{2}{k \operatorname{sen}^2 \theta} (\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh))$$

Llevando esta expresión al campo eléctrico queda de la forma,

$$E_\theta = Z_o \frac{j I_o}{2\pi r} e^{-jk r} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} (\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)) \quad (13.148)$$

o

$$E_\theta = Z_o \frac{j I_o}{2\pi r} e^{-jk r} F(\theta) \quad (13.149)$$

Donde la función  $F(\theta)$  es,

$$F(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} (\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)) \quad (13.150)$$

es la **función característica de radiación** que permite obtener los diagramas de radiación de las diferentes antenas lineales en función de la relación entre  $h$  y la longitud de onda  $\lambda$ . Además dicha función sirve para determinar la resistencia de radiación y la directividad.

### 13.1.10.1 Antena receptora

Una antena, cuando funciona como receptor, transforma una señal que se propaga por el espacio libre mediante un campo electromagnético en una señal guiada que se aplica a un detector. De otra forma, la potencia que transporta el campo electromagnético se transforma en corrientes y tensiones, que mediante una línea de transmisión se aplican a un detector; o capta el campo electromagnético y lo guía a un detector mediante una guía de ondas.

El circuito equivalente de una antena cuando funciona como emisor es un generador con su impedancia interna unida a una carga, que es la antena, cuya impedancia de entrada es  $Z_r = (R + R_p) + jX_r$ . Cuando funciona como

receptora la antena tiene un circuito equivalente formado por un generador con una impedancia  $Z_g$  que suministra potencia a un detector que funciona como impedancia de carga.

Cuando hemos tratado la antena lineal hemos visto la dificultad para conocer con precisión la distribución de corriente a lo largo de la antena. En el caso de que funcione como receptora su conocimiento es aún más difícil y además debemos suponer que dicha distribución no es la misma en un caso que en el otro. Aun con estas diferencias se puede demostrar, aplicando el teorema de reciprocidad,<sup>2</sup> que para una antena determinada el diagrama de radiación es el mismo en los dos casos, así como su directividad; la impedancia de entrada cuando funciona como emisor  $Z_r$  es igual a  $Z_g$  que es la impedancia interna del generador equivalente cuando funciona como receptor.

### 13.1.11 RADIACIÓN DE UN GRUPO DE CARGAS

Terminamos este capítulo con el análisis del campo electromagnético generado por un grupo de cargas en movimiento. La figura 13.7 muestra un esquema de dicho grupo. Para obtener los campos debidos a este sistema de cargas tenemos que especificar las condiciones que debe cumplir para que se puedan realizar las aproximaciones que permitan simplificar el cálculo. En primer lugar suponemos que la velocidad de las cargas es muy pequeña frente a la velocidad de la luz. Además se supone que el volumen  $V$  es pequeño de forma que las distancias entre sus puntos más alejados es muy pequeña comparada con la distancia al punto donde se observa el campo generado; la misma condición se cumple con respecto a la longitud de onda más larga de la radiación emitida. Como hemos supuesto en los demás apartados de este capítulo se considera que el sistema está en el vacío.

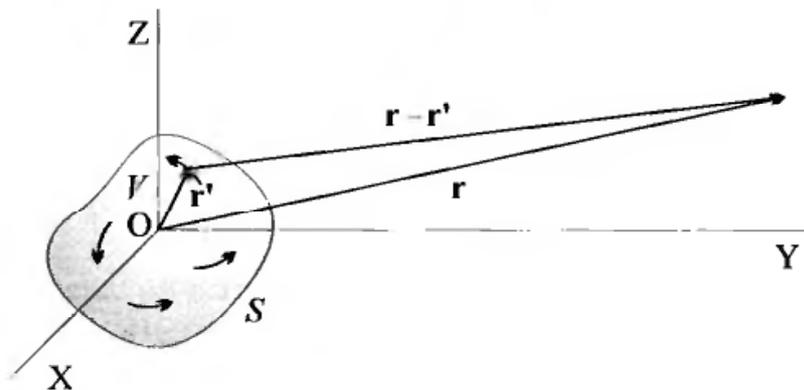


Figura 13.7

<sup>2</sup>Véase el libro de Cheng [2] apartado 11.6.1.

Calculamos el campo mediante los potenciales retardados dados por las ecuaciones,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

*Potencial escalar retardado*

En los dos figura una distancia  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  que debemos calcular de forma aproximada con las condiciones indicadas en el párrafo anterior, es decir, para  $r \gg r'$ .

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{1/2} = r \left( 1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{1/2}$$

Con la condición indicada,  $(r'/r)^2 \ll 1$

y por tanto se desprecia. Si desarrollamos el binomio y tomamos los dos primeros términos,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \left( 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{1/2} \simeq r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}$$

Con esta aproximación los potenciales se pueden expresar de la forma siguiente,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - (r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)/c)}{(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - (r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)/c)}{(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)} dv'$$

Todavía podemos realizar una nueva aproximación de la distancia pero separando los efectos, como hicimos en apartados anteriores, sobre el denominador y la fase. Realizando las aproximaciones correspondientes queda,

$$V(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ \int_{V'} \rho(\mathbf{r}', (t - r/c)) dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', (t - r/c)) dv' + \frac{\mathbf{r}}{rc} \cdot \frac{d}{dt} \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', (t - r/c)) dv' \right\}$$

Veamos que representa cada uno de los términos de la ecuación anterior.

$$\int_{V'} \rho(\mathbf{r}', (t - r/c)) dv' = Q \quad (13.151)$$

es la carga total del conjunto en el instante  $t$ , y como la carga se conserva  $Q$  es independiente del tiempo.

$$\int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', (t - r/c)) dv' = \mathbf{p}(t - r/c) = \mathbf{p}(t_o) \quad (13.152)$$

es el momento dipolar del conjunto de cargas en  $t_o = t - r/c$ .

El potencial escalar retardado, para puntos y longitudes de onda que cumplan la condiciones indicadas anteriormente, lo podemos expresar de la forma,

$$V(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{p}(t_o) + \frac{\mathbf{r}}{r^2 c} \cdot \frac{d\mathbf{p}(t_o)}{dt} \right\} \quad (13.153)$$

Los dos primeros términos tienen la misma forma que los términos monopolar y dipolar obtenidos en electrostática, con la diferencia de que ahora dependen del tiempo. El otro término aparece aquí como consecuencia del retraso o tiempo que tarda en llegar una perturbación electromagnética desde el punto origen hasta el de observación.

#### *Potencial vector retardado*

Para calcular el potencial vector magnético procedemos de forma análoga al caso anterior con respecto a  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  y

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', (t - \frac{r}{c} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc})) = \mathbf{J}(\mathbf{r}', (t - \frac{r}{c})) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{J} \right)_{\mathbf{r}', t_o} + \dots$$

Para obtener los términos equiparables al potencial escalar es suficiente utilizar, en el potencial vector, el primer término del desarrollo y tomar  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \simeq r^{-1}$ . Con esta aproximación,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_o)}{r} dv' \quad (13.154)$$

Podemos expresar el potencial vector en función del momento dipolar  $\mathbf{p}$ . Para ello se puede demostrar que se cumple la siguiente relación,

$$\int_V \mathbf{J} dv' = \int_V \frac{d}{dt} (\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_o)) dv' = \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt}$$

El potencial vector se expresa en función del momento dipolar de la forma siguiente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi r} \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt} \quad (13.155)$$

Vemos que dicho potencial, en su primer término del desarrollo, es de un orden equivalente al tercer término que hemos visto en el potencial escalar, por esta razón en la primera aproximación sólo se incluyen dichos términos.

*Campos eléctrico y magnético*

Mediante los potenciales obtenidos y aplicando las relaciones siguientes,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

calculamos los campos magnético y eléctrico.

*Campo magnético*

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left( \frac{\mu_o}{4\pi r} \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt} \right)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{1}{r} \nabla \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{r} \nabla \times \dot{\mathbf{p}}$$

Como  $\mathbf{p}(t - r/c)$  sólo depende de  $r$ ,  $\nabla \times \dot{\mathbf{p}}$  es perpendicular a  $\dot{\mathbf{p}}$  y a  $\mathbf{r}$ .

$$\frac{1}{r} \nabla \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r}$$

Además,

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$$

por tanto,

$$\nabla \times \left( \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{1}{r^2 c} \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2}$$

Si tenemos en cuenta sólo la **zona de radiación**, la intensidad de campo magnético se obtiene con el segundo término, es decir,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = -\frac{1}{4\pi r^2 c} \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{p}(t - r/c)}{dt^2} \quad (13.156)$$

*Campo eléctrico*

Nos limitaremos a calcular los términos de la **zona de radiación** del campo eléctrico, por tanto,

$$\mathbf{E} = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_o r^2 c} \frac{d\mathbf{p}(t_o)}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_o}{4\pi r} \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt}$$

Como sólo depende de la coordenada  $r$  y de  $t$ , el campo eléctrico será,

$$\mathbf{E} \simeq \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3 c^2} \frac{d^2 \mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt^2} \right) \mathbf{r} - \frac{\mu_o}{4\pi r} \frac{d^2 \mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt^2}$$

Si multiplicamos y dividimos el segundo término por  $\epsilon_o$  y tenemos en cuenta que  $c^2 = 1/\epsilon_o \mu_o$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi \epsilon_o c^2} \left\{ \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{d^2 \mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt^2} \right) \mathbf{r} - \frac{r^2}{r^3} \frac{d^2 \mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt^2} \right\}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial doble, la relación anterior se puede expresar de la siguiente forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{p}(\mathbf{r}', t_o)}{dt^2} \right) \quad (13.157)$$

Observando esta ecuación y la del campo magnético vemos que,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (13.158)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{1/2} \frac{1}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{1/2} \mathbf{u}_r \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (13.159)$$

Volvemos a encontrar que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación.

En la aproximación que hemos establecido se obtienen los campos en función del momento dipolar; si en un sistema de cargas se anula dicho momento o su derivada segunda, tendremos que utilizar términos de orden superior para obtener el campo radiado, tales como los términos derivados del momento magnético, momento cuadrupolar eléctrico etc. Los términos de orden superior decrecen con la distancia más que el dipolar, por esta razón, cuando no es nulo, predomina sobre los demás y como consecuencia se desprecian los otros términos.

### 13.1.11.1 Potencia radiada

Una vez obtenidos los campos, podemos calcular el vector de Poynting y la potencia radiada.

El vector de Poynting se obtiene aplicando su ecuación de definición.

$$\mathbf{S} = -\left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{1/2} \mathbf{u}_r \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{1/2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{u}_r \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

Aplicando la relación del producto vectorial doble,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

y que  $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$ ,

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{1/2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{u}_r = \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{1/2} H^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (13.160)$$

Sustituyendo el valor de  $H$ ,

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{1/2} \frac{1}{16\pi^2 r^4 c^2} \left( \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{p}(t - r/c)}{dt^2} \right)^2 \mathbf{u}_r \quad (13.161)$$

Si suponemos que  $\ddot{\mathbf{p}}$  tiene la orientación del eje  $Z$ ,  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}} = r \ddot{p} \text{sen} \theta$ , y el vector de Poynting queda de la siguiente forma,

$$\mathbf{S} = \left( \frac{\mu_o}{\varepsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\ddot{p}^2 \text{sen}^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c^2} \mathbf{u}_r \quad (13.162)$$

Como en el caso del dipolo elemental, la máxima potencia por unidad de superficie se radia en la dirección del plano XY, es decir, para  $\theta = \pi/2$ .

*Potencia radiada*

Obtenemos la potencia total radiada por el conjunto de cargas en movimiento integrando el vector de Poynting sobre una superficie esférica de centro en el origen de coordenadas y radio muy grande para que sólo intervengas los campos en la zona de radiación. Para esta superficie  $d\mathbf{s} = r^2 \text{sen} \theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r$ , y los límites de integración: de 0 a  $2\pi$  para  $\varphi$  y 0 a  $\pi$  para  $\theta$ .

$$P = \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \left( \frac{\mu_o}{\varepsilon_o} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\ddot{p}^2 \text{sen}^2 \theta}{16\pi^2 c^2} \text{sen} \theta d\theta (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r)$$

Realizando operaciones queda,

$$P = \left( \frac{\mu_o}{\varepsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\ddot{p}^2}{6\pi c^2} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{4\pi \varepsilon_o c^3} \quad (13.163)$$

Vemos que la potencia radiada depende del cuadrado de la derivada segunda del momento dipolar del grupo de cargas que se mueven con velocidades mucho menores que la velocidad de la luz  $c$ .

## 13.2 PROBLEMAS

### PROBLEMA 13.1

En el vacío, debido a las fuerzas de repulsión electrostática, se dispersa una distribución de carga de simetría esférica  $\rho(r, t)$ .

Calcular las corrientes de conducción y desplazamiento sobre los puntos de una esfera de radio  $a$  y centro coincidente con el de simetría de la distribución de carga.

#### Solución

La corriente de conducción  $\mathbf{J}_c$  viene dada por la ecuación de continuidad (13.5), que, en su forma integral es:

$$\int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(r, t) dv$$

donde  $V$  es, dada la simetría de la distribución, el volumen de la esfera de radio  $a$ , y  $S$  la superficie que lo limita. Por tanto  $dv = 4\pi r^2 dr$  y  $d\mathbf{s} = a^2 d\Omega \mathbf{u}_r$  ( $d\Omega$  es la diferencial de ángulo sólido cuyo vértice es el centro de la esfera de radio  $a$ ). También, dada la simetría del sistema, podemos suponer que  $\mathbf{J}_c$  es constante sobre una superficie esférica, y en cada punto de la misma tiene la dirección y sentido de  $\mathbf{u}_r$ . Luego,

$$\int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} = 4\pi a^2 J_c$$

Por otro lado,

$$\int_V \rho(r, t) dv = 4\pi \int_0^a \rho(r, t) r^2 dr$$

Sustituyendo y despejando,

$$\mathbf{J}_c = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^a \rho(r, t) r^2 dr \right) \mathbf{u}_r$$

La integral representa, salvo un factor  $4\pi$ , la carga total encerrada. Mientras la distribución no se expanda hasta la distancia  $a$ , la carga total permanece constante (puesto que no hay ningún proceso físico que genere carga neta) y, por tanto  $\mathbf{J}_c = 0$ . Una vez que llega al límite  $a$ , la carga fluye fuera de la frontera establecida y se observaría una  $\mathbf{J}_c \neq 0$  a través de ella.

La corriente de desplazamiento viene dada por,

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

El vector  $\mathbf{D}$  lo calculamos mediante el teorema de Gauss, aplicando las simplificaciones que permite la simetría.

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho(r, t) dv$$

Por un lado,

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi a^2 D$$

y por otro

$$\int_V \rho(r, t) dv = 4\pi \int_0^a \rho(r, t) r^2 dr$$

Luego,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{a^2} \left( \int_0^a \rho(r, t) r^2 dr \right) \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^a \rho(r, t) r^2 dr \right) \mathbf{u}_r$$

Comparando los valores obtenidos para las corrientes de conducción y desplazamiento, podemos observar que tienen el mismo módulo pero sentido opuesto,  $\mathbf{J}_c = -\mathbf{J}_d$ . La consecuencia principal es que la suma de las dos corrientes es nula en cualquier punto, por tanto el campo magnético será nulo.

### PROBLEMA 13.2

Tenemos un condensador esférico como el indicado en la figura P13.2. Entre las capas conductoras existe un material de permitividad  $\varepsilon$  y conductividad  $\gamma$ . que permite la descarga del condensador a través del medio. Consideramos el condensador inicialmente con una carga  $Q_0$ .

1) Calcular las densidades de corriente de conducción y desplazamiento en el espacio entre capas esféricas.

2) ¿Existe campo magnético entre dichas placas?

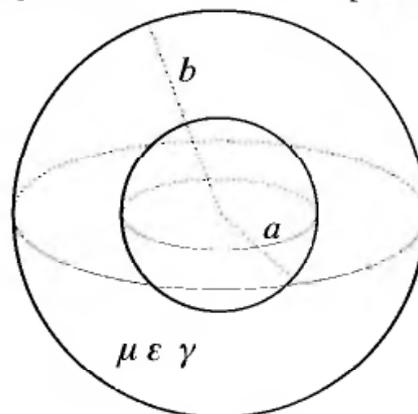


Figura P13.2

**Solución***1) Densidades de corriente*

Debido a la conductividad del medio entre capas el condensador se descarga. La carga  $Q(t)$  en cada instante y la corriente  $\mathbf{J}$  sobre los puntos de una superficie esférica de radio  $r$  ( $a < r < b$ ) se calcula mediante la ecuación de continuidad (13.5) y el teorema de Gauss ecuación (13.1), además de las ecuaciones constitutivas  $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ .

La simetría de las distribuciones es esférica. Sobre la superficie esférica de radio  $r$ ,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 J_r = 4\pi r^2 \gamma E_r = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad (13.2.1)$$

Del teorema de Gauss y la relación  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$  se deduce que,

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 D_r = 4\pi r^2 \varepsilon E_r = Q(t) \quad (13.2.2)$$

Despejando  $E_r$  en la segunda ecuación y llevándolo a la primera obtenemos la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} Q(t)$$

La solución de esta ecuación diferencial es,

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} dt \rightarrow Q(t) = C e^{-(\gamma/\varepsilon)t} = C \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

La constante  $C$  se determina imponiendo la condición inicial, es decir, para  $t = 0$   $Q(0) = Q_0$ . Por tanto,

$$Q(t) = Q_0 e^{-(\gamma/\varepsilon)t} = Q_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

Con esta carga y la forma integral de la ecuación de continuidad determinamos  $\mathbf{J}$  sobre la superficie esférica de radio  $r$ .

$$4\pi r^2 J_r = -\frac{dQ(t)}{dt} = Q_0 \frac{\gamma}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{u}_r \frac{1}{4\pi r^2} Q_0 \frac{\gamma}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

Mediante la ecuación (13.2.2) obtenemos el vector  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D} = \mathbf{u}_r \frac{1}{4\pi r^2} Q_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

La corriente de desplazamiento será,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\mathbf{u}_r \frac{1}{4\pi r^2} Q_0 \frac{\gamma}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

Vemos que la corriente de desplazamiento y la de conducción tienen el mismo módulo y dirección pero sentidos opuestos.

La corriente total, desplazamiento más conducción, es nula.

2) El campo magnético es nulo dado que la suma de las corrientes de conducción y desplazamiento es cero.

Podemos demostrar que el campo magnético es nulo de la forma siguiente:

Dada la simetría esférica de la distribución de cargas, el campo eléctrico es radial,  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r$ , por tanto  $E_\theta = E_\varphi = 0$ .

Mediante la ecuación (13.2), calculando el rotacional en coordenadas esféricas, como solo  $E_r \neq 0$ , obtenemos,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \mathbf{u}_\varphi = 0$$

Es nulo por que  $E_r$  no depende de  $\theta$  ni de  $\varphi$ .

De

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Como para  $t = \infty$  la corriente es cero  $\mathbf{B}$  será nulo; dado que la derivada de  $\mathbf{B}$  con respecto al tiempo es nula, se deduce que  $\mathbf{B} = 0$  en cualquier instante.

### PROBLEMA 13.3

Disponemos de un cable coaxial indefinido, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ . El material entre conductores tiene permitividad  $\epsilon_0$ , conductividad  $\gamma$  y permeabilidad  $\mu_0$ .

Inicialmente sobre el conductor central existe una densidad de carga superficial  $\sigma$ .

Calcular las densidades de corriente  $\mathbf{J}$  y  $(\partial \mathbf{D} / \partial t)$ .

¿Existe un campo magnético debido a las corrientes anteriores?

#### Solución

La densidad de corriente  $\mathbf{J}$  se obtiene mediante la ecuación de continuidad (13.5) en forma integral. En este problema la simetría es cilíndrica y obtenemos la corriente para una longitud  $l$  del cable.

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi \rho l J_\rho; -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_v dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \sigma ds = -2\pi a l \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Igualando los dos términos de la ecuación de continuidad obtenidos anteriormente determinamos  $\mathbf{J}$ ,

$$J_\rho = -\frac{a}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \rightarrow \mathbf{J} = -\frac{a}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \mathbf{u}_\rho$$

Procediendo en forma análoga al problema anterior se obtiene  $\sigma$ .

De

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \varepsilon_o \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma ds$$

$$\varepsilon_o 2\pi \rho l E_\rho = 2\pi a l \sigma$$

Despejando  $E_\rho$

$$E_\rho = \frac{1}{\varepsilon_o} \frac{a}{\rho} \sigma$$

Como  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ ,

$$J_\rho = \frac{\gamma}{\varepsilon_o} \frac{a}{\rho} \sigma$$

la ecuación diferencial para  $\sigma$  es:

$$-\frac{a}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\gamma}{\varepsilon_o} \frac{a}{\rho} \sigma \rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_o} \sigma$$

y su solución es de la forma,

$$\sigma = \sigma_o \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon_o} t\right)$$

Sustituyendo este valor de  $\sigma$  en la expresión para la corriente queda,

$$\mathbf{J} = \frac{a}{\rho} \frac{\gamma}{\varepsilon_o} \sigma_o \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon_o} t\right) \mathbf{u}_\rho$$

La corriente de desplazamiento se obtiene a partir de la ecuación constitutiva  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ .

$$D_\rho = \varepsilon_o E_\rho = \frac{a}{\rho} \sigma$$

$$\mathbf{D} = \frac{a}{\rho} \sigma \mathbf{u}_\rho = \frac{a}{\rho} \sigma_o \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon_o} t\right) \mathbf{u}_\rho$$

La corriente de desplazamiento, sustituyendo  $\sigma$  como en el caso anterior, será,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{a}{\rho} \frac{\gamma}{\varepsilon_o} \sigma_o \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon_o} t\right) \mathbf{u}_\rho$$

Podemos comprobar que las dos corrientes son del mismo módulo y signo opuesto.

Dado que las dos corrientes son de signo opuesto,  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , es decir la circulación de  $\mathbf{H}$  sobre cualquier camino cerrado es nula, de donde se deduce que  $\mathbf{H} = 0$ .

#### PROBLEMA 13.4

Por un cilindro indefinido, de radio  $a$  y conductividad  $\sigma$ , circula una corriente cuya densidad es  $\mathbf{J} = J(\rho/a) \mathbf{u}_z$ .

- 1) Calcular el vector de Poynting en función de  $\rho$ , para  $\rho \leq a$ .
- 2) Obtener el flujo del vector de Poynting en  $\rho = a$ .

### Solución

#### 1) Vector de Poynting

El vector de Poynting está definido por la ecuación (13.37). Para determinarlo en este problema debemos calcular  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ .  $\mathbf{E}$  se obtiene considerando la ecuación constitutiva  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  mediante la aplicación del teorema de Ampère.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = J \frac{\rho}{a} \frac{1}{\gamma} \mathbf{u}_z \quad (13.4.1)$$

La aplicación del teorema de Ampère, dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, produce la relación siguiente para  $\rho \leq a$ ,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ; \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\rho J \frac{\rho}{a} 2\pi \rho d\rho = 2\pi J \frac{\rho^3}{3a}$$

Igualando las dos relaciones anteriores obtenemos el campo  $\mathbf{H}$  para  $\rho \leq a$ ,

$$2\pi \rho H_\varphi = 2\pi J \frac{\rho^3}{3a} \rightarrow H_\varphi = J \frac{\rho^2}{3a}$$

$$\mathbf{H} = J \frac{\rho^2}{3a} \mathbf{u}_\varphi \quad (13.4.2)$$

Utilizando los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  anteriores, el vector de Poynting será,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{1}{\gamma} J^2 \frac{\rho^3}{3a^2} \mathbf{u}_\rho$$

#### 2) Flujo del vector de Poynting

El flujo del vector de Poynting en la superficie cilíndrica de radio  $a$  se obtiene de la forma siguiente:

En  $\rho = a$  el vector de Poynting es,

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{3\gamma} J^2 a \mathbf{u}_\rho$$

El flujo sobre la superficie cilíndrica de radio  $a$  y altura  $l$  será,

$$\text{FLUJO} = \mathbf{S} \cdot (2\pi a l) \mathbf{u}_\rho = \frac{2\pi l}{3\gamma} J^2 a^2$$

El flujo de dirige hacia el interior del cilindro.

### PROBLEMA 13.5

A través de dos placas conductoras planoparalelas, dispuestas como indica la figura P13.5.1, se transmite una corriente  $I$  a la resistencia  $R_c$ .

En el cálculo de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  suponemos que las placas son indefinidas y están respectivamente a los potenciales 0 y  $V_0$ . Además la densidad de corriente superficial es uniforme  $\mathbf{K} = I/l$ .

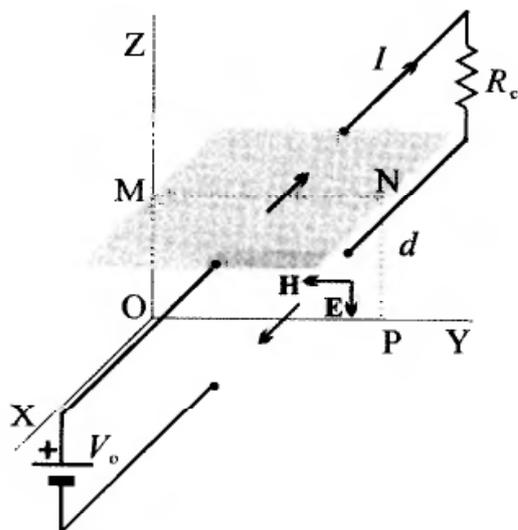
Calcular el flujo del vector de Poynting a través del rectángulo transversal MNPQ.  $MN = l$  y  $NP = d$ .

**Solución**

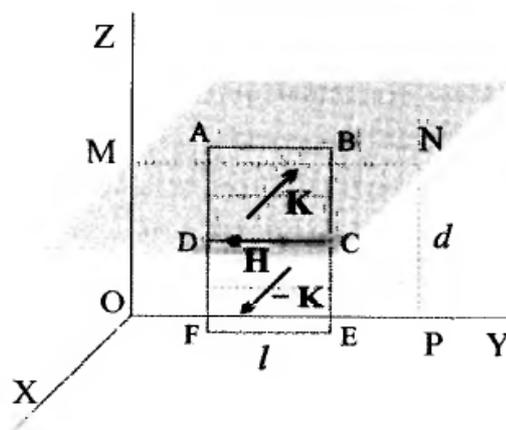
En primer lugar se calculan los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  para después obtener el vector de Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

Entre dos placas conductoras indefinidas, cuya diferencia de potencial es  $V_0$ , el campo eléctrico será:

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{h} \mathbf{u}_z \tag{13.5.1}$$



**Figura P13.5.1**



**Figura P13.5.2**

Para obtener  $\mathbf{H}$  aplicamos el teorema de Ampère a los caminos ABCD, DCEF y ABEF indicados en la figura P13.5.2.

$$\oint_{ABEF} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{K} - \mathbf{K})l = 0$$

$$\oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_y BA + H_y DC = K |AB| = Kl$$

$$\oint_{DCEF} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H'_y DC + H'_y EF = K |DC| = Kl$$

De la primera integral se deduce que el campo fuera de las placas es nulo.

Si fuera es nulo, dentro de las placas las otras dos expresiones muestran que,

$$\mathbf{H} = -K \mathbf{u}_y \quad (13.5.2)$$

Mediante las expresiones (13.5.1) y (13.5.2) obtenemos el vector de Poynting,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{V_o}{h} K (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y) = -\frac{V_o}{h} K \mathbf{u}_x$$

Sustituyendo  $K = I/l$  queda,

$$\mathbf{S} = -\frac{V_o I}{hl} \mathbf{u}_x$$

El flujo del vector de Poynting a través del rectángulo MNPQ es:

$$\text{FLUJO} = \mathbf{S} \cdot (lh)(-\mathbf{u}_x) = V_o I$$

El FLUJO es igual a la potencia transmitida a la resistencia  $R_c$ .

Según la teoría de circuitos dicha potencia es  $VI_o$ , que coincide con el flujo del vector de Poynting obtenido.

### PROBLEMA 13.6

Un condensador de capacidad  $C$  está formado por dos placas circulares de radio  $a$  separadas por una distancia  $d$  como indica la figura P13.6.1. Se carga a través de una resistencia  $R$  mediante un voltaje en forma de escalón. La corriente resultante es:

$$i = \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \text{ y la carga } q = \int i dt$$

Se desprecian los efectos de borde en el condensador.

Calcular el flujo del vector de Poynting a través de la superficie cilíndrica de radio  $a$  y altura  $h$  en función del tiempo.

**Solución**

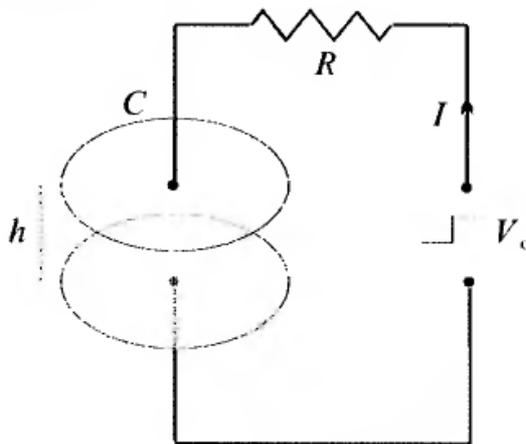


Figura P13.6.1

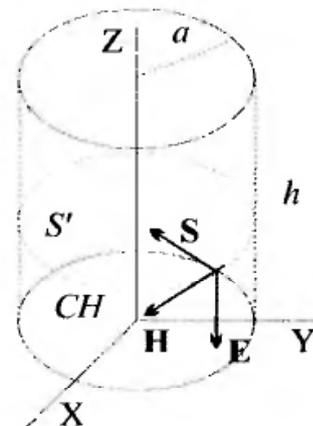


Figura P13.6.2

El flujo del vector de Poynting se obtiene integrando el vector  $\mathbf{S}$  dado por la ecuación (13.37) sobre la superficie lateral del cilindro de radio  $a$  y altura  $h$ .

Calculamos el vector  $\mathbf{D}$  entre las placas del condensador teniendo en cuenta que despreciamos los efectos de borde, es decir,

$$D = \sigma = \frac{q}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^t i dt = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^t \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt$$

Integrando y considerando que  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon E \mathbf{u}_z$ ,

$$\mathbf{E} = -\frac{V_o C}{\varepsilon \pi a^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \mathbf{u}_z \quad (13.6.1)$$

En la figura P13.6.2 se muestra el vector  $\mathbf{E}$  sobre la superficie cilíndrica de radio  $a$ .

El vector  $\mathbf{H}$  se calcula aplicando la ecuación de Maxwell en forma integral para la circulación de  $\mathbf{H}$ , ecuación (13.16).

El contorno de integración entre las placas del condensador donde se desea calcular  $\mathbf{H}$  es el indicado en la figura P13.6.2 como  $CH$ ; la superficie limitada por  $CH$  es  $S'$ . Sobre cualquier punto de la superficie  $S'$  la densidad de corriente de conducción  $J = 0$ , ya que suponemos un dieléctrico de conductividad nula.

La corriente de desplazamiento será:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{V_o}{R \pi a^2} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \mathbf{u}_z$$

Con los datos anteriores la ecuación (13.16) queda de la forma,

$$\oint_{C'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -H_\varphi 2\pi a ; \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Igualando los dos términos anteriores obtenemos  $\mathbf{H}$ ,

$$\mathbf{H} = -H_\varphi \mathbf{u}_\varphi = -\frac{V_o}{R 2\pi a} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \mathbf{u}_\varphi \quad (13.6.2)$$

Utilizando los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  calculados podemos obtener el vector de Poynting  $\mathbf{S}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} &= \frac{V_o C}{\varepsilon \pi a^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \frac{V_o}{R 2\pi a} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{S} &= -\frac{V_o^2 C}{\varepsilon 2\pi^2 a^3 R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \mathbf{u}_\rho \end{aligned}$$

El flujo de  $\mathbf{S}$  sobre la superficie lateral del cilindro de radio  $a$  está dirigido hacia el interior del cilindro y es,

$$\text{FLUJO} = \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = S(2\pi ah)$$

$$\text{FLUJO} = \frac{V_o^2 C h}{\varepsilon \pi a^2 R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

La integración del flujo entre 0 e  $\infty$  será,

$$\int_0^\infty \frac{V_o^2 C h}{\varepsilon \pi a^2 R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) dt = \frac{1}{2} C^2 V_o^2 \frac{h}{\varepsilon \pi a^2}$$

La capacidad  $C = \varepsilon(\pi a^2/h)$ . Llevando este valor a la expresión anterior obtenemos la energía transmitida al condensador en el proceso de carga,

$$W = \frac{1}{2} C V_o^2$$

que es la energía del condensador cargado a un potencial  $V_o$ .

### PROBLEMA 13.7

Disponemos de un solenoide de radio  $b$ , con  $n$  espiras por unidad de longitud por las que circula una corriente  $I$ . Concéntrica con el solenoide disponemos una varilla metálica de radio  $a$  como indica la figura P13.7.1; sobre ella se distribuye una densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$ . La varilla está sujeta sobre unos pivotes que la permiten girar libremente sobre su eje.

Suponemos que solenoide y varilla son muy largos, de forma que en los cálculos se consideran indefinidos.

1) Calcular el vector de Poynting y el momento electromagnético en el cilindro de radio  $b$  y altura  $h$ .

2) Si en un instante dado descargamos la varilla, ¿se mantendrá en reposo o girará la varilla?

#### Solución

1) *Vector de Poynting*

Calculamos el vector de Poynting y el momento electromagnético mediante las ecuaciones (13.37) y (13.42). En primer lugar debemos calcular los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ .

El campo eléctrico debido a una distribución superficial  $\sigma$  sobre el cilindro de radio  $a$  y eje Z, se obtiene aplicando el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de radio  $\rho$  y el mismo eje. Suponemos que los cilindros son indefinidos.

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi\rho h E_\rho ; \quad \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{S_c} \sigma ds = \sigma \frac{2\pi a h}{\varepsilon_o}$$

Igualando las dos expresiones anteriores se obtiene,

$$E_r = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \rho} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \rho} \mathbf{u}_\rho \quad (13.7.1)$$

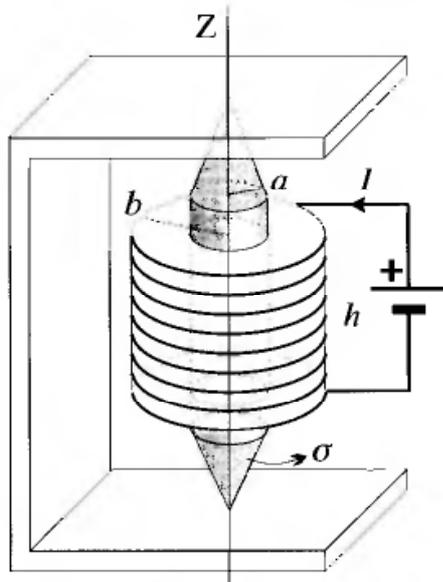


Figura P13.7.1

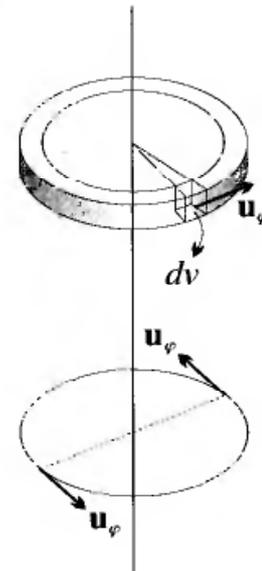


Figura P13.7.2

El campo eléctrico dentro de la varilla ( $\rho < a$ ) es nulo.

En el interior de un solenoide indefinido, como hemos visto en el capítulo 10, problema 10.2, el campo  $\mathbf{H}$  es,

$$\mathbf{H} = n I \mathbf{u}_z \quad (13.7.2)$$

Fuera del solenoide, si  $n$  es muy grande, podemos considerar que el campo creado por el circuito que forman solenoide y cables de conexión es despreciable comparado con el anterior.

El vector de Poynting será,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \rho} n I (\mathbf{u}_\rho \times \mathbf{u}_z) = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0 \rho} n I \mathbf{u}_\phi$$

La energía electromagnética fluye en forma circular en la zona entre varilla y solenoide, por tanto la densidad de momento electromagnético  $\mathbf{g}$  también será circular, ya que,

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

El momento electromagnético total, si observamos la figura P13.7.2, y tenemos en cuenta la ecuación (13.42) es,

$$\mathbf{p}_e = \int_{V=\infty} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} dv \simeq - \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_0^h \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \rho} n I \mathbf{u}_\phi \rho d\phi d\rho dz$$

Se integra entre  $a$  y  $b$  por que el campo dentro de la varilla es nulo. La integral anterior es nula por que se suman vectores que se cierran formando una circunferencia. En consecuencia,

$$\mathbf{p}_e = 0$$

2) Como hay una densidad de momento electromagnético, tendremos una densidad de momento angular dada por la ecuación (13.44). Dicha densidad es:

$$\vec{L} = \mathbf{L} = \epsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \rho n I (\mathbf{u}_\rho \times \mathbf{u}_\varphi)$$

$$\mathbf{L} = -\mu_0 \sigma a n I \mathbf{u}_z$$

Se calcula la integral sobre el volumen del tubo cilíndrico entre solenoide y varilla,

$$\mathbf{L}_T = - \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_0^h \mu_0 \sigma a n I \mathbf{u}_z \rho d\varphi d\rho dz$$

Como todos los vectores elementales tienen la dirección y sentido de  $\mathbf{u}_z$ ; la integral anterior queda de la forma,

$$\mathbf{L}_T = -\mu_0 \sigma \pi a h n I (b^2 - a^2) \mathbf{u}_z$$

Cuando se descarga la varilla el campo eléctrico se anula y en consecuencia  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{L}_T$ . La conservación del momento angular total incluye el mecánico y electromagnético, por tanto,

$$\mathbf{L}_T + \mathbf{L}_{mi} = \mathbf{L}_{Tf} + \mathbf{L}_{mf}$$

Como el momento angular mecánico inicial ( $\mathbf{L}_{mi}$ ) y el electromagnético final ( $\mathbf{L}_{Tf}$ ) son nulos, ( $\mathbf{L}_{mi} = \mathbf{L}_{Tf} = 0$ ), se deduce que,

$$\mathbf{L}_T = \mathbf{L}_{mf}$$

Lo que permite deducir que si se anula el electromagnético aparecerá un momento mecánico igual al electromagnético; es decir, dado que el único elemento que se puede mover libremente es la varilla, esta girará sobre los pivotes en sentido horario.

### PROBLEMA 13.8

Una onda electromagnética (OE) plana polarizada linealmente se propaga en la dirección  $z > 0$ . El campo eléctrico es de la forma  $\mathbf{E}(z, t) = E(z, t)\mathbf{u}_x$ . Las constantes del medio son:  $\epsilon = 16\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  y  $\gamma = 0$ . La OE es sinusoidal y su frecuencia  $f = 10^8$  Hz.

En el instante  $t = (1/12)10^{-8}$  s. se observa que existe un máximo de 10 V/m en  $z = 0,25$  m.

1) Expresar el campo en función de  $z$ ,  $t$  y la fase  $\theta$ .

2) Calcular la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ .

**Solución**

1) *Campo eléctrico*

La forma del campo viene dada por la ecuación (13.61). La constante de propagación se determina mediante la ecuación (13.62).

En este problema la forma del campo eléctrico es,

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}(E_o \exp(j\omega t - kz + \theta)) \mathbf{u}_z = E_o \cos(\omega t - kz + \theta) \mathbf{u}_z$$

La constante de propagación  $k$  es,

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = 2\pi \times 10^8 \frac{1}{c} \sqrt{16} = \frac{8\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{8\pi}{3}$$

Para determinar el desfase  $\theta$  utilizamos la observación de un máximo en  $z = 0,25$  m cuando  $t = (1/12)10^{-8}$  s. En un máximo el coseno debe ser igual a uno, por tanto,

$$2\pi \times 10^8 \frac{1}{12} 10^{-8} - \frac{8\pi}{3} 0,25 + \theta = 0$$

de donde se deduce que  $\theta = \pi/2$

La amplitud del campo es  $E_o = 10$  V/m. El campo  $\mathbf{E}$  será,

$$\mathbf{E} = 10 \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{3} z + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u}_z$$

2) *Campo  $\mathbf{H}$*

La intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$  se determina mediante la ecuación (13.67). En este problema  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$  y,

$$\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} = \left(\frac{16\epsilon_o}{\mu_o}\right)^{1/2} \simeq 1,062 \times 10^{-2}$$

por tanto, como  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y$ ,

$$\mathbf{H} = 1,062 \times 10^{-1} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{3} z + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u}_y$$

**PROBLEMA 13.9**

Una onda electromagnética plana, polarizada linealmente, se propaga en el vacío y en la dirección del eje Y, hacia  $y > 0$ . Disponemos una espira rectangular de lados  $a$  y  $b$ , ( $b = 2a$ ), situado como indica la figura P13.9. El campo eléctrico de la onda viene dado por,

$$\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - ky) \mathbf{u}_z$$

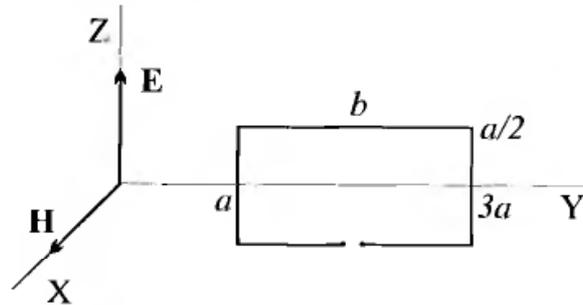
Calcular la f.e.m. inducida en la espira para los tres casos siguientes:

1)  $\lambda \gg a$ . 2)  $\lambda = 2a$ . 3)  $\lambda = 4a$ .

**Solución**

La f.e.m. inducida se calcula mediante la variación del flujo del campo magnético a través de la superficie cerrada por la espira. Para obtener dicho flujo debemos calcular el campo magnético  $\mathbf{H}$  de la onda. Este se obtiene mediante la ecuación (13.67);  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_y$ , por tanto,

$$\mathbf{H}(y, t) = \frac{k}{\omega\mu_o} \mathbf{u}_y \times \mathbf{E} = \frac{k}{\omega\mu_o} E_o \cos(\omega t - ky) \mathbf{u}_x$$

**Figura P13.9**

La superficie de la espira es perpendicular a  $\mathbf{u}_x$ , sus dimensiones  $a$  y  $b$ , y está situada entre  $y = a$  e  $y = 3a$ . El flujo será,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mu_o \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{k}{\omega} E_o \int_a^{3a} \cos(\omega t - ky) \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x a dy = \frac{a}{\omega} E_o [-\text{sen}(\omega t - ky)]_a^{3a} \\ \Phi &= \frac{a}{\omega} E_o (\text{sen}(\omega t - ka) - \text{sen}(\omega t - k3a)) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica,

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

La diferencia de las dos funciones sinusoidales anteriores producen un flujo de la forma,

$$\Phi = \frac{a}{\omega} E_o 2 \text{sen}(ka) \cos(\omega t - k2a)$$

Mediante la ecuación (13.65) se pone  $k$  en función de  $\lambda$ , por tanto,

$$\Phi = \frac{a}{\omega} E_o 2 \text{sen} \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right) \cos \left( \omega t - \frac{4\pi a}{\lambda} \right)$$

1) Para  $\lambda \gg a$

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \text{ muy pequeño} \rightarrow \text{sen} \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right) \simeq \frac{2\pi a}{\lambda}$$

$$\Phi \simeq \frac{E_o 4\pi a^2}{\omega \lambda} \cos \omega t$$

La f.e.m. inducida será,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \simeq E_o \frac{4\pi a^2}{\lambda} \text{sen } \omega t$$

Esta f.e.m. es muy pequeña dado que  $\lambda \gg a$ .

2) Para  $\lambda = 2a$

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \pi \rightarrow \text{sen } \pi = 0$$

en consecuencia  $\Phi = 0 \rightarrow \mathcal{E} = 0$

3) Para  $\lambda = 4a$

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Phi = \frac{a}{\omega} E_o 2 \cos(\omega t - \pi) \rightarrow \mathcal{E} = 2a E_o \text{sen}(\omega t - \pi)$$

### PROBLEMA 13.10

En el espacio existe un campo magnético dado por la ecuación

$$\mathbf{B} = \mathbf{u}_z B_o \text{sen}(2\pi y/L) \text{sen } \omega t$$

Sobre el plano XY y a una distancia  $L$  del origen se sitúa una espira abierta de lado  $L/2$ , como indica la figura 13.10.

Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

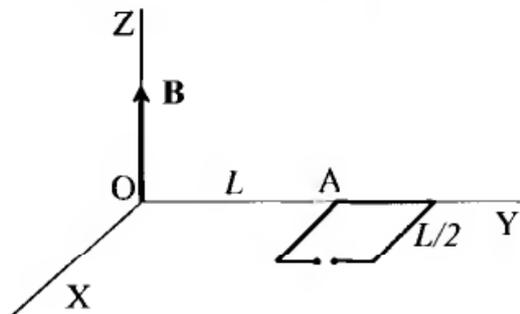


Figura P13.10

### Solución

La f.e.m. viene dada, aplicando la ley de Faraday, por la expresión

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Calculemos el flujo a través de la espira.

$$\Phi = \int_L^{3L/2} B_o \text{sen}(2\pi y/L) \text{sen } \omega t \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z \frac{L}{2} dy$$

$$\Phi = B_o \frac{L}{2} \text{sen } \omega t \int_L^{3L/2} \text{sen}(2\pi y/L) dy$$

$$\Phi = B_o \frac{L}{2} \text{sen } \omega t \left[ -\frac{L}{2\pi} \cos(2\pi y/L) \right]_L^{3L/2} = B_o \frac{L^2}{2\pi} \text{sen } \omega t$$

Y por tanto, la f.e.m. inducida será

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_o \frac{L^2 \omega}{2\pi} \cos \omega t$$

**PROBLEMA 13.11**

Una onda electromagnética se propaga en el vacío y en la dirección del eje Y, de forma que la intensidad de campo magnético es:

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_z H_o \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right)$$

La frecuencia de la onda es  $f = 10^8$  c/s, siendo  $T$  el periodo y  $\lambda$  la longitud de onda.

Una espira cuadrada, de lado  $L = (3/2)\lambda$ , se dispone a una distancia del origen  $\lambda$  como muestra la figura P13.11.

Calcular la f.c.m. inducida en la espira.

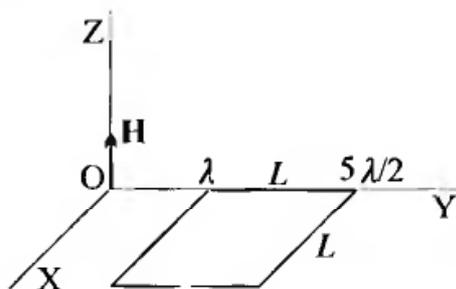


Figura P13.11

**Solución**

Calculamos el flujo del campo  $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$  en la espira dada. Hay que tener en cuenta que la onda es una función tanto del espacio como del tiempo. Quiere esto decir que calculamos el flujo como una integral de superficie referida a la componente espacial del campo, quedando entonces el flujo como una función del tiempo:

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot dx dy \mathbf{u}_z$$

$$\Phi(t) = \mu_o \int_S \mathbf{H}(t, y) dx dy \mathbf{u}_z$$

$$\Phi(t) = \mu_o \int_0^L dx \int_{\lambda}^{5\lambda/2} H(t, y) dy = \mu_o L \int_{\lambda}^{5\lambda/2} H(t, y) dy$$

Sustituimos el valor de  $H(t, y)$  dado por el enunciado e integramos,

$$\Phi(t) = \mu_o H_o L \int_{\lambda}^{5\lambda/2} \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} y \right) dy$$

$$\Phi(t) = \mu_o H_o L \left( \frac{-\lambda}{2\pi} \right) \left[ \text{sen} \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \right]_{\lambda}^{5\lambda/2}$$

$$\Phi(t) = \mu_o H_o L \left( \frac{-\lambda}{2\pi} \right) \left( \sin \left( \frac{2\pi}{T} t - 5\pi \right) - \sin \left( \frac{2\pi}{T} t - 2\pi \right) \right)$$

Aplicamos las relaciones trigonométricas  $\sin(x - 5\pi) = \sin(x - \pi) = -\sin(x)$ ,  $\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$  y tenemos:

$$\Phi(t) = \frac{\mu_o H_o L \lambda}{2\pi} 2 \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \right)$$

Sustituyendo  $L = 3\lambda/2$  y simplificando,

$$\Phi(t) = \frac{3\mu_o H_o \lambda^2}{2\pi} \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \right)$$

La fuerza electromotriz inducida  $\mathcal{E}$  viene dada por,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{2\pi}{T} \frac{3\mu_o H_o \lambda^2}{2\pi} \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{3\mu_o H_o \lambda^2}{T} \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \right)$$

### PROBLEMA 13.12

En un medio de permeabilidad  $\mu_o$  y permitividad  $\epsilon = 4\epsilon_o$  se propaga una onda electromagnética (O E), cuyo campo eléctrico es de la forma:

$$\mathbf{E} = 10^{-2} \cos(10^8 \pi t - k y + \pi/2) \mathbf{u}_z \quad (\text{V/m})$$

1) Calcular la constante  $k$ , longitud de onda  $\lambda$  y la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ .

2) Encontrar el primer punto sobre el eje Y, distinto del origen de coordenadas, donde se anula  $\mathbf{H}$ , para  $t = 10^{-6}$  s.

#### Solución

1) Valores de  $k$ ,  $\lambda$  y  $\mathbf{H}$

De la ecuación de la onda se deduce que su frecuencia angular  $\omega$  vale,

$$\omega = 10^8 \pi \text{ s}^{-1}$$

su dirección de propagación es  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_y$ .

El vector de propagación  $\mathbf{k}$  es,

$$\mathbf{k} = k \mathbf{n} = k \mathbf{u}_y$$

y la amplitud del campo es  $E_o = 10^{-2}$  V/m.

Siendo su dirección de polarización  $\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_z$

En el medio descrito la velocidad de la onda es

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4\mu_o\epsilon_o}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mu_o\epsilon_o}}$$

Como  $(\mu_o \varepsilon_o)^{-1/2} = c$ , velocidad de propagación en el vacío, tenemos que

$$v = c/2 = 1,5 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Y la impedancia del medio es

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = \frac{Z_o}{2}$$

Siendo la impedancia del vacío  $Z_o$  igual a  $120\pi$  ( $\Omega$ ), deducimos que,

$$Z = 60\pi \ \Omega$$

La constante  $k$  se obtiene mediante la relación  $k = \omega/v$ ,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{3} \text{ m}^{-1}$$

y la longitud de onda  $\lambda$  es igual a  $2\pi/k$ , por tanto

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 3 \text{ m}$$

El campo  $\mathbf{H}$  de la onda plana viene dado por,

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{u}_y \times \mathbf{E} = \frac{1}{Z} (\mathbf{u}_y \times \mathbf{E})$$

Su dirección de polarización,  $\mathbf{u}_H$ , viene dada por,

$$\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x$$

y la amplitud,  $H_o$

$$H_o = \frac{E_o}{Z} = \frac{10^{-2}}{60\pi} = \frac{10^{-3}}{6\pi} \text{ [A/m]}$$

La expresión completa para  $\mathbf{H}$  es,

$$\mathbf{H}(t, y) = \frac{10^{-3}}{6\pi} \cos\left(10^8 \pi t - \frac{2\pi}{3} y + \pi/2\right) \mathbf{u}_x \text{ [A/m]}$$

2) Cálculo del primer punto donde se anula  $\mathbf{H}$

Para  $t = 10^{-6}$  s, tenemos

$$\mathbf{H}(10^{-6}, y) = \frac{10^{-3}}{6\pi} \cos\left(100\pi - \frac{2\pi}{3} y + \pi/2\right) \mathbf{u}_x \text{ [A/m]}$$

y la condición para encontrar los puntos sobre el eje  $y$  en que se anula el campo está dada por

$$\cos\left(100\pi - \frac{2\pi}{3} y + \pi/2\right) = 0$$

que se puede expresar también como:

$$100\pi - \frac{2\pi}{3} y + \pi/2 = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

donde  $n$  es un número entero. Simplificando,

$$100 - n = \frac{2}{3} y$$

Se observa que el primer valor de  $y$  que cumple la condición tiene que estar alrededor de  $n \simeq 100$ . Efectivamente, para  $n = 100$  tenemos  $y = 0$ , que no nos sirve puesto que se nos pide el primer punto, *distinto del origen*, donde se anula  $\mathbf{H}$ . La siguiente elección es evidente: bien  $n = 99$  ó  $n = 101$ , sirven para nuestros propósitos. Por ejemplo, para  $n = 99$  tenemos

$$y = 1,5 \text{ m}$$

que es la solución correspondiente al problema propuesto.

También se puede calcular la solución que corresponde a  $n = 101$ . Esta vez obtendríamos  $y = -1,5$  m, es decir, el punto simétrico con respecto al origen, pero dado que la dirección de propagación es  $\mathbf{u}_y$ , el sentido de progreso temporal nos determina que el punto sea  $y = 1,5$  m.

### PROBLEMA 13.13

En un medio de permeabilidad  $\mu_o$  y permitividad  $\varepsilon = 9\varepsilon_o$  se propaga una onda electromagnética (OE), cuya intensidad de campo magnético es:

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_z 10^{-2} \cos(10^8 \pi t - ky + \pi/2)$$

- 1) Calcular las constantes  $k$ ,  $\lambda$ , y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ .
- 2) Encontrar el primer punto sobre el eje  $Y$ , distinto del origen de coordenadas, donde se anula el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  para  $t = 5 \times 10^{-7}$  s.

#### Solución

1) *Constantes  $\lambda$  y  $k$*

Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación de la onda es  $v = (\mu\varepsilon)^{-1/2}$ , en nuestro caso

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o 9\varepsilon}} = \frac{1}{3\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = \frac{c}{3}$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz.

Conocida la velocidad de la onda electromagnética podemos determinar la longitud de onda  $\lambda$  y el vector de onda  $k$ , mediante la relación

$$v = \lambda f$$

donde  $\omega = 2\pi f = \pi 10^8 \text{ s}^{-1}$  es la frecuencia angular,

$$\lambda = \frac{c/3}{1/2 \times 10^8} = 2 \text{ (m)}$$

Y el módulo del vector de onda  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

Por último, el campo eléctrico vendrá dado por

$$\mathbf{E} = -\frac{v^2 k}{\omega} \mu (\mathbf{u}_y \times \mathbf{H})$$

Sustituyendo los distintos valores,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}_x 10^6 \mu_o \cos(10^8 \pi t - \pi y + \pi/2)$$

2) Punto donde  $\mathbf{E} = 0$

El primer punto sobre el eje Y donde se anula el campo eléctrico será en el que se verifique,

$$\cos(50\pi - \pi y + \pi/2) = 0 \rightarrow 50\pi - \pi y + \frac{\pi}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

Simplificando,

$$y = 50 - n$$

Con  $n = 50$  el punto sería el origen de coordenadas, que no sirve ya que se pide un punto distinto del origen. La elección más próxima es 49, por tanto,

$$y = 1 \text{ m}$$

### PROBLEMA 13.14

En una onda electromagnética plana el campo eléctrico es:

$$\mathbf{E} = 10 \cos(2\pi \times 10^8 t - 6z)\mathbf{u}_x$$

Se propaga en un medio de permitividad  $\varepsilon$ , permeabilidad  $\mu_o$  y conductividad  $\gamma = 0$ .

Calcular la longitud de onda  $\lambda$ , la permitividad  $\varepsilon$ , el campo magnético  $\mathbf{H}$  y el vector de Poynting  $\mathbf{S}$ .

#### Solución

Comparando la ecuación dada para el campo con la parte real de la ecuación (13.61), podemos comprobar que,

$$\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - kz)\mathbf{u}_x = 10 \cos(2\pi \times 10^8 t - 6z)\mathbf{u}_x$$

Es decir,

$$E_o = 10 ; \quad \omega = 2\pi \times 10^8 ; \quad k = 6$$

A partir de estos datos podemos calcular  $\lambda$  y  $\varepsilon$ .

1) Mediante la ecuación (13.65) calculamos  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{3} \text{ m}$$

2) Utilizando la ecuación (13.62) determinamos  $\varepsilon$ ,

$$\varepsilon = \frac{k^2}{\omega^2 \mu_o} \simeq 8,2 \varepsilon_o$$

3) El campo magnético  $\mathbf{H}$  se obtiene a partir de la ecuación (13.67). En este caso el vector  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$ ,

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{k}{\omega\mu_0} E(z, t)(\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x)$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{3}{4\pi^2} \cos(2\pi \times 10^8 t - 6z)\mathbf{u}_y$$

4)

El vector de Poynting se calcula mediante la ecuación (13.37),

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{30}{4\pi^2} \cos^2(2\pi \times 10^8 t - 6z)\mathbf{u}_z$$

**PROBLEMA 13.15**

El campo eléctrico de una onda electromagnética en forma compleja es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_x E_o \exp j(\omega t - kz) + \mathbf{u}_x 2E_o \exp j(\omega t - kz + \theta)$$

1) Calcular la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ .2) Calcular el vector de Poynting  $\mathbf{S}$  y su valor medio  $\langle \mathbf{S} \rangle$ .**Solución**1) *Intensidad de campo magnético*

La onda electromagnética se propaga en la dirección del eje Z, por tanto  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$ . La ecuación (13.67) nos permite calcular  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{k}{\omega\mu} (\mathbf{u}_y E_o \exp j(\omega t - kz) + \mathbf{u}_y 2E_o \exp j(\omega t - kz + \theta))$$

2) *Vector de Poynting*

El vector de Poynting se obtiene mediante la ecuación (13.69),

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z)) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{u}_x E_o \exp(-jkz) + \mathbf{u}_x 2E_o \exp(-j(kz - \theta))) \times \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{k}{\omega\mu} (\mathbf{u}_y E_o \exp(jkz) + \mathbf{u}_y 2E_o \exp(j(kz - \theta))) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z)) = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 (1 + 2 \exp(-j\theta) + 2 \exp(j\theta) + 4) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S}_R = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z)) = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 (5 + 4 \cos \theta) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S}_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}(z) e^{j2\omega t})$$

$$\mathbf{S}_t = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 \operatorname{Re} \left( e^{-j2kz} + 4e^{-j2(kz-\theta)} + 4e^{-j(2kz-\theta)} \right) e^{j2\omega t} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S}_t = \frac{kE_o^2}{2\omega\mu} \left( \cos 2(\omega t - kz) + 4 \cos 2(\omega t - kz + \theta) \right) + 4 \cos 2\left(\omega t - kz + \frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_t$$

Este vector de Poynting de la onda compuesta es distinto de la suma de los vectores de Poynting correspondientes a las ondas simples.

Si consideramos  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  con,

$$\mathbf{E}_1 = E_o \exp j(\omega t - kz) \mathbf{u}_x ; \mathbf{E}_2 = 2E_o \exp j(\omega t - kz + \theta) \mathbf{u}_x$$

Los vectores  $\mathbf{H}$  respectivos son:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{k}{\omega\mu} E_o \exp j(\omega t - kz) \mathbf{u}_y ; \mathbf{H}_2 = 2 \frac{k}{\omega\mu} E_o \exp j(\omega t - kz + \theta) \mathbf{u}_y$$

Los vectores de Poynting serán,

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_{R1} + \mathbf{S}_{t1} = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 (1 + \cos 2(\omega t - kz)) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_{R2} + \mathbf{S}_{t2} = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 (4 + 4 \cos 2(\omega t - kz + \theta)) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \frac{k}{2\omega\mu} E_o^2 (5 + \cos 2(\omega t - kz) + 4 \cos 2(\omega t - kz + \theta))$$

Comparando esta ecuación con la obtenida para  $\mathbf{S}$ , podemos comprobar que la diferencia es  $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{S} - (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)$ :

$$\Delta\mathbf{S} = \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 2 (\cos \theta + \cos(2\omega t - 2kz + \theta))$$

El valor medio del vector de Poynting se obtiene mediante la ecuación (13.70), que es la primera parte del vector  $\mathbf{S}$  calculado antes, es decir,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z))$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 (5 + 4 \cos \theta) \mathbf{u}_z \quad (13.15.1)$$

Este valor medio es diferente a la suma de los valores medios correspondientes a cada componente de la onda. Tomando como en el caso anterior los valores de  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_1^*$  y  $\mathbf{H}_2^*$ , se calculan  $\langle \mathbf{S}_1 \rangle$  y  $\langle \mathbf{S}_2 \rangle$ .

La suma de los valores medios es:

$$\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 5 \mathbf{u}_z \quad (13.15.2)$$

La diferencia entre (13.15.1) y (13.15.2) es:

$$\Delta \langle \mathbf{S} \rangle = 2 \frac{k}{\omega\mu} E_o^2 \cos \theta \mathbf{u}_z$$

En los valores del vector de Poynting, para una onda compuesta como la indicada en el problema, se comprueba que la suma de los vectores de Poynting correspondientes a las ondas simples es distinta del vector de Poynting de la onda compuesta.

### PROBLEMA 13.16

En una onda electromagnética (O.E.) propagándose en el vacío la forma compleja de su campo eléctrico es.

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_x E_o \exp j(\omega t - kz) + \mathbf{u}_y 2E_o \exp j(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$$

- 1) Indicar el tipo de polarización de la onda.
- 2) Calcular la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ .
- 3) Determinar el vector de Poynting  $\mathbf{S}$  y su valor medio  $\langle \mathbf{S} \rangle$ .

#### Solución

##### 1) Polarización

Para determinar la polarización de la onda debemos encontrar la parte real del campo  $\mathbf{E}$ , esta es:

$$\text{Re } \mathbf{E} = \mathbf{u}_x E_o \cos(\omega t - kz) + \mathbf{u}_y 2E_o \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$$

Dado que  $\cos(\alpha + \pi/2) = -\text{sen } \alpha$

$$\text{Re } \mathbf{E} = \mathbf{u}_x E_o \cos(\omega t - kz) - \mathbf{u}_y 2E_o \text{sen}(\omega t - kz)$$

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{u}_x E_o \cos(\omega t - kz) - \mathbf{u}_y 2E_o \text{sen}(\omega t - kz)$$

Este campo es de forma similar al indicado en la ecuación (13.77) para ondas polarizadas clípticamente.

En un punto de coordenada  $z = z_o$  el extremo del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  describe una elipse, cuyo eje mayor está sobre el eje Y y su valor es  $2E_o$ ; mientras que el eje menor está sobre el eje X y su valor es  $E_o$ . El sentido de giro es el de las agujas del reloj, pues comienza sobre el eje X en  $t = 0$  desplazándose hacia la parte negativa del eje Y cuando aumenta  $t$ .

##### 2) Intensidad de campo $\mathbf{H}$

La intensidad de campo magnético se calcula utilizando la ecuación (13.67). El vector  $\mathbf{n}$  es igual a  $\mathbf{u}_z$ , por tanto  $\mathbf{H}$  será:

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega \mu_o} \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega \mu_o} E_o \left( \mathbf{u}_y \exp j(\omega t - kz) - \mathbf{u}_x 2 \exp j(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \right)$$

$$\text{Re } \mathbf{H} = \frac{k}{\omega \mu_o} E_o (\mathbf{u}_y \cos(\omega t - kz) + \mathbf{u}_x 2 \text{sen}(\omega t - kz))$$

## 3) Vector de Poynting

El vector de Poynting  $\mathbf{S}$  lo calculamos mediante la ecuación (13.69),

$$\mathbf{S} = \text{Re} (\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z) + \mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}(z)e^{j2\omega t})$$

$$\mathbf{S}_R = \text{Re} \mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z)$$

$$\mathbf{S}_R = \text{Re} \left[ \frac{kE_o^2}{\omega\mu_o} \left( \mathbf{u}_x e^{-jkz} + \mathbf{u}_y 2e^{j(-kz + \frac{\pi}{2})} \right) \times \left( \mathbf{u}_y e^{jkz} - \mathbf{u}_x 2e^{j(kz - \frac{\pi}{2})} \right) \mathbf{u}_z \right]$$

Operando queda,

$$\mathbf{S}_R = \frac{k}{\omega\mu_o} E_o^2 \frac{5}{2} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S}_t = \text{Re} (\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}(z)e^{j2\omega t})$$

$$\mathbf{S}_t = \text{Re} \frac{kE_o^2}{\omega\mu_o} \left[ \left( \mathbf{u}_x e^{-jkz} + \mathbf{u}_y 2e^{j(\frac{\pi}{2} - kz)} \right) \times \left( \mathbf{u}_y e^{-jkz} - \mathbf{u}_x 2e^{j(\frac{\pi}{2} - kz)} \right) e^{j2\omega t} \right]$$

Teniendo en cuenta que  $\cos(\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$ , realizando el producto vectorial y simplificando,

$$\mathbf{S}_t = \frac{k}{\omega\mu_o} E_o^2 \left( -\frac{3}{2} \right) \cos 2(\omega t - kz) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_t = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega\mu_o} E_o^2 (5 - 3 \cos 2(\omega t - kz)) \mathbf{u}_z \quad (13.16.1)$$

El valor medio de  $\mathbf{S}$  se obtiene mediante la ecuación (13.70) que no es otra cosa que el primer término de la ecuación anterior, es decir,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{5}{2} \frac{k}{\omega\mu_o} E_o^2 \mathbf{u}_z \quad (13.16.2)$$

De forma análoga a como procedimos en el problema anterior, podemos comparar los vectores de Poynting  $\mathbf{S}$  y su valor medio  $\langle \mathbf{S} \rangle$  con la suma de los vectores correspondientes a los campos  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$  que componen la onda polarizada elípticamente:

$$\mathbf{E}_1 = E_o \exp j(\omega t - kz) \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E}_2 = 2E_o \exp j(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{k}{\omega\mu_o} E_o \exp j(\omega t - kz) \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{k}{\omega\mu_o} 2E_o \exp j(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \mathbf{u}_x$$

Los vectores de Poynting de cada componente se obtienen procediendo en forma análoga al caso anterior, por tanto,

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega \mu_o} E_o^2 (1 + \cos 2(\omega t - kz)) \mathbf{u}_z$$

Considerando que  $\cos(2(\omega t - kz) + \pi) = -\cos 2(\omega t - kz)$ ,

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega \mu_o} E_o^2 (4 - 4 \cos 2(\omega t - kz)) \mathbf{u}_z$$

La suma de estos dos vectores será:

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega \mu_o} E_o^2 (5 - 3 \cos 2(\omega t - kz)) \mathbf{u}_z$$

Podemos comprobar que esta suma es igual al valor  $\mathbf{S}$  indicado en la ecuación (13.16.1); es decir,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$$

en el caso de una onda polarizada elípticamente.

De forma similar se comprueba que,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle$$

Podemos concluir que en el caso de ondas polarizadas elípticamente, tanto el vector de Poynting  $\mathbf{S}$  como su valor medio  $\langle \mathbf{S} \rangle$  son respectivamente iguales a la suma de los vectores obtenidos con las componentes de dicha onda. Como vimos en el problema anterior esto no ocurre con otro tipo de ondas compuestas.

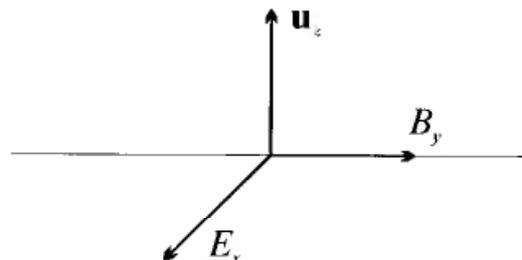
### PROBLEMA 13.17

A frecuencias muy altas la corriente se limita a una región próxima a la superficie del conductor y los campos eléctrico y magnético son nulos en el interior.

$E_x$  y  $B_y$  son las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético representadas en la figura P13.17. Demostrar que en el conductor se cumple la siguiente relación:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

**Solución**



**Figura P13.17**

Para demostrar que se cumple la relación pedida utilizamos la ecuación (13.2). Las condiciones particulares del problema son: La componente  $E_y$  es nula por que hemos supuesto el campo tangencial en la dirección del eje X. En el interior del conductor la componente normal a la superficie  $E_z = 0$ , ya que las cargas superficiales son las responsables de la discontinuidad de las componentes normales del campo en la superficie. Con estas condiciones la componente  $y$  del  $\nabla \times \mathbf{E}$  es:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Como  $E_z$  es nulo en el interior y la única posibilidad de variación es la debida a las cargas superficiales, la derivada de  $E_z$  con respecto a  $y$  es nula, por tanto,

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Queda demostrado que se cumple la relación pedida.

### PROBLEMA 13.18

Una onda electromagnética (OE) plana de 100 MHz se propaga en la dirección del eje Y. Mediante una sonda determinamos el máximo del campo eléctrico en un punto, considerado como referencia, y su valor es  $E_o = 10$  V/m. Con la misma sonda medimos el valor máximo del campo en un punto sobre el eje Y distante del anterior 3 m: su valor es 0.01V/m.

La permitividad del medio es  $\epsilon_o$  y su permeabilidad  $\mu_o$ .

¿De los datos obtenidos se puede deducir que la onda se propaga en un medio conductor?

En caso afirmativo calcular la constante de atenuación y la conductividad del medio conductor.

### Solución

El campo de la OE se atenúa en la dirección de propagación, por tanto se disipa energía en el medio; puesto que  $\epsilon = \epsilon_o$  y  $\mu = \mu_o$ , no hay pérdidas dieléctricas ni magnéticas. En consecuencia la energía disipada no puede ser otra que la debida a las pérdidas en un conductor. Es decir, la OE se propaga en un medio conductor.

Las medidas son las amplitudes del campo dado por la ecuación (13.110) en los dos puntos considerados. Poniendo  $k$  en función de las constantes de propagación  $\alpha$  y fase  $\beta$ , la parte real de la citada ecuación queda de la forma:

$$\mathbf{E}(t, y) = \mathbf{E}_o e^{\alpha y} \cos(\omega t - \beta y)$$

El módulo de la amplitud a lo largo del eje Z es,

$$E_o = E_o e^{\alpha y}$$

En  $y = 0 \rightarrow 10 = E_o e^0 = E_o$  ; En  $y = 3 \rightarrow 0,01 = 10 e^{\alpha 3}$   
Tomando el logaritmo neperiano en la última relación queda,

$$\ln\left(\frac{0,01}{10}\right) = 3\alpha \rightarrow \alpha \simeq -\frac{1}{3}6,9$$

La constante de atenuación es,

$$\alpha \simeq -2,3 \text{ m}^{-1}$$

Todavía no sabemos si se cumple la condición  $\gamma \gg \omega \epsilon_o$ . Hacemos un ensayo suponiendo que se trata de un buen conductor. Calculamos la conductividad teniendo en cuenta la ecuación (13.106) que nos da la constante  $\alpha$  en función  $\gamma$ ,  $\mu$  y  $\omega$ ,

$$\alpha \simeq -\left(\frac{\omega \mu \gamma}{2}\right)^{1/2}$$

Los datos del problema y la constante  $\alpha$  son:

$$\omega = 2\pi 10^8 ; \mu_o = 4\pi 10^{-7} ; \alpha \simeq -2,3$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior para  $\alpha$  calculamos  $\gamma$ .

$$-2,3 \simeq -\left(\frac{\omega \mu_o \gamma}{2}\right)^{1/2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros,

$$5,9 \simeq \frac{\omega \mu \gamma}{2} \rightarrow \gamma \simeq \frac{10,58}{\omega \mu_o}$$

$$\gamma \simeq \frac{10,58}{2\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}} \simeq 0,0134 = 13,4 \times 10^{-3} \text{ } (\Omega \text{ m})^{-1}$$

$$\gamma \simeq 13,4 \times 10^{-3} \text{ } (\Omega \text{ m})^{-1}$$

Como  $\omega \epsilon_o \simeq 2\pi 10^8 \times 8,854 \times 10^{-12} \simeq 5,563 \times 10^{-3}$  se cumple la citada condición de buen conductor aunque no de forma notoria.

### PROBLEMA 13.19

Una onda electromagnética polarizada linealmente en la dirección  $\mathbf{u}_z$  se propaga en la dirección positiva del eje Y. Su amplitud es 10 V/m. la frecuencia  $f = 300$  MHz. Las constantes del medio son  $\epsilon = 4\epsilon_o$ .  $\mu = \mu_o$  y  $\gamma = 100 \text{ } (\Omega \text{ m})^{-1}$ .

- 1) Calcular las constantes de atenuación y fase ( $\alpha$  y  $\beta$ ).
- 2) Determinar la impedancia intrínseca y la profundidad de penetración.
- 3) Valor medio del vector de Poynting para  $y = \delta$ .

**Solución***1) Constantes  $\alpha$  y  $\beta$* 

En primer lugar tenemos que calcular  $\gamma/\omega\epsilon$  para saber si podemos hacer la aproximación utilizada en buenos conductores,

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \simeq \frac{100}{6\pi \times 10^8 \times 4 \times 8,854 \times 10^{-12}} \simeq 1498 \gg 1$$

Vemos que se puede utilizar la aproximación de buen conductor. En este caso las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  vienen dadas por la ecuación (13.106)

$$|\alpha| = \beta \simeq \left( \frac{\omega\mu_o\gamma}{2} \right)^{1/2} = \left( \frac{6\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 100}{2} \right)^{1/2}$$

$$|\alpha| = \beta \simeq 344,14 \text{ m}^{-1}$$

*2) Impedancia intrínseca*

La impedancia intrínseca se obtiene mediante la ecuación (13.114),

$$Z_c \simeq (1 + j) \left( \frac{\omega\mu_o}{2\gamma} \right)^{1/2} \simeq \left( \frac{600\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 100} \right)^{1/2} \simeq 3,44(1 + j)$$

La profundidad de penetración se determina con la ecuación (13.113).

$$\delta \simeq \left( \frac{2}{\omega\mu_o\gamma} \right)^{1/2} \simeq \frac{1}{|\alpha|} \simeq 2,9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

*3) Valor medio del vector de Poynting*

En el caso de un conductor el vector de Poynting viene dado por la ecuación (13.120), que en nuestro caso es,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega\mu} E_o^2 \exp(2\alpha y)$$

con los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  obtenidos antes,  $|\alpha| = \beta \simeq 344,14 \text{ m}^{-1}$ .

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} 100 \frac{344,14}{600\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}} \exp(2\alpha\delta)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle \simeq \mathbf{u}_y 7,264 \exp(-2) \simeq 0,983 \mathbf{u}_y$$

**PROBLEMA 13.20**

Dada una antena lineal de longitud  $L = \lambda$ , con una distribución de corriente como la expresada por la ecuación (13.147),<sup>3</sup>

1) Obtener el diagrama de radiación. 2) Calcular la resistencia de radiación y la directividad.

<sup>3</sup>Para la representación y cálculo aproximado se utiliza un programa como Maple u otro similar.

**Solución**1) *Diagrama de radiación*

Se trata de una antena lineal con una distribución de corriente sobre ella,

$$I(z', t) = I_o \operatorname{sen} k(h - |z'|)$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando la ecuación (13.149) con la función de radiación correspondiente a la longitud  $L = \lambda = 2h$ . Para dicha longitud,

$$kh = \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$$

$$F(\theta) = \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\operatorname{sen} \theta}$$

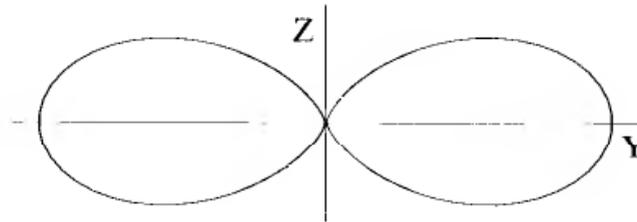
La componente  $E_\theta$  del campo eléctrico será,

$$E_\theta = Z_o \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\operatorname{sen} \theta}$$

Dado que  $H_\varphi = E_\theta/Z_o$ ,

$$H_\varphi = \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\operatorname{sen} \theta}$$

El diagrama de radiación es la representación de  $F(\theta)$  que muestra la figura P13.20.



**Figura P13.20**

2) *Resistencia de radiación*

La resistencia de radiación viene dada por la expresión,

$$R = \frac{2P}{I_o^2}$$

por tanto debemos calcular en primer lugar el valor medio de vector de Poynting,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_\theta H_\varphi^*)$$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} Z_o \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\operatorname{sen} \theta} \left( \frac{-jI_o}{2\pi r} \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\operatorname{sen} \theta} \right)$$

Como  $Z_o = 120\pi$  realizando operaciones queda,

$$\langle S \rangle = 15 \frac{I_o^2}{\pi r^2} \left( \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2$$

La potencia radiada será,

$$\begin{aligned} P &= \int_S \langle S \rangle ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \langle S \rangle r^2 \sin \theta d\theta \\ &= 15 \frac{I_o^2}{\pi} 2\pi \int_0^\pi \left( \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\sin \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta \\ P &= 30 I_o^2 \int_0^\pi \frac{(\cos(\pi \cos \theta) + 1)^2}{\sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Se integra numéricamente y su valor es,

$$P \simeq 30 I_o^2 \times 3,318 \simeq 99,54 I_o^2$$

La resistencia de radiación es,

$$R = \frac{2P}{I_o^2} \simeq 60 \times 3,318 \simeq 199 \quad [\Omega]$$

*Directividad*

Para este cálculo necesitamos obtener la intensidad de radiación,

$$I_R = \langle S \rangle r^2 = 15 \frac{I_o^2}{\pi} \left( \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\sin \theta} \right)^2$$

Observando el diagrama de radiación vemos que el valor máximo se obtiene cuando  $\theta = \pi/2$ ,

$$(I_R)_{\text{máx}} = 15 \frac{I_o^2}{\pi} 2 = 30 \frac{I_o^2}{\pi}$$

La directividad será,

$$D = \frac{4\pi (I_R)_{\text{máx}}}{P} = \frac{120 I_o^2}{99,54 I_o^2} \simeq 1,205$$

### PROBLEMA 13.21

Dada una antena lineal de longitud  $L = 3\lambda/2$ , con una distribución de corriente como la expresada por la ecuación (13.117).

1) Obtener el diagrama de radiación. 2) Calcular la resistencia de radiación y la directividad.

#### Solución

Procedemos de forma análoga al problema anterior.

1) *Diagrama de radiación*

Se trata de una antena lineal con una distribución de corriente sobre ella,

$$I(z', t) = I_o \sin k(h - |z'|)$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando la ecuación (13.149) con la función de radiación correspondiente a la longitud  $L = (3/2)\lambda = 2h$ . Para dicha longitud,

$$kh = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

$$F(\theta) = \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta}$$

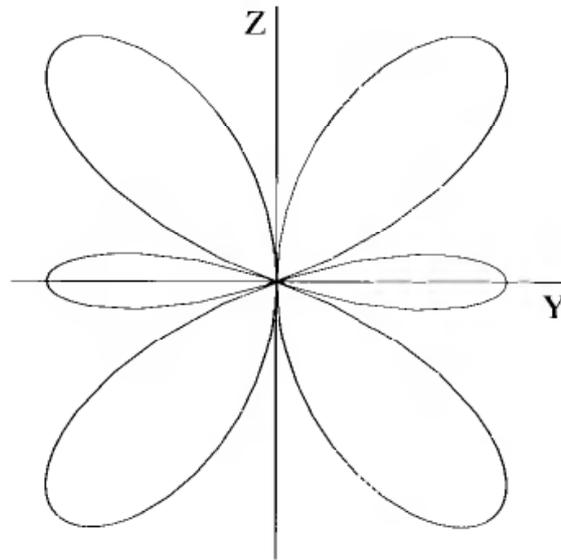
La componente  $E_\theta$  del campo eléctrico será,

$$E_\theta = Z_o \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta}$$

Dado que  $H_\varphi = E_\theta/Z_o$ ,

$$H_\varphi = \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta}$$

El diagrama de radiación es la representación de  $F(\theta)$  indicada en la figura P13.21.



**Figura P13.21**

2) *Resistencia de radiación*

La resistencia de radiación viene dada por la expresión,

$$R = \frac{2P}{I_o^2}$$

por tanto debemos calcular en primer lugar el valor medio de vector de Poynting,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (E_\theta H_\varphi^*)$$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} Z_o \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta} \left( \frac{-jI_o}{2\pi r} \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right)$$

Como  $Z_o = 120\pi$  realizando operaciones queda,

$$\langle S \rangle = 15 \frac{I_o^2}{\pi} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right)^2$$

La potencia radiada será,

$$\begin{aligned} P &= \int_S \langle S \rangle ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \langle S \rangle r^2 \text{sen } \theta d\theta \\ &= 15 \frac{I_o^2}{\pi} 2\pi \int_0^\pi \left( \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen } \theta d\theta \\ P &= 30 I_o^2 \int_0^\pi \frac{(\cos((3\pi/2) \cos \theta))^2}{\text{sen } \theta} d\theta \end{aligned}$$

Se integra numéricamente y su valor es,

$$P \simeq 30 I_o^2 \times 1,758 \simeq 52,746 I_o^2$$

La resistencia de radiación es,

$$R = \frac{2P}{I_o^2} \simeq 60 \times 1,758 \simeq 105,48 \quad [\Omega]$$

*Directividad*

Para este cálculo necesitamos obtener la intensidad de radiación,

$$I_R = \langle S \rangle r^2 = 15 \frac{I_o^2}{\pi} \left( \frac{\cos((3\pi/2) \cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right)^2$$

Observando el diagrama de radiación vemos que hay un valor máximo cuando  $\theta = \pi/2$ , y otros dos para un ángulo muy próximo a  $\theta \simeq \pm 1,05\pi/4 \simeq \pm \pi/4$

Para el ángulo  $\theta = \pi/2$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\cos((3\pi/2) \cos(\pi/2))}{\text{sen}(\pi/2)} \right)^2 &= 1 \\ (I_R)_{\text{máx}} &= 15 \frac{I_o^2}{\pi} \end{aligned}$$

La directividad será,

$$D = \frac{4\pi (I_R)_{\text{máx}}}{P} = \frac{60 I_o^2}{52,746 I_o^2} \simeq 1,375$$

Para el ángulo  $\theta = \pi/4$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\cos((3\pi/2) \cos((\pi)/4))}{\text{sen}((\pi)/4)} \right)^2 &\simeq 1,928 \\ (I_R)_{\text{máx}} &\simeq 15 \frac{I_o^2}{\pi} 1,928 \simeq 28,92 \frac{I_o^2}{\pi} \end{aligned}$$

La directividad será,

$$D \simeq \frac{4 \times 28,92 I_o^2}{52,746 I_o^2} \simeq 2,193$$

Vemos que es mayor la directividad en la dirección de los lóbulos que forma un ángulo próximo a  $\pm \pi/4$ .

### PROBLEMA 13.22

Dada una antena lineal de longitud  $L = 7\lambda/6$ , con una distribución de corriente como la expresada por la ecuación (13.147),

1) Obtener el diagrama de radiación. 2) Calcular la resistencia de radiación y la directividad.

#### Solución

Procedemos de forma análoga al problema anterior.

#### 1) Diagrama de radiación

Se trata de una antena lineal con una distribución de corriente sobre ella,

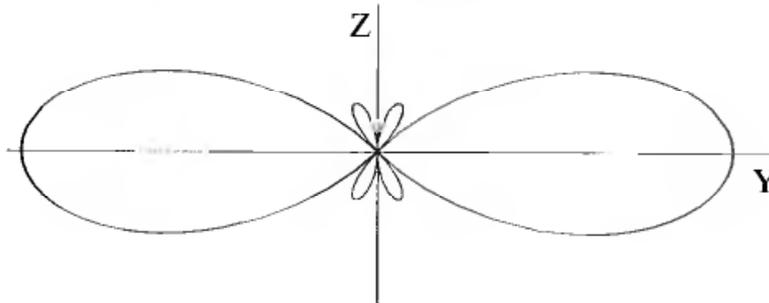
$$I(z', t) = I_o \operatorname{sen} k(h - |z'|)$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando la ecuación (13.149) con la función de radiación correspondiente a la longitud  $L = (7/6)\lambda = 2h$ . Para dicha longitud,

Para  $k = 2\pi/\lambda$  y  $h = 7\lambda/12$

$$kh = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{7\lambda}{12} = \frac{7}{6}\pi$$

$$F(\theta) = \frac{\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6)}{\operatorname{sen} \theta}$$



**Figura P13.22**

La componente  $E_\theta$  del campo eléctrico será,

$$E_\theta = Z_o \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6)}{\operatorname{sen} \theta}$$

Dado que  $H_\varphi = E_\theta/Z_o$ ,

$$H_\varphi = \frac{jI_o}{2\pi r} \frac{\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6)}{\operatorname{sen} \theta}$$

El diagrama de radiación es la representación de  $F(\theta)$  que muestra la figura P13.22.

2) *Resistencia de radiación*

La resistencia de radiación viene dada por la expresión,

$$R = \frac{2P}{I_o^2}$$

por tanto debemos calcular en primer lugar el valor medio de vector de Poynting,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_\theta H_\varphi^*) = \frac{1}{2} Z_o \frac{I_o^2}{4\pi^2 r^2} \left( \frac{\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2$$

Como  $Z_o = 120\pi$ ,

$$\langle S \rangle = 15 \frac{I_o^2}{\pi r^2} \left( \frac{\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2$$

La potencia radiada será,

$$\begin{aligned} P &= \int_S \langle S \rangle ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \langle S \rangle r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \\ &= 15 \frac{I_o^2}{\pi} 2\pi \int_0^\pi \left( \frac{\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \\ P &= 30 I_o^2 \int_0^\pi \frac{(\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6))^2}{\operatorname{sen} \theta} d\theta \end{aligned}$$

Se integra numéricamente y su valor es,

$$P \simeq 30 I_o^2 \times 2,297 \simeq 68,919 I_o^2$$

La resistencia de radiación es,

$$R = \frac{2P}{I_o^2} \simeq 137,82 \quad [\Omega]$$

*Directividad*

Para este cálculo necesitamos obtener la intensidad de radiación,

$$I_R = \langle S \rangle r^2 = \langle S \rangle = 15 \frac{I_o^2}{\pi} \left( \frac{\cos((7\pi/6) \cos \theta) - \cos(7\pi/6)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2$$

Observando el diagrama de radiación vemos que hay un valor máximo cuando  $\theta = \pi/2$ , y otros dos lóbulos laterales pequeños.

Para el ángulo  $\theta = \pi/2$

$$(I_R)_{\max} = 15 \frac{I_o^2}{\pi} \left( \frac{1 - \cos(7\pi/6)}{1} \right)^2 = 15 \frac{I_o^2}{\pi} \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 \simeq 16,626 I_o^2$$

La directividad será,

$$D = \frac{4\pi(I_R)_{\text{máx}}}{P} = \frac{4\pi \times 16,626 I_o^2}{68,919 I_o^2} \simeq 3,03$$

### PROBLEMA 13.23

Dada una antena lineal de longitud  $L = \lambda/2$ , con una distribución de corriente de la forma,  $I(z', t) = I_o \cos(\omega t)$ .

1) Obtener el diagrama de radiación. 2) Calcular la resistencia de radiación y la directividad.

#### Solución

Utilizamos la ecuación del campo eléctrico obtenida para una corriente sinusoidal y sustituimos dicha corriente por la del problema propuesto,

$$E_\theta = Z_o \frac{j I_o k \text{sen } \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \int_{-h}^h (\cos(kz' \cos \theta) + j \text{sen}(kz' \cos \theta)) \text{sen } k(h - |z'|) dz'$$

Sustituyendo  $I(z', t) = I_o \text{sen } k(h - |z'|)$  por  $I(z', t) = I_o$

$$E_\theta = Z_o \frac{j I_o k \text{sen } \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \int_{-h}^h (\cos(kz' \cos \theta) + j \text{sen}(kz' \cos \theta)) dz'$$

y teniendo en cuenta la simetría de la corriente con respecto a  $z'$ , podemos integrar entre 0 y  $h = L/2$  y multiplicar por dos.

$$E_\theta = 2Z_o \frac{j I_o k \text{sen } \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \int_0^h (\cos(kz' \cos \theta) + j \text{sen}(kz' \cos \theta)) dz'$$

La función  $I_o$  es par, es decir,  $I_o(z') = I_o(-z')$ , ya que la corriente es la misma para  $z'$  y  $-z'$ . La función  $\text{sen}(kz' \cos \theta)$  es impar,  $\text{sen}(kz' \cos \theta) = -\text{sen}(-kz' \cos \theta)$ , por tanto la integral,

$$\int_{-h}^h (j \text{sen}(kz' \cos \theta)) I_o dz' = 0$$

Es decir, la suma de los productos elementales entre 0 y  $h$  es de signo opuesto a la correspondiente a 0 y  $-h$ , por tanto la integral es nula.

El primer término de la integral es el producto de dos funciones pares, por tanto, no es nulo, y podemos expresarlo de la forma siguiente,

$$f(\theta) = 2 \int_0^h \cos(kz' \cos \theta) dz' = 2 \frac{\text{sen}(kh \cos \theta)}{k \cos \theta}$$

La función  $F_o(\theta)$  se obtiene sacando factor común  $2/k$ ,

$$F_o(\theta) = \text{sen } \theta \frac{\text{sen}(kh \cos \theta)}{\cos \theta}$$

Sustituyendo  $F_o(\theta)$  en la relación para el campo eléctrico y simplificando tenemos que,

$$E_{\theta} = Z_o \frac{jI_o}{\pi r} e^{-jkr} F_o(\theta) = \frac{Z_o jI_o}{\pi r} e^{-jkr} F_o(\theta)$$

El campo magnético será,

$$H_{\varphi} = \frac{1}{Z_o} E_{\theta} = \frac{1}{\pi} \frac{jI_o}{r} e^{-jkr} F_o(\theta)$$

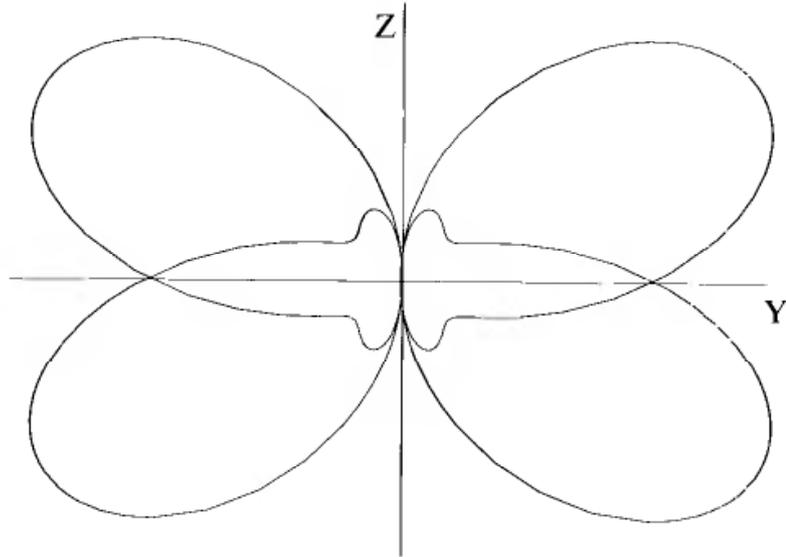
1) *Diagrama de radiación*

Es la representación en forma polar de la función  $F_o(\theta)$  para

$$h = \frac{\lambda}{4} \rightarrow kh = \frac{2\pi \lambda}{\lambda 4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen } \theta \frac{\text{sen}((\pi/2) \cos \theta)}{\cos \theta}$$

Observando el diagrama y aplicando la expresión  $F_o(\theta)$  vemos que las direcciones para las que se produce un máximo corresponden a los ángulos:  $\pi/3$  y  $2\pi/3$ .



**Figura P13.23**

2) *Resistencia de radiación*

La resistencia de radiación viene dada por la expresión,

$$R = \frac{2P}{I_o^2}$$

por tanto debemos calcular en primer lugar el valor medio de vector de Poynting,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (E_{\theta} H_{\varphi}^*) = \frac{Z_o jI_o}{\pi r} e^{-jkr} F_o(\theta) \left( \frac{1 - jI_o}{\pi r} e^{jkr} F_o(\theta) \right)$$

Como  $Z_o = 120\pi$ ,

$$\langle S \rangle = \frac{120}{\pi} \frac{I_o^2}{r^2} F_o^2(\theta)$$

La potencia radiada será,

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \langle S \rangle r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$P = 240 I_o^2 \int_0^\pi \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\operatorname{sen}((\pi/2) \cos \theta)}{\cos \theta} \right)^2 \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$\int_0^\pi \left( \sin \theta \frac{\sin((\pi/2) \cos \theta)}{\cos \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta$$

Se integra numéricamente y su valor es,

$$P \simeq I_o^2 240 \times 0,75807 \simeq 181,94 I_o^2$$

La resistencia de radiación es,

$$R = \frac{2P}{I_o^2} \simeq 2 \times 181,94 \simeq 363,88 \quad [\Omega]$$

*Directividad*

Para este cálculo necesitamos obtener la intensidad de radiación,

$$I_R = \langle S \rangle r^2 = \frac{120}{\pi} I_o^2 \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\operatorname{sen}((\pi/2) \cos \theta)}{\cos \theta} \right)^2$$

Observando el diagrama de radiación vemos que hay un valor máximo cuando  $\theta = \pi/3$ , y otros dos lóbulos laterales pequeños.

Para el ángulo  $\theta = \pi/3$

$$(I_R)_{\text{máx}} = \frac{120}{\pi} I_o^2 \left( \operatorname{sen}(\pi/3) \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/3)} \right)^2 \simeq 1,5 \times \frac{120}{\pi} I_o^2 \simeq \frac{180}{\pi} I_o^2$$

La directividad será,

$$D(\pi/3) = \frac{4\pi(I_R)_{\text{máx}}}{P} = \frac{4\pi \times (180/\pi) I_o^2}{181,94 I_o^2} \simeq 3,957$$

Para el ángulo  $\theta = 2\pi/3$

$$(I_R)_{\text{máx}} = \frac{120}{\pi} I_o^2 \left( \operatorname{sen}(2\pi/3) \frac{\operatorname{sen}(-\pi/4)}{\cos(2\pi/3)} \right)^2 = \frac{120}{\pi} \times 1,5 I_o^2$$

Es decir, el mismo valor que para  $\theta = \pi/3$ , por tanto la directividad será también la misma que en el caso anterior.

$$D(2\pi/3) = D(\pi/3) \simeq 3,957$$

### PROBLEMA 13.24

Sobre el eje Z se mueve una carga  $q$ . El movimiento de la carga obedece a la ecuación  $z = z_o \cos \omega t$ . ¿Se radia un campo electromagnético?

**Solución**

Obtenemos los campos aplicando las ecuaciones (13.156) y (13.157) deducidas para un grupo de carga en movimiento con momento dipolar  $\mathbf{p}(t-r/c)$ .

En nuestro caso el momento dipolar es:

$$\mathbf{p}(t-r/c) = \mathbf{u}_z qz_o \cos(\omega t - r/c)$$

La derivada segunda con respecto al tiempo será,

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} = -\mathbf{u}_z qz_o \omega^2 \cos(\omega t - r/c)$$

El campo magnético se obtiene aplicando la ecuación (13.156),

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{u}_z qz_o \omega^2 \cos(\omega t - r/c)$$

Como  $\mathbf{r} \times \mathbf{u}_z = -r \mathbf{u}_\varphi$ ,

$$\mathbf{H} = -\mathbf{u}_\varphi \frac{1}{4\pi c} \frac{qz_o \omega^2}{r} \sin \theta \cos(\omega t - r/c)$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando la ecuación (13.157) o la (13.159), por tanto,

$$\mathbf{E} = \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{4\pi c} \frac{qz_o \omega^2}{r} \sin \theta \cos(\omega t - r/c)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}_\theta \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi c} \frac{qz_o \omega^2}{r} \sin \theta \cos(\omega t - r/c)$$

La partícula en movimiento radia los campos que hemos obtenido por que su momento dipolar depende del tiempo y su derivada segunda no es nula. Es decir, la partícula tiene un movimiento acelerado, ya que la derivada segunda de  $z = z_o \cos \omega t$  es distinta de cero.

Observando los campos vemos que su diagrama de radiación depende de  $\sin \theta$ , que es el mismo que obtuvimos para el dipolo elemental.

**PROBLEMA 13.25**

Sustituyendo en la ecuación (13.156) el momento dipolar por la corriente  $i = (I_o l / j\omega) \cos(\omega t)$  en la dirección del eje Z, comprobar que obtenemos el campo magnético producido por un dipolo elemental.

**Solución**

Comenzamos calculando la derivada segunda del momento dipolar, sustituyendo dicho momento por la corriente  $(I_o l / j\omega) \cos(\omega t)$ .

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{I_o l}{j\omega} \cos(\omega t) \right) = -\frac{I_o l}{j\omega} \omega^2 \cos(\omega t) = j\omega I_o l \cos(\omega t)$$

El campo magnético será,

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi c r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{u}_z (j\omega I_0 l \cos(\omega t - r/c))$$

Como  $\mathbf{r} \times \mathbf{u}_z = -r \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}_\varphi$ ,

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{4\pi c r} \operatorname{sen} \theta (j\omega I_0 l \cos(\omega t - r/c))$$

Dado que  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  y  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , operando en la relación anterior queda el campo magnético de la siguiente forma,

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_\varphi \frac{jk I_0 l}{4\pi r} \operatorname{sen} \theta (\cos(\omega t - r/c))$$

que es el mismo que figura en la ecuación (13.132) si en ella multiplicamos por  $\exp(j\omega t)$  y tomamos la parte real de  $\exp(j(\omega t - kr))$ .

### PROBLEMA 13.26

Sobre una circunferencia de radio  $a$ , situada en el plano XY, se mueve una carga  $q$ . La carga gira sobre la circunferencia con velocidad angular constante  $\omega$ . ¿Se radia un campo electromagnético?

#### Solución

La contestación es afirmativa por que en este movimiento de la partícula se produce una aceleración, ya que la velocidad cambia de dirección de un punto a otro de la órbita.

Para demostrarlo suponemos que el vector de posición de la carga es  $\mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho$ , y en el giro  $\varphi = \omega t$ ; la velocidad en el plano XY será,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = a \frac{d\mathbf{u}_\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = a \frac{d\mathbf{u}_\rho}{d\varphi} \omega$$

Como las derivadas de los vectores unitarios en cilíndricas son:

$$\frac{d\mathbf{u}_\rho}{d\varphi} = \mathbf{u}_\varphi \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\varphi}{d\varphi} = -\mathbf{u}_\rho$$

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = a\mathbf{u}_\varphi \omega$$

La derivada segunda, es decir, la aceleración será,

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = a\omega \frac{d\mathbf{u}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -a\omega^2 \mathbf{u}_\rho$$

Por lo tanto la aceleración se dirige hacia el centro de la circunferencia, aceleración centrípeta, y su módulo es  $a\omega^2$ . Con lo que se demuestra que la carga sufre una aceleración y en consecuencia se produce radiación.

Un análisis cuantitativo de la potencia radiada se puede obtener introduciendo el momento dipolar de la carga que en este caso es  $\mathbf{p} = aq\mathbf{u}_\rho$ . El

giro del dipolo con velocidad angular  $\omega$  nos lleva a un sistema equivalente a dos dipolos oscilantes situados sobre los ejes X e Y.

Al girar el dipolo cambia su orientación de manera que podemos expresar una posición genérica del momento dipolar de la forma siguiente,

$$\mathbf{p} = aq\mathbf{u}_\rho = p_o\mathbf{u}_\rho$$

Como la carga se mantiene en el plano XY  $\mathbf{u}_\rho$  está siempre sobre dicho plano. Y podemos descomponer el momento dipolar mediante sus componentes sobre los ejes X e Y. Es decir,

$$\mathbf{p} = p_o \cos \varphi \mathbf{u}_x + p_o \sin \varphi \mathbf{u}_y = p_o(\cos \omega t \mathbf{u}_x + \sin \omega t \mathbf{u}_y) \quad (13.26.1)$$

*Campos eléctrico y magnético*

La solución para el campo magnético en el caso del dipolo  $\mathbf{p}$  se obtiene aplicando la ecuación (13.156) a un dipolo que oscila sinusoidalmente con una pulsación  $\omega$ . En primer lugar calculamos la derivada segunda con respecto al tiempo,

$$\frac{d^2}{dt^2} p_o(\cos \omega t \mathbf{u}_x + \sin \omega t \mathbf{u}_y) = -\omega^2 p_o(\cos \omega t \mathbf{u}_x + \sin \omega t \mathbf{u}_y) = -\omega^2 \mathbf{p}$$

En forma exponencial,

$$\cos \omega t = \text{Re}(\exp j\omega t) ; \sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2) = \text{Re}(\exp j(\omega t - \pi/2))$$

Como  $\exp(-j\pi/2) = -j$ , y teniendo en cuenta el tiempo retardado

$$-\omega^2 \mathbf{p} = -\omega^2 p_o \exp j(\omega t - kr)(\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y) \quad (13.26.2)$$

El punto del espacio donde observamos los campos se expresa mediante el vector de posición  $\mathbf{r}$  en coordenadas esféricas, por tanto debemos transformar los vectores unitarios de la ecuación anterior de cartesianas a esféricas mediante las siguientes relaciones,

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi \quad (13.26.3)$$

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos \varphi$$

Sustituyendo en la derivada segunda de  $\mathbf{p}$ ,

$$-\omega^2 \mathbf{p} = -\omega^2 p_o \exp j(\omega t - kr) \{ \mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi - j(\mathbf{u}_r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos \varphi) \}$$

El producto vectorial de la derivada segunda por el vector de posición es,

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t - r/c) = -\omega^2 \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\omega^2 r \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}$$

Como  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r = 0$ ,  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi$  y  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_\theta$

$$-\omega^2 r \mathbf{u}_r \times \mathbf{p} = -\omega^2 p_o r \exp j(\omega t - kr) \{ \mathbf{u}_\theta (\sin \varphi + j \cos \varphi) + \mathbf{u}_\varphi (\cos \theta (-j \sin \varphi + \cos \varphi)) \}$$

La intensidad de campo magnético será,

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) \{ \mathbf{u}_\theta (\sin \varphi + j \cos \varphi) + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta (\cos \varphi - j \sin \varphi) \}$$

Como  $(\sin \varphi + j \cos \varphi) = -j(-\cos \varphi + j \sin \varphi) = j(\cos \varphi - j \sin \varphi)$ , sacando factor común  $\cos \varphi - j \sin \varphi = \exp(-j\varphi)$ , la intensidad de campo magnético será,

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \{ j \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta \} \quad (13.26.4)$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando la ecuación (13.159),

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \mathbf{u}_r \times \{ j \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta \}$$

Evaluando el producto vectorial en coordenadas esféricas,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & \cos \theta \end{vmatrix} = -\mathbf{u}_\theta \cos \theta + j \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \{ -\mathbf{u}_\theta \cos \theta + j \mathbf{u}_\varphi \}$$

Operando con los signos,

$$\mathbf{E} = \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \{ \mathbf{u}_\theta \cos \theta - j \mathbf{u}_\varphi \} \quad (13.26.5)$$

La forma de los campos muestra que para  $\theta = 0$   $\cos \theta = 1$  y  $\theta = \pi$   $\cos \pi = -1$ , los campos corresponden a una onda polarizada circularmente. Para  $\theta = \pi/2$   $\cos \pi/2 = 0$ , la polarización es lineal.

*Potencia radiada*

Calculamos en primer lugar el valor medio del vector de Poynting,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \frac{Z_o}{r^2} \text{Re} \{ (\mathbf{u}_\theta \cos \theta - j \mathbf{u}_\varphi) \times (-j \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta) \}$$

Realizando el siguiente producto vectorial,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ 0 & \cos \theta & j \\ 0 & -j & \cos \theta \end{vmatrix} = \mathbf{u}_r (1 + \cos^2 \theta)$$

El valor medio del vector de Poynting es,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_r \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \frac{Z_o}{r^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (13.26.6)$$

La potencia radiada será,

$$\langle P \rangle = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Los límites de integración son 0 y  $\pi$  para  $\theta$ , 0 y  $2\pi$  para  $\varphi$ .

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z_o \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

Mediante la integración tenemos la siguiente expresión para la potencia radiada,

$$\langle P \rangle = \frac{8}{3} \pi Z_o \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2$$

Si realizamos operaciones y tenemos en cuenta el valor de  $Z_o$

$$\langle P \rangle = Z_o \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi c^2} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \quad (13.26.7)$$

Podemos comparar la ecuación anterior con la que se obtiene utilizando la relación (13.163) para la potencia radiada por un dipolo.

En el caso de los dos dipolos estudiados aquí, como el valor medio de la parte temporal de los dipolos es,

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \pi/2) dt = \frac{1}{2}$$

Tomando los valores de la derivada segunda de  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  y elevando al cuadrado tenemos que,

$$\begin{aligned} \langle P_1 \rangle &= \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \\ \langle P_2 \rangle &= \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \pi/2) dt = \frac{1}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \end{aligned}$$

Podemos comprobar que,

$$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle \quad (13.26.8)$$

**PROBLEMA 13.27**

Tenemos un anillo circular de radio  $a$  y sección despreciable frente al radio. Está situado en el plano  $XY$  con centro en el origen  $O$ . Dicho anillo está compuesto por un dieléctrico ideal (aislante perfecto). Sobre el anillo hay una distribución lineal de carga  $\lambda = \lambda_o \text{sen}(\varphi/2)$ .

El anillo gira con una velocidad angular  $\omega$  constante alrededor del eje  $Z$ , manteniéndose en el plano  $XY$ .

Calcular los campos radiados y el valor medio del vector de Poynting en la zona de radiación. ¿Qué ocurre si  $\lambda = \lambda_o$ ?

**Solución**

Lo primero que debemos calcular es el momento dipolar de la distribución lineal de carga.

$$\mathbf{p} = \int_C \mathbf{r}' \lambda dl$$

Como  $\mathbf{r}' = a \cos \varphi \mathbf{u}_z + a \text{sen} \varphi \mathbf{u}_x$  y  $dl = a d\varphi$  y los límites de integración sobre el camino  $C$  son  $0$  y  $2\pi$ ,

$$\mathbf{p} = \int_0^{2\pi} (a \cos \varphi \mathbf{u}_x + a \text{sen} \varphi \mathbf{u}_y) \text{sen}(\varphi/2) a d\varphi$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{u}_x \int_0^{2\pi} \lambda_o a^2 \cos \varphi \text{sen}(\varphi/2) d\varphi + \mathbf{u}_y \int_0^{2\pi} \lambda_o a^2 \text{sen} \varphi \text{sen}(\varphi/2) a d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \text{sen}(\varphi/2) d\varphi = \left[ -\frac{1}{3} \cos \frac{3}{2}\varphi + \cos \frac{1}{2}\varphi \right]_0^{2\pi} = -\frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen} \varphi \text{sen}(\varphi/2) d\varphi = \left[ \text{sen} \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{3} \text{sen} \frac{3}{2}\varphi \right]_0^{2\pi} = 0$$

por tanto,

$$\mathbf{p} = -\frac{4}{3} \lambda_o a^2 \mathbf{u}_x = p_o \mathbf{u}_x \quad (13.27.1)$$

Con

$$p_o = -\frac{4}{3} \lambda_o a^2$$

Al girar el anillo el dipolo cambia su orientación de manera que podemos expresar una posición genérica del momento dipolar en el plano  $XY$  de la forma siguiente,

$$\mathbf{p} = p_o \mathbf{u}_\rho$$

Como el anillo se mantiene en el plano  $XY$   $\mathbf{u}_\rho$  esta siempre sobre dicho plano. Y podemos descomponer el momento dipolar mediante sus componentes sobre los ejes  $X$  e  $Y$ . Es decir,

$$\mathbf{p} = p_o \cos \varphi \mathbf{u}_x + p_o \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_y$$

El giro del anillo se expresa relacionado  $\varphi$  con la velocidad angular  $\omega$ , de manera que,

$$\varphi = \omega t$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos la descomposición del dipolo giratorio en dos dipolos oscilantes situados respectivamente sobre los ejes X e Y,

$$\mathbf{p} = p_o \cos \omega t \mathbf{u}_x + p_o \operatorname{sen} \omega t \mathbf{u}_y \quad (13.27.2)$$

Estamos en un caso similar al de el problema anterior. La única diferencia es el módulo del momento dipolar, por tanto podemos hacer un análisis similar.

#### *Campos eléctrico y magnético*

La solución para el campo magnético en el caso del dipolo  $\mathbf{p}$  se obtiene aplicando la ecuación (13.156) a un dipolo que oscila sinusoidalmente con una pulsación  $\omega$ . En primer lugar calculamos la derivada segunda con respecto al tiempo,

$$\frac{d^2}{dt^2} p_o (\cos \omega t \mathbf{u}_x + \operatorname{sen} \omega t \mathbf{u}_y) = -\omega^2 p_o (\cos \omega t \mathbf{u}_x + \operatorname{sen} \omega t \mathbf{u}_y) = -\omega^2 \mathbf{p}$$

En forma exponencial,

$$\cos \omega t = \operatorname{Re} (\exp j\omega t) ; \operatorname{sen} \omega t = \cos(\omega t - \pi/2) = \operatorname{Re} (\exp j(\omega t - \pi/2))$$

Como  $\exp(-j\pi/2) = -j$ , y teniendo en cuenta el tiempo retardado

$$-\omega^2 \mathbf{p} = -\omega^2 p_o \exp j(\omega t - kr) (\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y) \quad (13.27.3)$$

El punto del espacio donde observamos los campos se expresa mediante el vector de posición  $\mathbf{r}$  en coordenadas esféricas, por tanto debemos transformar los vectores unitarios de la ecuación anterior de cartesianas a esféricas mediante las siguientes relaciones,

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \operatorname{sen} \varphi \quad (13.27.4)$$

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos \varphi$$

Sustituyendo en la derivada segunda de  $\mathbf{p}$ ,

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{p} = & -\omega^2 p_o \exp j(\omega t - kr) \{ \mathbf{u}_r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \operatorname{sen} \varphi \\ & -j(\mathbf{u}_r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos \varphi) \} \end{aligned}$$

El producto vectorial de la derivada segunda por el vector de posición es,

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t - r/c) = -\omega^2 \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\omega^2 r \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}$$

Como  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r = 0$ ,  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi$  y  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_\theta$

$$-\omega^2 r \mathbf{u}_r \times \mathbf{p} = -\omega^2 p_o r \exp j(\omega t - kr) \{ \mathbf{u}_\theta (\text{sen } \varphi + j \cos \varphi) + \mathbf{u}_\varphi (\cos \theta (-j \text{sen } \varphi + \cos \varphi)) \}$$

La intensidad de campo magnético será,

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) \{ \mathbf{u}_\theta (\text{sen } \varphi + j \cos \varphi) + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta (\cos \varphi - j \text{sen } \varphi) \}$$

Como  $(\text{sen } \varphi + j \cos \varphi) = -j(-\cos \varphi + j \text{sen } \varphi) = j(\cos \varphi - j \text{sen } \varphi)$ , sacando factor común  $\cos \varphi - j \text{sen } \varphi = \exp(-j\varphi)$ , la intensidad de campo magnético será,

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \{ j \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta \} \quad (13.27.5)$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando la ecuación (13.157),

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \mathbf{u}_r \times \{ j \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta \}$$

Evaluando el producto vectorial en coordenadas esféricas,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & \cos \theta \end{vmatrix} = -\mathbf{u}_\theta \cos \theta + j \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \{ -\mathbf{u}_\theta \cos \theta + j \mathbf{u}_\varphi \}$$

Operando con los signos,

$$\mathbf{E} = \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} \exp j(\omega t - kr) e^{-j\varphi} \{ \mathbf{u}_\theta \cos \theta - j \mathbf{u}_\varphi \} \quad (13.27.6)$$

La forma de los campos muestra que para  $\theta = 0$   $\cos \theta = 1$  y  $\theta = \pi$   $\cos \pi = -1$ , los campos corresponden a una onda polarizada circularmente. Para  $\theta = \pi/2$   $\cos \pi/2 = 0$ , la polarización es lineal.

*Potencia radiada*

Calculamos en primer lugar el valor medio del vector de Poynting,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \frac{Z_o}{r^2} \operatorname{Re} \{ (\mathbf{u}_\theta \cos \theta - j \mathbf{u}_\varphi) \times (-j \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta) \}$$

Realizando el siguiente producto vectorial,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ 0 & \cos \theta & j \\ 0 & -j & \cos \theta \end{vmatrix} = \mathbf{u}_r (1 + \cos^2 \theta)$$

El valor medio del vector de Poynting es,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_r \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \frac{Z_o}{r^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (13.27.7)$$

La potencia radiada será,

$$\langle P \rangle = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Los límites de integración son 0 y  $\pi$  para  $\theta$ , 0 y  $2\pi$  para  $\varphi$ .

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z_o \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

Mediante la integración tenemos la siguiente expresión para la potencia radiada,

$$\langle P \rangle = \frac{8}{3} \pi Z_o \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2$$

Si realizamos operaciones y tenemos en cuenta el valor de  $Z_o$

$$\langle P \rangle = Z_o \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi c^2} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \quad (13.27.8)$$

Podemos comparar la ecuación anterior con la que se obtiene utilizando la relación (13.163) para la potencia radiada por un dipolo.

En el caso de los dos dipolos estudiados aquí, como el valor medio de la parte temporal de los dipolos es,

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \pi/2) dt = \frac{1}{2}$$

Tomando los valores de la derivada segunda de  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  y elevando al cuadrado tenemos que,

$$\begin{aligned} \langle P_1 \rangle &= \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \\ \langle P_2 \rangle &= \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \pi/2) dt = \frac{1}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \end{aligned}$$

Podemos comprobar que,

$$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle \quad (13.27.9)$$

¿Qué ocurre si  $\lambda = \lambda_0$ ?

Si la distribución de carga lineal es uniforme el momento dipolar es nulo por tanto será nula la derivada segunda de dicho momento y no hay campos radiados.

La carga y la corriente del anillo no varían con el tiempo. Estamos en el caso de un anillo por el que circula una corriente uniforme que genera un campo magnético cuyo valor podemos calcular mediante la ley de Biot y Savart. El campo eléctrico que se crea también es estático y se obtiene aplicando las ecuaciones de electrostática a un anillo con densidad lineal de carga  $\lambda_0$ .

### PROBLEMA 13.28

Un sistema está compuesto por dos dipolos elementales situados respectivamente sobre el eje X el eje Y. Dichos dipolos oscilan de la forma siguiente:  $\mathbf{p}_1 = p_0 \cos \omega t \mathbf{u}_x$  y  $\mathbf{p}_2 = p_0 \cos \omega t \mathbf{u}_y$ .

Obtener los campos eléctrico y magnético en la zona de radiación. Calcular la potencia radiada.

#### Solución

El momento del conjunto será,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = p_0 \cos \omega t (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad (13.28.1)$$

*Campos eléctrico y magnético*

La solución para el campo magnético en el caso del dipolo  $\mathbf{p}$  se obtiene aplicando la ecuación (13.156) a un dipolo que oscila sinusoidalmente con una pulsación  $\omega$ . En primer lugar calculamos la derivada segunda con respecto al tiempo,

La derivada segunda del momento dipolar es,

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{d^2}{dt^2} p_0 \cos \omega t (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) = -\omega^2 p_0 \cos \omega t (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) = -\omega^2 \mathbf{p}$$

En forma exponencial y considerando el tiempo de retardo, la derivada segunda es la parte real de la siguiente expresión,

$$\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 p_0 \exp(j\omega t - kr) (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad (13.28.2)$$

El punto del espacio donde observamos los campos se expresa mediante el vector de posición  $\mathbf{r}$  en coordenadas esféricas, por tanto debemos transformar los vectores unitarios de la ecuación anterior de cartesianas a esféricas mediante las siguientes relaciones,

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi \quad (13.28.3)$$

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos \varphi$$

Sustituyendo en la derivada segunda de  $\mathbf{p}$ ,

$$-\omega^2 \mathbf{p} = -\omega^2 p_o \exp j(\omega t - kr) \{(\mathbf{u}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \sin \varphi) + (\mathbf{u}_r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos \varphi)\}$$

El producto vectorial de la derivada segunda por el vector de posición es,

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t - r/c) = -\omega^2 \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\omega^2 r \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}$$

Como  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r = 0$ ,  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi$  y  $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_\theta$

$$-\omega^2 r \mathbf{u}_r \times \mathbf{p} = -\omega^2 p_o r \exp j(\omega t - kr) \{ \mathbf{u}_\theta (\sin \varphi - \cos \varphi) + \mathbf{u}_\varphi (\cos \theta (\cos \varphi + \sin \varphi)) \}$$

La intensidad de campo magnético será,

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} e^{j(\omega t - kr)} \{ \mathbf{u}_\theta (\cos \varphi - \sin \varphi) + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \} \quad (13.28.4)$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando la ecuación (13.159),

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{u}_r \times \{ \mathbf{u}_\theta (\cos \varphi - \sin \varphi) + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \}$$

Evaluando el producto vectorial mediante la regla del producto de dos vectores en coordenadas esféricas,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\cos \varphi - \sin \varphi) & \cos \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \end{vmatrix}$$

Considerando que  $Z_o = (\mu_o/\epsilon_o)^{1/2}$  y operando con los signos,

$$\mathbf{E} = Z_o \frac{\omega^2 p_o}{4\pi r c} e^{j(\omega t - kr)} \{ \mathbf{u}_\theta \cos \theta (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) - \mathbf{u}_\varphi (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) \} \quad (13.28.5)$$

La forma de los campos corresponden a una onda con polarización lineal, cuyas componentes depende de las coordenadas  $\theta$  y  $\varphi$  de cada punto considerado.

*Potencia radiada*

Calculamos en primer lugar el valor medio del vector de Poynting,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \frac{Z_o}{r^2} \operatorname{Re} \left( \mathbf{u}_\theta \cos \theta (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) - \mathbf{u}_\varphi (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) \right) \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{u}_\theta (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) + \mathbf{u}_\varphi \cos \theta (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) \right\} \end{aligned}$$

Realizando el siguiente producto vectorial,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ 0 & \cos \theta (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) & -(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) \\ 0 & (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) & \cos \theta (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) \end{vmatrix}$$

El valor medio del vector de Poynting es,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{u}_r \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \frac{Z_o}{r^2} \left( (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi)^2 \cos^2 \theta + (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi)^2 \right) \quad (13.28.6)$$

La potencia radiada será,

$$\langle P \rangle = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{u}_r r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi$$

Los límites de integración son 0 y  $\pi$  para  $\theta$ , 0 y  $2\pi$  para  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{Z_o}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi)^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi)^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \right\} \end{aligned}$$

Integrando con respecto a  $\theta$  tenemos,

$$\langle P \rangle = \frac{Z_o}{2} \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{3} (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi)^2 + 2(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi)^2 \right) d\varphi$$

Integrando con respecto a  $\varphi$  el resultado será,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z_o \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2 \frac{16}{3} \pi = \frac{8}{3} \pi Z_o \left( \frac{\omega^2 p_o}{4\pi c} \right)^2$$

Si realizamos operaciones y tenemos en cuenta el valor de  $Z_o$

$$\langle P \rangle = Z_o \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi c^2} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \right) \quad (13.28.7)$$

Podemos comparar la ecuación anterior con la que se obtiene utilizando la relación (13.163) para la potencia radiada por un dipolo.

En el caso de los dos dipolos estudiados aquí, como el valor medio de la parte temporal de los dipolos es,

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

Tomando los valores de la derivada segunda del  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  y elevando al cuadrado tenemos que,

$$\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{3} \frac{p_o^2 \omega^4}{4\pi \epsilon_o c^3}$$

Podemos comprobar que,

$$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle \quad (13.28.8)$$

## Capítulo 14

# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

### 14.1 INTRODUCCIÓN

En la teoría de campos se estudia el comportamiento del campo electromagnético. En la de circuitos se analizan las relaciones entre las corrientes que circulan por los elementos del circuito, las tensiones en sus bornes y los parámetros que caracterizan los elementos de circuito.

La teoría de circuitos fue desarrollada independientemente de la teoría de campos. Basándose en leyes experimentales como la de Ohm, y aplicando los principios de conservación de la carga y energía que dan lugar a las leyes de Kirchhoff para nudos y mallas, se elabora la teoría de circuitos.

Cuando el tamaño del circuito o elemento de circuito es muy pequeño comparado con la longitud de onda que corresponde a la frecuencia de la corriente o tensión utilizada, campos cuasi-estáticos, se puede caracterizar cada elemento de circuito por un parámetro, resistencia  $R$ , capacidad  $C$ , etc. Los circuitos así caracterizados reciben el nombre de circuitos de parámetros localizados (concentrados) por que se supone la capacidad, resistencia, etc., localizada en un punto o zona limitada del circuito. En estos casos se aplica la teoría de circuitos.

Para frecuencias elevadas, cuando la longitud de onda es comparable con el tamaño del circuito, no se puede considerar, por ejemplo, la capacidad concentrada en un punto, ya que el campo en dicho condensador en un instante puede ser distinto en el centro que en los bordes. Esto ocurre para frecuencias superiores a los 500 MHz, llamada zona de las microondas. Con estas frecuencias se tiene que aplicar la teoría de campos para analizar el comportamiento de circuitos y sus componentes.

En este capítulo estudiamos los circuitos de parámetros concentrados en dos casos: Cuando se producen fenómenos transitorios derivados de cambios bruscos en la tensión o corriente y al aplicar tensiones sinusoidales permanentes, régimen permanente.

### 14.1.1 FENÓMENOS TRANSITORIOS

Se conoce como fenómenos transitorios a los que se observan en circuitos cuando se produce en ellos un cambio brusco de las condiciones de funcionamiento. Esto sucede al modificar repentinamente alguno de los parámetros del circuito o la tensión aplicada. El ejemplo más común es la conexión o desconexión de un voltaje constante.

Consideramos que todos los componentes que intervienen son ideales, es decir, las resistencias, condensadores, inductancias y generadores son ideales, por lo que cada componente queda perfectamente identificado con el símbolo que le representa. También suponemos que dichos componentes son lineales y localizados en la zona del circuito que se indique.

#### 14.1.1.1 Circuito $R - L$ serie

Se denomina circuito  $R - L$  serie al formado por la conexión en serie de una resistencia y una autoinducción.

En una resistencia ideal, cuando la atraviesa una corriente, siempre hay disipación de energía por efecto Joule. El parámetro que caracteriza una resistencia se representa por  $R$ .

Un inductor o inductancia, en sus forma más usual, consisten en una bobina formada por arrollamiento de un buen conductor sobre un cilindro y se caracteriza por un coeficiente de autoinducción representado por la letra  $L$ . Este dispositivo, cuando lo atraviesa una corriente, almacena una energía magnética en su entorno. Un solenoide es un dispositivo con estas características, y en él tanto campo como energía magnética se concentra en su interior. Hay una gran variedad de dispositivos que no teniendo la forma de bobina también llevan asociado un coeficiente de autoinducción, y cuando circula por ellos una corriente se almacena una energía magnética en su entorno.

#### *Corriente de conexión*

Dado un circuito con resistencia e inductancia en serie, circuito  $R - L$  serie, como el indicado en la figura 14.1, nos interesa conocer la corriente que circula por el circuito cuando se le aplica un voltaje constante  $V_0$ ; es decir, cuando el conmutador  $S$  pasa de la posición 2 a la 1.

La corriente se calcula resolviendo la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del circuito. Dicha ecuación diferencial se obtiene aplicando la ley de Kirchhoff para los voltajes:

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum R_i i_i$$

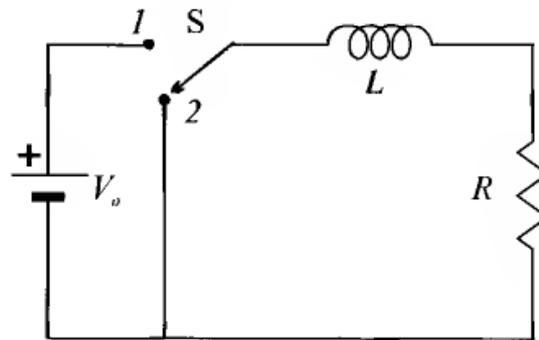


Figura 14.1

En el caso del circuito que nos ocupa los valores de  $\mathcal{E}_i$  son por un lado la que corresponde a la batería unida al circuito y por otro la fuerza electromotriz inducida en la autoinducción  $L$  cuando varía la corriente que circula por ella. Dicha f.e.m. es, como se demuestra al estudiar la inducción electromagnética, igual a  $-L(di/dt)$ ; el signo menos indica que se opone al paso de corriente que la origina. La suma de fuerzas electromotrices será,

$$\sum \mathcal{E}_i = V_o - L \frac{di}{dt}$$

El segundo miembro, dado que sólo hay una resistencia, es

$$\sum R_i i_i = R i$$

La forma habitual de expresar la ecuación diferencial que resume lo dicho anteriormente es,

$$L \frac{di}{dt} + R i = V_o \quad (14.1)$$

La solución de la ecuación anterior se obtiene de la forma siguiente: Primero resolvemos la ecuación homogénea y después añadimos la solución particular de la no homogénea.

La solución general es:

$$i = M \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) + \frac{V_o}{R} \quad (14.2)$$

La constante de integración  $M$  se determina aplicando las condiciones iniciales del circuito.

Cuando  $t = 0$  la variación de la corriente  $i$  es muy rápida y la f.e.m. inducida que se opone a la variación de corriente es igual a  $V_o$ , por tanto  $i(0) = 0$ . Llevando esta condición a la ecuación (14.2) obtenemos,

$$M = -\frac{V_o}{R}$$

Sustituyendo el valor de  $M$  en la ecuación (14.2) tendremos  $i$ ,

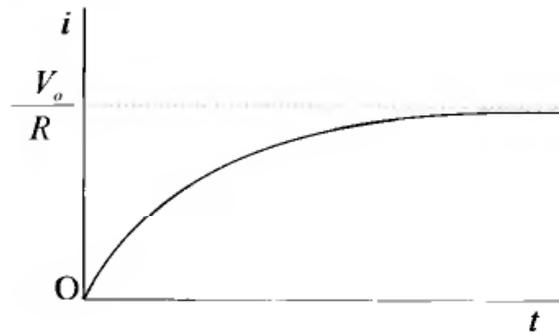
$$i = \frac{V_o}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L}t)) = \frac{V_o}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \quad (14.3)$$

La ecuación (14.3) expresa el comportamiento de la corriente en el circuito  $R-L$  cuando se le aplica repentinamente un voltaje  $V_o$ . La representación gráfica de dicha corriente se indica en la figura 14.2.

La corriente parte de un valor nulo para  $t = 0$  y alcanza el valor  $V_o/R$  para  $t = \infty$ . Es decir, inicialmente la inductancia se opone al paso de la corriente y cuando transcurre tiempo el único elemento que limita la corriente es la resistencia  $R$ . Vemos, por tanto, que la inductancia se opone a los cambios bruscos de corriente.

#### *Constante de tiempo del circuito $R-L$*

Dado que la corriente tiene una variación exponencial con el tiempo, el valor final  $V_o/R$ , tarda mucho tiempo en alcanzarse. Por este motivo interesa calcular un parámetro que nos indique la rapidez con que se alcanza un valor significativo de la corriente.



**Figura 14.2**

Si observamos la ecuación (14.3), cuando el exponente es la unidad,  $(R/L)t = 1$ , la corriente es,

$$i = \frac{V_o}{R}(1 - \exp(-1)) \simeq \frac{V_o}{R}(1 - 0,368)$$

$$i \simeq \frac{V_o}{R} 0,632$$

De lo anterior se deduce que para  $t = L/R = \tau$ , la corriente alcanza prácticamente el 63% del valor final. La constante

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (14.4)$$

recibe el nombre de **constante de tiempo** del circuito  $R - L$ , y es un parámetro que nos da idea del predominio de la componente inductiva sobre la resistiva, o viceversa. Además nos indica la rapidez con que se alcanza un valor significativo de la corriente (el 63,2% de su valor final). La constante  $\tau$  tiene dimensiones de tiempo.

#### 14.1.1.2 Circuito $R - C$ serie

Un circuito  $R - C$  serie se caracteriza por que se asocian una resistencia  $R$  y un condensador  $C$  en serie. En el apartado anterior enunciamos las características de la resistencia e inducción, ahora describiremos el condensador.

Un condensador es un sistema de conductores caracterizado por que uno de los conductores encierra al otro de manera que ambos tienen cargas iguales pero de signo opuesto. Un ejemplo de este tipo lo constituyen una capa esférica conductora unida a tierra y en su interior una esfera conductora de menor radio con una carga  $Q$ . En la capa esférica se induce una carga  $-Q$  y por tanto se cumplen las características que definen un condensador.

Las cargas externas al sistema no afectan a la diferencia de potencial entre ambos conductores ni a la carga del conductor interior, que siempre tiene el mismo valor absoluto que la distribuida por la cara interna del conductor externo.

Puede extenderse esta definición a dos conductores que no se apantallen por completo, se trata de dos placas o láminas, también conocidas con el nombre de armaduras, separadas por una distancia  $d$  muy pequeña comparada con las otras dimensiones de las placas. El medio entre placas suele ser un dieléctrico o el vacío. Las cargas siempre son del mismo módulo y signo opuesto, y la diferencia de potencial entre los conductores es proporcional a dicha carga.

La **capacidad** del sistema de conductores indicado anteriormente se **define** como la relación entre la carga común, tomada como positiva, y la diferencia de potencial entre los conductores.

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{u}$$

La capacidad del sistema es independiente de la carga  $Q$  y diferencia de potencial  $V_1 - V_2$ ,  $C$  es una constante que depende de la geometría del sistema de conductores y del dieléctrico que exista entre ellos.

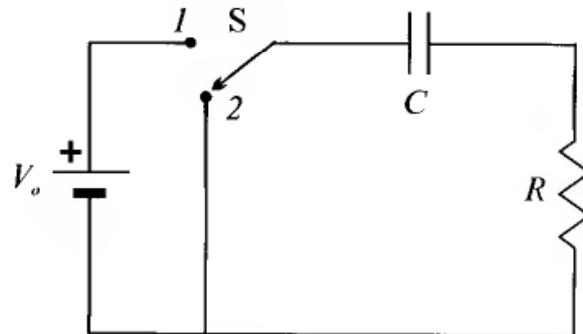
El condensador almacena energía electrostática entre sus placas o armaduras cuando se aplica una diferencia de potencial entre ellas.

Los condensadores que se usan habitualmente, su forma externa es cilíndrica, pero están constituidos por una lámina dieléctrica muy fina entre dos láminas conductoras, también muy delgadas. El conjunto de láminas se enrolla formando un cilindro.

Hay también gran variedad de formas derivadas del condensador plano, pero también hay dispositivos, que no son como los indicados anteriormente, caracterizados por tener una capacidad  $C$  y que almacenan energía electrostática cuando se aplica una tensión entre sus terminales.

### *Corriente de conexión*

En este apartado analizaremos el comportamiento de la corriente en un circuito  $R-C$  en serie como el indicado en la figura 14.3 cuando se le conecta a un generador; es decir, cuando el conmutador  $S$  pasa de la posición 2 a la 1.



**Figura 14.3**

La forma de operar es similar al caso del circuito  $R-L$ . La conexión al generador se efectúa pasando el conmutador  $S$  de la figura 14.3 a la posición 1.

Aplicando la ley de Kirchhoff para voltajes obtenemos la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del circuito. En este caso, si  $q$  es la carga del condensador en cada instante, el voltaje entre las placas del condensador será  $u = q/C$ . Por tanto, la tensión aplicada  $V_o$  es igual a la caída de tensión en la resistencia más la correspondiente al condensador, es decir,

$$V_o = \frac{q}{C} + R i \quad (14.5)$$

Dado que  $i = dq/dt$ , la ecuación anterior queda de la forma,

$$V_o = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} \quad (14.6)$$

La solución se obtiene de forma similar al caso del circuito  $R-L$ , ya que es el mismo tipo de ecuación diferencial.

La solución general es:

$$q = N \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + V_o C$$

Como en el caso anterior, para determinar la constante  $N$  aplicamos las condiciones iniciales. En este caso, si suponemos inicialmente descargado el condensador  $C$ , en  $t = 0$ ,  $q = 0$ , de donde se deduce que,

$$N = -V_o C$$

Por tanto,

$$q = V_o C \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \quad (14.7)$$

La expresión para la corriente se obtiene derivando la ecuación (14.9) con respecto al tiempo. La corriente es de la forma:

$$i = \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (14.8)$$

Es decir, la corriente varía desde el valor inicial  $V_o/R$  hasta cero para  $t = \infty$ . Este resultado expresa que el valor inicial de la corriente sólo está limitado por la resistencia  $R$  ya que el condensador, en el instante inicial, se comporta como un cortocircuito (el voltaje entre sus placas es nulo cuando  $q = 0$ ).

La representación gráfica de las variaciones de  $q$  e  $i$  con el tiempo se muestra en la figura 14.4a y b.

#### *Constante de tiempo del circuito $R-C$*

Operando de forma análoga al caso del circuito  $R-L$  obtenemos que para  $t = RC$ , tanto la carga expresada por la ecuación (14.7) como la tensión  $u = q/C$ , alcanzan aproximadamente el 63,2% de su valor final. Al mismo tiempo la corriente  $i$  y el voltaje en bornes de la resistencia  $R$  decrecen hasta el 36,8% de su valor inicial.

Como establecíamos para el circuito  $R-L$ , en este caso la **constante de tiempo** es:

$$\tau = RC \quad (14.9)$$

$\tau$  nos muestra la rapidez con que se verifica el proceso de carga y descarga del condensador. En este circuito cuanto mayores sean  $R$  y  $C$  tanto más tardarán en alcanzarse los valores finales de  $q$  e  $i$  calculados anteriormente.

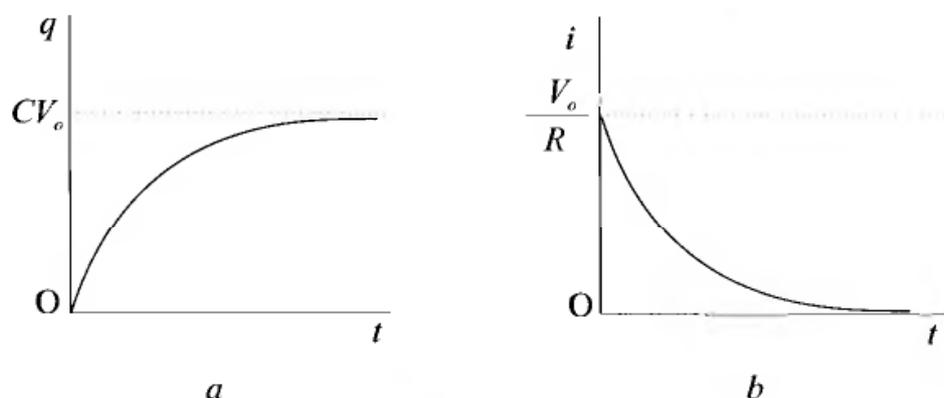


Figura 14.4

### 14.1.2 FENÓMENOS ESTACIONARIOS

Vamos a estudiar el comportamiento de circuitos eléctricos en el caso de que se aplique un voltaje de forma sinusoidal. Se supone, que tanto el generador como los componentes del circuito, son lineales.

Estudiar el comportamiento de un circuito sometido a un voltaje sinusoidal es la forma más sencilla de analizar los fenómenos estacionarios en un circuito eléctrico.

Existen generadores de voltaje periódico no sinusoidal. Cuando este tipo de voltaje se aplica a un circuito su respuesta es muy compleja, pero pueden analizarse los resultados partiendo de que todo voltaje periódico puede representarse mediante una serie de Fourier en la que cada término es de forma sinusoidal. Por esta razón interesa estudiar el comportamiento de circuitos cuando se les aplican voltajes sinusoidales, ya que los resultados son aplicables tanto al caso sinusoidal como al no sinusoidal.

#### 14.1.2.1 Circuito $R - L - C$ serie

Ahora vamos a estudiar un circuito formado por resistencia, condensador y una autoinducción dispuestos en serie con un generador cuyo voltaje es  $u = V_0 \cos \omega t$  como indica la figura 14.5.

La ecuación diferencial para voltajes, obtenida aplicando la ley de Kirchhoff que describe el comportamiento del circuito es,

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad (14.10)$$

El primer término es la f.e.m. inducida en la autoinducción  $L$ ,  $q/C$  la tensión en bornes del condensador y  $R$  la caída de tensión en la resistencia.

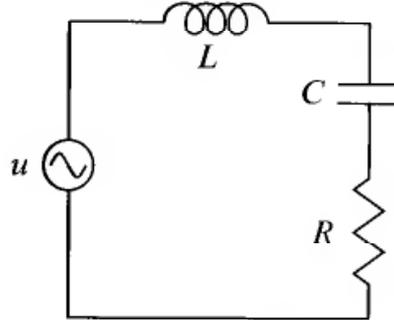


Figura 14.5

### Impedancia compleja

La ecuación (14.10) se puede resolver mediante magnitudes complejas. Teniendo en cuenta que,

$$V_o \exp(j\omega t) = V_o(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) \quad (14.11)$$

podemos sustituir en la ecuación (14.10) el voltaje sinusoidal por el complejo  $V_o \exp(j\omega t)$ , manteniendo in mente que el voltaje aplicado al circuito corresponde a la parte real de  $V_o \exp(j\omega t)$ . La ecuación diferencial (14.10), considerando que  $q = \int i dt$ , se convierte en la ecuación integro-diferencial siguiente,

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + Ri = V_o \exp(j\omega t) \quad (14.12)$$

La solución particular de esta ecuación es de la forma,

$$i = \mathbf{I}_o \exp(j\omega t) = \mathbf{I}_o e^{j\omega t} \quad (14.13)$$

Donde  $\mathbf{I}_o$  es, en general, un número complejo de la forma  $\mathbf{I}_o = I_o \exp(j\theta)$ .

La ecuación (14.12), calculando la derivada de  $i$  y la integral de  $i dt$ , queda de la forma siguiente,

$$(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R)\mathbf{I}_o \exp(j\omega t) = V_o \exp(j\omega t)$$

Dado que  $\exp(j\omega t)$  figura en los dos miembros de la igualdad, obtenemos para  $\mathbf{I}_o$  la siguiente relación,

$$\mathbf{I}_o = \frac{V_o}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (14.14)$$

Puede observarse que el empleo de magnitudes complejas, al desaparecer la dependencia temporal, transforma la ecuación integro-diferencial (14.12) en una ecuación algebraica de resolución más fácil.

El término,

$$\bar{Z} = \mathbf{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (14.15)$$

es la **impedancia compleja** correspondiente al circuito con  $R$ ,  $L$  y  $C$  en serie.

El **módulo de  $\mathbf{Z}$**  es:

$$Z = (R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)^{1/2} \quad (14.16)$$

Su **argumento** es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right) \quad (14.17)$$

El término  $\omega L = X_L$  se denomina **reactancia inductiva** y  $X_C = -1/\omega C$  es la **reactancia capacitiva**.

Se suele representar la **impedancia compleja** mediante el módulo y argumento, también conocida como forma polar, ya que  $Z$  es el radio y  $\theta$  el ángulo de vector  $\mathbf{Z}$  representado en coordenadas polares.

$$\bar{Z} = \mathbf{Z} = Z \exp(j\theta) = Z e^{j\theta} = Z(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta) \quad (14.18)$$

Siendo  $Z$  y  $\theta$  los valores dados por las ecuaciones (14.16) y (14.17).

Teniendo en cuenta esto, la solución para  $\mathbf{I}_o$  sería,

$$\mathbf{I}_o = \frac{V_o}{\mathbf{Z}} = \frac{V_o}{Z} e^{-j\theta} = \frac{V_o}{Z} \exp(-j\theta) = I_o \exp(-j\theta)$$

Si ahora añadimos la dependencia temporal tendríamos,

$$i = \mathbf{I}_o e^{j\omega t} = I_o \exp(j\omega t) = I_o \exp j(\omega t - \theta)$$

Su parte real es:

$$i = I_o \cos(\omega t - \theta)$$

Con,

$$I_o = \frac{V_o}{Z} \text{ y } \theta = \arctan\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right)$$

La solución pone de manifiesto lo siguiente: En primer lugar la corriente se desfasa con respecto al voltaje aplicado un ángulo  $\theta$ , que depende de  $\omega$ ,  $L$ ,  $R$  y  $C$ . En segundo lugar que la impedancia se compone de un término resistivo  $R$  y además de una reactancia inductiva  $\omega L$  y otra capacitiva  $-1/\omega C$ . Los valores de estos términos determinan si la corriente se

retrasa o adelanta sobre el voltaje aplicado. Cuando predomina la reactancia inductiva se retrasa y ocurre lo contrario cuando predomina la capacitiva.

#### Valores eficaces

También se suele representar el voltaje y la corriente por sus valores eficaces.

Se define el valor eficaz de una función de la forma  $V_o \cos \omega t$  mediante la siguiente relación,

$$V = \left( \frac{1}{T} \int_0^T (V_o \cos \omega t)^2 dt \right)^{1/2}$$

$T$  es el periodo de la función  $T = 2\pi/\omega$

$$V = \left( \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (V_o \cos \omega t)^2 dt \right)^{1/2} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}$$

La relación entre valores eficaces y máximos para tensiones y corrientes sinusoidales será,

$$V_o = \sqrt{2} V \quad \text{y} \quad I_o = \sqrt{2} I \quad (14.19)$$

Donde  $V$  e  $I$  son los valores eficaces de voltaje y corriente.

Considerando las relaciones anteriores, podemos expresar las corrientes y tensiones instantáneas de la forma siguiente,

$$i = \sqrt{2} \mathbf{I} \exp(j\omega t) \quad u = \sqrt{2} \mathbf{V} \exp(j\omega t) \quad (14.20)$$

Las expresiones en forma compleja para voltaje y corriente son,

$$\mathbf{I} = I \exp(j\beta) = I e^{j\beta} \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = V \exp(j\alpha) = V e^{j\alpha} \quad (14.21)$$

Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  son los desfases de corriente y voltaje con respecto a un valor que se toma como referencia; generalmente se toma el voltaje, en consecuencia  $\alpha = 0$ , siendo por tanto  $\beta$  igual al valor  $-\theta$  obtenido anteriormente.  $V$  e  $I$  son los valores eficaces, es decir, el voltaje y la corriente que leemos en un instrumento de medida.

Considerando las notaciones introducidas,

$$I = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V}{Z} \exp(-j\theta) = \frac{V}{Z} e^{-j\theta} \quad (14.22)$$

La corriente instantánea será,

$$i = \sqrt{2} \frac{V}{Z} \exp j(\omega t - \theta) = \frac{V_o}{Z} e^{j(\omega t - \theta)} \quad (14.23)$$

Si recordamos que el voltaje aplicado corresponde a la parte real de  $\exp j\omega t$ , tomando la parte real de la ecuación (14.23) tenemos,

$$i = \sqrt{2} \frac{V}{Z} \cos(\omega t - \theta) = \frac{V_o}{Z} \cos(\omega t - \theta)$$

La forma adoptada para representar voltajes, corrientes e impedancias, facilita el cálculo y representación de dichas magnitudes.

### 14.1.2.2 Representación vectorial de $\mathbf{V}$ , $\mathbf{I}$ y $\mathbf{Z}$

#### *Circuito $R - L$ serie*

Para ilustrar la forma de representar voltajes, corrientes e impedancias, vamos a analizar el ejemplo de un circuito serie formado por una resistencia y una autoinducción. En este caso,

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L = R + jX_L \quad (14.24)$$

Representado  $\mathbf{Z}$  en forma polar,

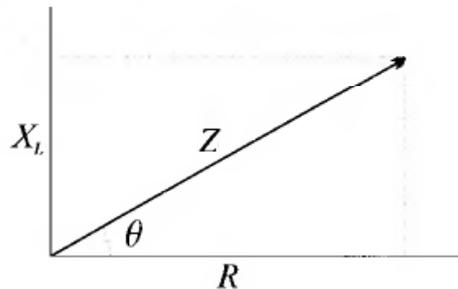
$$\mathbf{Z} = Z e^{j\theta} = Z \exp(j\theta)$$

Donde,

$$Z = (R^2 + (\omega L)^2)^{1/2} \quad (14.25)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (14.26)$$

La representación gráfica de  $\mathbf{Z}$  en el plano complejo, representación vectorial, se muestra en la figura 14.6.



**Figura 14.6**

La corriente que circula cuando aplicamos el voltaje eficaz  $V$  será,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V}{R + j\omega L}$$

Si tomamos como referencia de fase el voltaje,  $\mathbf{V} = V \exp(j0)$ , multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador  $(R - j\omega L)$  tendremos,

$$\mathbf{I} = V \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = V \frac{R - j\omega L}{Z^2} \quad (14.27)$$

También se suelen representar los complejos mediante la forma,  $\mathbf{V} = V\angle\alpha$ , donde  $V$  representa el módulo y  $\alpha$  el argumento. La corriente será,

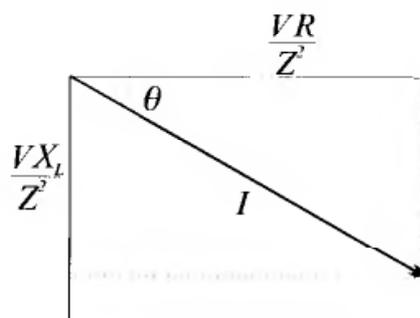
$$\mathbf{I} = \frac{V}{\mathbf{Z}} = \frac{V}{Ze^{j\theta}} e^{-j\theta} = \frac{V}{Z} \exp(-j\theta)$$

El módulo y argumento de la corriente son respectivamente,

$$I = \frac{V}{Z} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (14.28)$$

La representación gráfica de la corriente  $\mathbf{I} = I\angle\theta$  se muestra en la figura 14.7.

Esta figura pone de manifiesto que la corriente en el circuito estudiado se retrasa sobre el voltaje aplicado, lo que ocurre debido a que la autoinducción se opone a los cambios de corriente al inducirse en ella una f.e.m. opuesta al voltaje aplicado.



**Figura 14.7**

#### *Circuito R - C serie*

Si en lugar de un circuito  $R - L$ , estudiamos un circuito  $R - C$  serie, la impedancia será:

$$\mathbf{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} = R + jX_C \quad (14.29)$$

En forma polar,

$$\mathbf{Z} = Ze^{j\theta} \quad (14.30)$$

Donde,

$$Z = \left(R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(-\frac{1}{\omega CR}\right) \quad (14.31)$$

Su representación gráfica en el plano complejo se muestra en la figura 14.8.

La corriente que circula por este circuito, cuando aplicamos un voltaje  $\mathbf{V} = V\angle 0$  será,

$$\mathbf{I} = I\angle\theta = \frac{V}{R - j/\omega C}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador y recordando que,

$$Z = (R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2)^{1/2} \quad (14.32)$$

$$\mathbf{I} = I\angle\theta = V \frac{R + j/\omega C}{Z^2} \quad (14.33)$$

En forma de módulo y argumento,

$$\mathbf{I} = \frac{V}{Z} = \frac{V}{Z} e^{-j\theta} = \frac{V}{Z} \exp(-j\theta) = I \exp(-j\theta)$$

Donde,

$$I = \frac{V}{Z} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{-1}{\omega RC}\right) \quad (14.34)$$

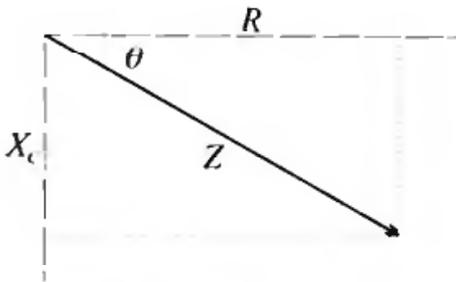


Figura 14.8

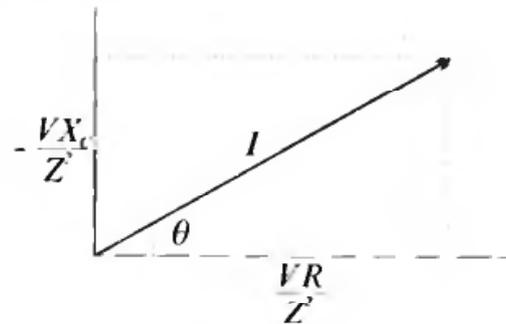


Figura 14.9

La representación gráfica de la corriente se muestra en la figura 14.9. Como se puede observar en la citada figura, la corriente se adelanta sobre el voltaje aplicado.

Los ejemplos anteriores nos muestran que cuando en un circuito se produce un retraso de la corriente sobre el voltaje, podemos decir que predomina la componente inductiva. Cuando se adelanta, podemos deducir que predomina la componente capacitiva.

*Circuito R – L – C serie*

Para terminar, vamos a representar la impedancia de un circuito formado por una resistencia, autoinducción y condensador en serie. En este caso la impedancia en forma compleja viene dada por,

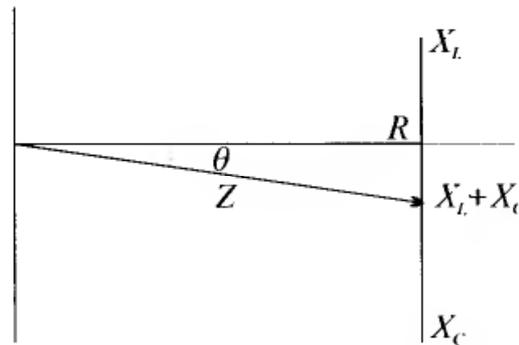
$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L + X_C) \quad (14.35)$$

$$\mathbf{Z} = Z e^{j\theta} = Z \exp(j\theta)$$

$$Z = \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{1/2} \quad (14.36)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right) \quad (14.37)$$

La figura 14.10 muestra las componentes de la impedancia en el plano complejo.



**Figura 14.10**

Para circuitos más complejos se procede de forma análoga, ya que en definitiva podemos caracterizar cada componente por una resistencia, reactancia inductiva o capacitiva, y después de realizar operaciones la impedancia queda como un complejo con una parte real y otra imaginaria. La parte real representa la componente resistiva y la imaginaria la reactiva.

### 14.1.2.3 Asociación de impedancias

Una vez que hemos caracterizado los componentes de un circuito mediante unos parámetros, vamos a estudiar la asociación de distintos componentes y cómo se calculan los valores que corresponden a dicha asociación.

*Circuitos en serie*

Cuando dos impedancias se conectan en serie la corriente que pasa por ambas es idéntica. Los voltajes en los bornes de cada impedancia son,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{I} \quad y \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2 \mathbf{I} \quad (14.38)$$

El voltaje total aplicado será,

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \mathbf{I} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{I} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{I} = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) \mathbf{I} \quad (14.39)$$

De la relación anterior se deduce que la impedancia total  $\mathbf{Z}$  es,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \quad (14.40)$$

Si conectamos  $n$  impedancias en serie como muestra la figura 14.11a, entonces, la impedancia equivalente  $\mathbf{Z}$  es igual a la suma de las impedancias que se disponen en serie:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \cdots + \mathbf{Z}_n \quad (14.41)$$

Como cada una de las impedancias  $\mathbf{Z}_i$  es de la forma,

$$\mathbf{Z}_i = R_i + jX_i$$

Para obtener  $\mathbf{Z}$  tendremos que sumar las partes reales  $R_i$  por un lado y las partes imaginarias  $X_i$  por otro. Los términos  $X_i$  pueden ser reactancias inductivas de la forma  $\omega L_i$  o capacitivas de la forma  $-1/\omega C_i$ .

La impedancia total en el caso de  $n$  impedancias será,

$$\mathbf{Z} = (R_1 + R_2 \cdots + R_n) + j(X_1 + X_2 \cdots + X_n) \quad (14.42)$$

*Impedancia  $\mathbf{Z}$  en forma polar*

La forma polar para el caso de  $n$  impedancias en serie es,

$$\mathbf{Z} = Z e^{j\theta}$$

cuyo módulo y argumento es,

$$Z = ((R_1 + R_2 \cdots + R_n)^2 + (X_1 + X_2 \cdots + X_n)^2)^{1/2} \quad (14.43)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X_1 + X_2 \cdots + X_n}{R_1 + R_2 \cdots + R_n}\right) \quad (14.44)$$

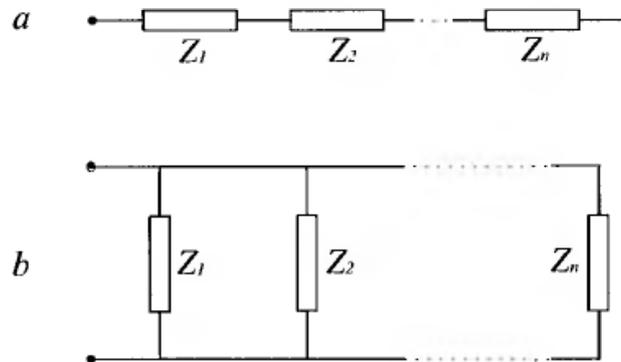


Figura 14.11

*Circuitos en paralelo*

Cuando las impedancias se conectan en paralelo como indica la figura 14.11b el voltaje aplicado a todas es el mismo, por tanto la corriente respectiva que circulará por cada  $Z_i$  será  $I_i = V/Z_i$ , y la corriente total que suministra el generador es,

$$I = \sum_1^n I_i = V \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right) = \frac{V}{Z}$$

De donde se deduce que,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (14.45)$$

Es decir, la inversa de la impedancia total es igual a la suma de las inversas de las impedancias conectadas en paralelo.

*Admitancia Y*

En circuitos de elementos dispuestos en paralelo se suele utilizar la **admitancia Y** para representar los componentes del circuito. La admitancia se define mediante la relación.

$$Y = \frac{I}{V} \quad (14.46)$$

Es decir,  $I = V Y$ . En un circuito elemental formado por una resistencia  $R$ , la admitancia  $Y = G = 1/R$ , a  $G$  se le llama **conductancia**. Si se trata de un condensador  $C$ ,  $Y_c = j\omega C$ ; y en el caso de una autoinducción  $L$ ,  $Y_L = 1/j\omega L = -j/\omega L$ .

En circuitos con elementos dispuestos en paralelo el voltaje es común a los  $n$  elementos; si cada elemento tiene una admitancia  $Y_i$ .

$$I_1 = Y_1 V \quad ; \quad I_2 = Y_2 V \quad ; \quad I_n = Y_n V$$

por tanto, como  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \dots + \mathbf{I}_n$ , se deduce que,

$$\mathbf{I} = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \dots + \mathbf{Y}_n) \mathbf{V}$$

En consecuencia, la admitancia equivalente es igual a la suma de las admitancias dispuestas en paralelo, es decir,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \dots + \mathbf{Y}_n \quad (14.47)$$

En el caso más general la admitancia se compone de una parte real y otra imaginaria,

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad (14.48)$$

Donde  $G$  es la **conductancia** y a  $B$  se le denomina **susceptancia**.

La relación entre la impedancia  $\mathbf{Z}$  y la admitancia  $\mathbf{Y}$  es,

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \quad (14.49)$$

#### 14.1.2.4 Potencia

La potencia suministrada en cada instante es el producto del voltaje aplicado por la corriente que atraviesa al dispositivo. La potencia instantánea  $P_i$ , para un dispositivo caracterizado por una impedancia  $\mathbf{Z} = R + jX$ , es de la forma:

$$P_i = u i = V_o \cos \omega t I_o \cos(\omega t + \theta) \quad (14.50)$$

Teniendo en cuenta que,

$$V_o = \sqrt{2} V \quad \text{e} \quad I_o = \sqrt{2} I$$

Considerando el desarrollo de  $\cos(\omega t + \theta)$  obtenemos,

$$P_i = 2VI(\cos^2 \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \omega t \sin \theta)$$

Calculamos el valor medio de  $P_i$  teniendo en cuenta que el periodo  $T = 2\pi/\omega$ ,

$$P = \langle P_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P_i dt$$

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T 2VI(\cos^2 \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \omega t \sin \theta) dt$$

$$P = V I \cos \theta \quad (14.51)$$

La ecuación anterior representa la **potencia activa** y es la potencia suministrada al dispositivo. Dicha potencia activa, dependiendo del tipo

de dispositivo, se disipa en los elementos resistivos o parte se transforma en energía mecánica como ocurre en un motor eléctrico etc.

El factor  $\cos \theta$ , se denomina **factor de potencia**, y depende del desfase entre corriente y voltaje provocado por la resistencia y reactancia del dispositivo al que se suministra energía. Este factor de potencia es tanto menor cuanto mayor sea  $\theta$ , es decir, dado que,

$$\theta = \arctan \frac{X}{R}$$

$\theta$  es mayor cuando domina  $X$  sobre  $R$ , en consecuencia el factor de potencia es menor si predomina la reactancia sobre la resistencia del circuito. Debido a que las instalaciones se calculan en función de la potencia máxima que debe suministrarse a un dispositivo,  $V I$ , interesa que la potencia activa sea máxima, por tanto interesa que el factor de potencia  $\cos \theta$  tome valores muy próximos a la unidad.

El término,

$$Q = V I \operatorname{sen} \theta \quad (14.52)$$

representa la potencia que se intercambia entre los componentes inductivos y capacitivos del dispositivo. A esta potencia se la conoce con el nombre de **potencia reactiva**.

#### *Potencia en forma compleja*

Utilizando la forma compleja de voltaje y corriente, podemos obtener los valores de  $P$  y  $Q$  a partir de la **potencia compleja  $\mathbf{S}$** , que se define mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V} \mathbf{I}^* \quad (14.53)$$

Considerando que el receptor es una impedancia  $\mathbf{Z}$ , y tomando como fase de referencia la del voltaje  $V$ ,

$$\mathbf{V} = V \exp(j0) \quad ; \quad \mathbf{I} = I \exp(-j\theta)$$

El conjugado de  $\mathbf{I}$  es,

$$\mathbf{I}^* = I \exp(j\theta)$$

La potencia compleja será,

$$\mathbf{S} = V I \exp(j\theta) = V I (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

Es decir,

$$\mathbf{S} = P + jQ \quad (14.54)$$

y,

$$P = \operatorname{Re}(\mathbf{VI}^*) \quad (14.55)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\mathbf{VI}^*) \quad (14.56)$$

$\operatorname{Im}$  indica parte imaginaria de y  $\operatorname{Re}$  la parte real de. En forma verbal,  $P$  es la parte real de  $\mathbf{S}$  y  $Q$  la parte imaginaria.

Al término  $VI$  se le llama **potencia aparente**, que es la máxima potencia activa que puede suministrarse al dispositivo en el caso de que  $\cos \theta = 1$ , lo que significaría que la reactancia es nula.

### 14.1.3 ANÁLISIS DE REDES

#### *Circuitos de corriente alterna*

En este apartado vamos a estudiar el comportamiento de circuitos eléctricos formados por la asociación de distintos componentes. Comenzaremos introduciendo las definiciones y principales conceptos que se utilizan en el análisis de redes eléctricas; después estudiaremos los métodos de análisis de redes y concluiremos estableciendo algunos teoremas que permiten la síntesis de circuitos y comprender mejor la transmisión de energía desde un dispositivo formado por una red a una carga externa.

Cuando en una red interviene más de una fuente de corriente alterna suponemos que todas son de la misma frecuencia.

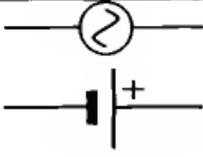
El análisis que hacemos en este apartado es similar al que se utiliza en circuitos de corriente continua, con la particularidad de que ahora las fuentes son de corriente alterna. Además se amplía el tipo de componentes, ya que a las resistencias se añaden los condensadores, autoinducciones e inducciones mutuas. Los nuevos componentes determinan que en el análisis se introduzcan los números complejos, y que en lugar de resistencias se hable de impedancias. Las tensiones y corrientes son funciones periódicas del tiempo, y para facilitar los cálculos se representan mediante números complejos.

#### 14.1.3.1 Conceptos y definiciones

En apartados anteriores ya hemos introducido algunos conceptos sobre circuitos. En este vamos enunciar de forma sistemática tanto los que hemos tratado antes como otros que necesitamos en el análisis de redes.

*Elemento de circuito.* Es un componente indivisible con dos bornes o terminales, ejemplos son una resistencia o una fuente, pila o batería.

*Parámetro.* Es la representación simbólica de los elementos de circuito. Una resistencia se representa por  $R$ , una pila o batería por  $V$ ,  $E$  o  $\mathcal{E}$ , un generador o fuente de tensión alterna por  $u$ ,  $V$  o  $E$ . En la figura 14.12 se muestran los principales componentes que intervienen en los circuitos y sus respectivos parámetros.

Componente		Parámetro	
	Resistencia	$R$	Resistencia
	Inductor	$L$	Inductancia
	Condensador	$C$	Capacidad
	Fuente de c.a., pila	$u$ , $V$ , $E$ , $V$ , $\mathcal{E}$	Tensión

**Figura 14.12**

*Rama.* Se construye mediante la unión de elementos de circuito de manera que el conjunto forma un dispositivo de dos terminales. Se supone que los elementos de circuito se conectan entre sí mediante conductores ideales.

*Malla.* También conocida como *bucle* o *lazo*, es un circuito cerrado formado por la unión de ramas.

*Nudo.* Es el punto de unión de dos o más ramas.

*Red.* Es la interconexión de ramas y mallas. Frecuentemente se utiliza la palabra circuito con el mismo significado que red.

*Red plana.* Es una red en la que no existen puntos de cruce entre las ramas. Una red en forma de cuadrado con sus diagonales y una rama uniendo los centros de éstas no es plana, dado que las diagonales se cruzan en un punto.

*Red de parámetros concentrados.* Es una red compuesta por elementos de circuito aislados, es decir, elementos que se comportan en la red de manera que cada componente físico se puede caracterizar por un sólo parámetro, resistencia, capacidad etc.

*Red de parámetros distribuidos.* Es una red compuesta por elementos que no pueden ser caracterizados por un parámetro único y por tanto no se tratan analíticamente como componentes individuales separados; es decir, son componentes con los efectos inductivos, capacitivos y resistivos mezclados y distribuidos por él. Un cable coaxial de los utilizados en televisión es

un ejemplo de red de parámetros distribuidos.

*Potencial.* También conocido como **tensión**, es la forma abreviada de diferencia de potencial entre dos puntos y en el análisis de circuitos de parámetros concentrados es igual al **voltaje**. Se suele representar la tensión por  $V$  (o  $U$ ) en el caso de corrientes continuas y por  $u$  o  $e$  en las variables. Cuando se trata de la f.c.m. de una fuente se suele representar por  $\mathcal{E}$  o  $V$ ,  $\mathbf{V}$  en el caso de tensiones sinusoidales también se suele representar por  $\mathbf{E}$ .

*Fuente de potencial.* También conocida como **generador**, es un dispositivo de dos bornes o terminales entre los que existe una tensión sin que circule corriente, es decir la fuente es un elemento activo que mantiene una **tensión** en sus bornes.

La *fente de potencial* es ideal cuando la tensión en sus bornes es independiente de la corriente que suministra.

Una **fente** se conoce como **lineal** cuando la relación entre la tensión y corriente entre sus terminales es una ecuación lineal.

En una fuente de tensión lineal, cuya impedancia interna es  $Z_o$  y su f.c.m.  $V_o$ , la relación entre la tensión en su bornes  $\mathbf{V}$  y la corriente  $\mathbf{I}$  que la atraviesa es,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o - \mathbf{Z}_o \mathbf{I} \quad (14.57)$$

Cuando la fuente de tensión es ideal significa que  $Z_o = 0$ . Es decir  $\mathbf{V}$  es independiente de la corriente  $\mathbf{I}$  e igual a  $\mathbf{V}_o$ .

*Rama activa.* Es una rama en la que figura una o más fuentes y puede o no tener elementos pasivos como resistencias.

*Rama pasiva.* Es la que no tiene ningún elemento activo, es decir no tiene fuentes.

*Rama común.* Es una rama compartida por dos mallas.

*Rama externa.* Es una rama que pertenece sólo a una malla o lazo.

*Elemento lineal.* Es todo elemento de circuito para el que la relación entre corriente y potencial es lineal, es decir, no depende del valor de la corriente o tensión. Por ejemplo, en un conductor lineal  $\mathbf{V} = \mathbf{Z} \mathbf{I}$ , y  $\mathbf{Z}$  no depende de  $\mathbf{V}$  o  $\mathbf{I}$ . Un solenoide con núcleo de aire es lineal, pero si introducimos un trozo de hierro deja de ser lineal.

*Rama lineal.* Es la compuesta por fuentes y elementos de circuito lineales.

*Elementos bilaterales y unilaterales.* En un elemento bilateral la ley que relaciona tensión y corriente no depende del sentido de la corriente. Para

un elemento *unilateral* dicha relación si depende del sentido de la corriente. Un componente lineal es bilateral pero no a la inversa; por ejemplo, una resistencia de carbón es bilateral pero no lineal. Un diodo es un componente unilateral además de no lineal.

#### *Condiciones de referencia*

En el análisis de circuitos se obtienen soluciones que muestran las corrientes que circulan por las ramas y las tensiones en los nudos. Las magnitudes físicas, **corriente y tensión** se representan por unas cantidades algebraicas  $I$ ,  $i$  y  $V$ ,  $u$ . Las magnitudes físicas cambian su dirección y polaridad, dicha modificación se traduce en un cambio de signo en la representación algebraica.

Para establecer una correlación clara entre magnitudes físicas y su representación algebraica, se imponen unas condiciones de referencia. Estas son: La **dirección de referencia** para una corriente es la representada por una corriente  $I$  positiva. La **polaridad de referencia** corresponde a un valor positivo de  $V$ ,  $u$ . Los signos  $+$  y  $-$  se utilizan para indicar tanto la polaridad de referencia en el circuito como el valor de la tensión, interesa distinguir cuando se utiliza como condición de referencia o como valor algebraico.

#### *Notaciones*

Para representar las tensiones y corrientes se suele utilizar una notación mediante subíndices. Una tensión representada mediante  $u$ ,  $V$  con un subíndice ( $u_i$ ,  $V_i$ ) indica la tensión entre dos puntos o terminales de un elemento de circuito. Lo mismo para la corriente que atraviesa un elemento de circuito o rama. Cuando se utiliza esta notación tenemos que añadir la referencia en la figura con una flecha en el caso de corrientes y un signo  $+$  en un extremo para las tensiones.

El doble subíndice se utiliza para expresar además una referencia de polaridad en la tensión y de dirección en la corriente. En la corriente indica que el sentido va del primer subíndice al segundo,  $I_{12}$  indica que la corriente va del punto o extremo 1 al 2.

$$I_{12} = -I_{21}$$

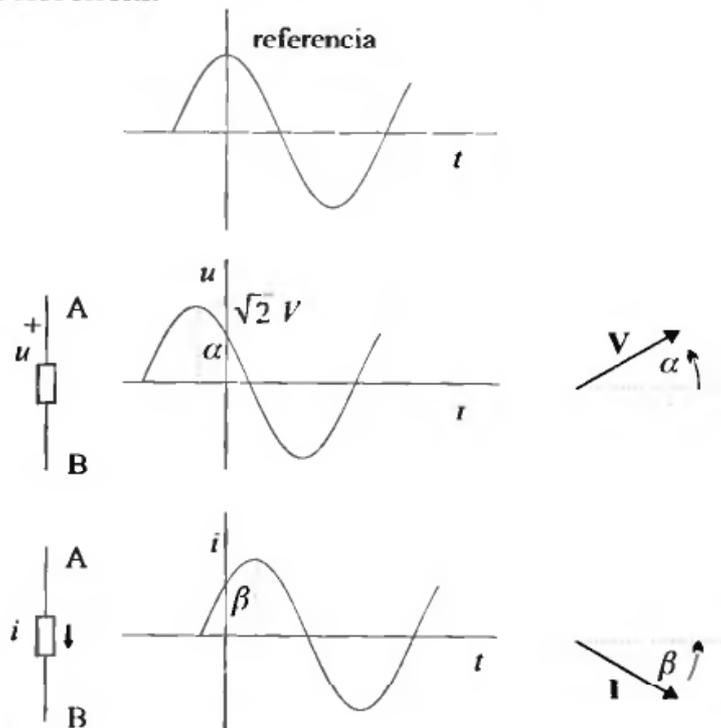
En el caso de las tensiones el primer subíndice indica el punto que consideramos positivo o de referencia, potencial más elevado, y el segundo corresponde al más bajo o negativo. De forma análoga al caso anterior,

$$V_{12} = -V_{21}$$

Es más conveniente utilizar un subíndice con el signo + para la referencia de la tensión y la flecha para la corriente, ya que es menos confuso.

*Notación para tensiones y corrientes sinusoidales*

Las tensiones y corrientes sinusoidales se representan por números complejos cuyo módulo y fase están relacionados con el valor máximo o amplitud de la tensión sinusoidal y el desfase de una tensión o corriente con otra que se toma como referencia.



**Figura 14.13**

En la figura 14.13 se muestra la relación entre una tensión/corriente sinusoidal con el número complejo que la representa. Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  representan el desfase con respecto a la tomada como referencia.

La relación entre ambas formas de representación es la siguiente:

$$\mathbf{V} \text{ representa a } u = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \alpha) \quad (14.58)$$

$$\mathbf{I} \text{ representa a } i = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \beta) \quad (14.59)$$

Donde  $V_o = \sqrt{2}V$  e  $I_o = \sqrt{2}I$  son las amplitudes respectivas de tensión y corriente sinusoidal.  $V$  e  $I$  son los módulos de los números complejos  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$ . La figura 14.13 muestra a  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  que además giran en sentido contrario a las agujas del reloj cuando avanza el tiempo; su forma compleja es  $\mathbf{V} = V e^{j\alpha}$  e  $\mathbf{I} = I e^{-j\beta}$  y se representa en forma de vector cuyas coordenadas pertenecen

al plano complejo. A este número complejo que representa una función sinusoidal se le denomina **sinor**; y es un caso particular de la representación de tensiones, impedancias etc. en forma de vector bidimensional en el plano complejo conocida como **fasor**.

Para resolver la ecuación diferencial de un circuito se suele utilizar la representación compleja de tensiones y corriente, de manera que,

$$\mathbf{u} = \sqrt{2}\mathbf{V} e^{j\omega t} \quad ; \quad \mathbf{i} = \sqrt{2}\mathbf{I} e^{j\omega t} \quad (14.60)$$

con

$$\mathbf{V} = V e^{j\alpha} \quad ; \quad \mathbf{I} = I e^{-j\beta} \quad (14.61)$$

$$u = \text{Re } \mathbf{u} \quad ; \quad i = \text{Re } \mathbf{i} \quad (14.62)$$

Re = parte real del número complejo.

Los valores  $u$  e  $i$  son respectivamente los valores instantáneos de tensión y corriente,

$$u = V_o \cos(\omega t + \alpha) \quad ; \quad i = I_o \cos(\omega t - \beta) \quad (14.63)$$

#### *Principio de superposición*

En los circuitos que vamos a estudiar se supone que tanto las fuentes como los elementos de circuito son lineales.

El principio de superposición lineal establece que si en un circuito o red existen dos o más fuentes, cada una actúa de forma independiente, de manera que la corriente en una rama es la suma de las corrientes producidas por cada fuente considerada individualmente. En otras palabras, la corriente en una rama se obtendrá sumando la obtenida cuando consideramos que funciona una fuente y las demás están cortocircuitadas, más la que se obtiene cuando se activa otra fuente y se cortocircuitan las restantes etc.

Las fuentes están generalmente representadas por números complejos.

#### **14.1.3.2 Métodos de análisis**

Una vez introducidos los principales conceptos que se manejan en el análisis de circuitos, vamos a estudiar los métodos que se utilizan para calcular las corrientes en distintas ramas y las tensiones en los nudos o entre los terminales de un elemento de circuito.

El método para calcular las corrientes en las ramas y las tensiones en los nudos consiste en utilizar las leyes de Kirchhoff. Suponemos que las fuentes

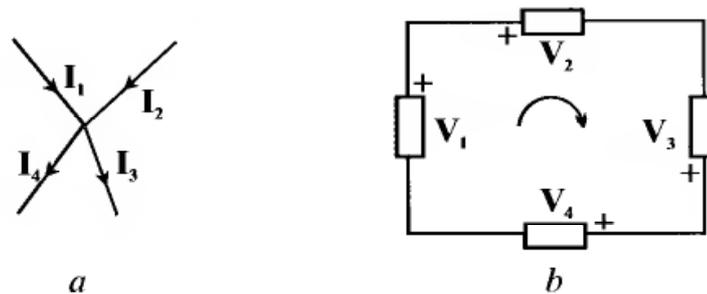
e impedancias están localizadas en las rama respectivas. Además en todo el análisis que sigue vamos a suponer que las redes son planas, es decir redes en la que no hay puntos de cruce entre las ramas.

Las citadas leyes corresponden, en la terminología de circuitos, a la conservación de la carga eléctrica (*1ª ley*), y conservación de energía (*2ª ley*).

Las leyes se refieren en general a los valores instantáneos de tensiones y corrientes. Las magnitudes numéricas que se manejan tienen unos valores y signos con respecto a los valores de referencia que se toman. Esto no significa que en un momento dado la corriente o tensión real tengan la polaridad o dirección que sugiere un valor. Es decir, si se toma como positivo un valor de corriente cuando coincide con la dirección tomada como referencia, no quiere decir que la corriente real vaya en ese sentido, pues además de cambiar con el tiempo sinusoidalmente, puede ocurrir que concluidas las operaciones de cálculo se compruebe que el sentido es el contrario. Lo mismo se puede decir con respecto a la tensión.

La primera ley de Kirchhoff establece que la suma algebraica de las corrientes en un nudo es cero. En la figura 14.14a se indica un nudo. Se toma como referencia positiva el sentido de la corriente que va hacia el nudo, por tanto la ecuación para las corrientes instantáneas será:

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0 \quad (14.64)$$



**Figura 14.14**

La ley expresada mediante las corrientes en su representación compleja es de la forma siguiente,

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 = 0 \quad (14.65)$$

La segunda ley expresa que en una malla o lazo, tomando como sentido de recorrido el de movimiento de las agujas del reloj (sentido horario), la suma de las subidas de tensión es igual a la suma de las caídas de tensión. En el circuito de la figura 14.14b la ley se escribe de la siguiente forma para

valores instantáneos y complejos,

$$u_1 + u_3 = u_2 + u_4 \tag{14.66}$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_4 \tag{14.67}$$

Los potenciales  $u_1$  y  $u_3$  representan las subidas de tensión, y  $u_2$ ,  $u_4$  las caídas de tensión. Las referencias tomadas no coinciden necesariamente con los sentidos reales de las corrientes o la polaridad de las tensiones. Al realizar los cálculos obtendremos unos valores, que si son positivos significa que coinciden sus sentidos o polaridad con los elegidos. En caso contrario los valores reales de corriente o las polaridades de las tensiones son opuestas.

*Condiciones de referencia*

Cuando se trata de un solo nudo o malla las condiciones de referencia se pueden tomar de forma arbitraria. Si existe mas de un nudo o malla debemos seguir unos criterios para establecer los sentidos de las corrientes y la polaridad de la tensiones. En la figura 14.15 se muestra una red con dos mallas. Se ha elegido como sentido de referencia en el recorrido de las mallas el de avance de la agujas del reloj. La rama común tiene un elemento con una referencia para la tensión  $u$ . Con estas referencias  $u$  significa una caída de tensión en el recorrido de la malla izquierda y una subida en la derecha.

Si en una rama existe una fuente (generador) de tensión, las condiciones de referencia se suelen indicar mediante un forma simbólica como la indicada en la figura 14.16, o mediante una expresión numérica como la siguiente:  $\mathbf{V} = 10\angle 30^\circ$ . Esto indica que el módulo de la tensión es 10 voltios y está desfasada  $30^\circ$  con respecto a una tensión que se toma como referencia; es decir, en éste caso deberá añadirse cual es la tensión de referencia.

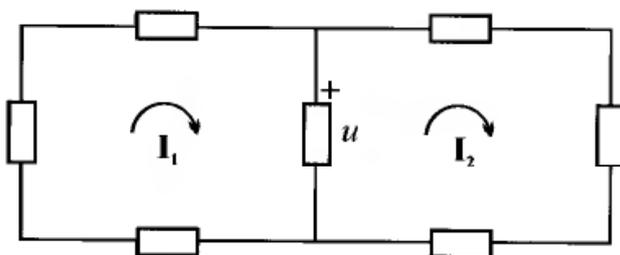


Figura 14.15

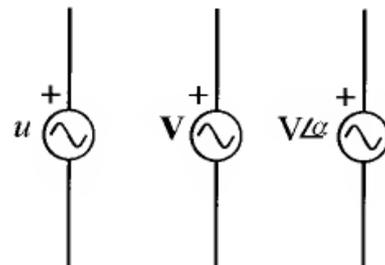
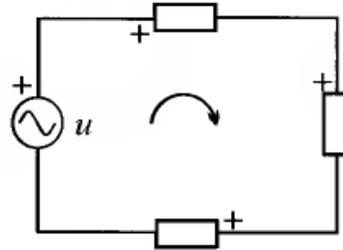


Figura 14.16

Si en una malla se combinan fuentes con elementos pasivos, resistencias etc, la forma de representar las referencias de los distintos componentes se muestran en la figura 14.17. Tomando como sentido de recorrido el avance de

las agujas del reloj, la fuente  $u$  supone una subida de tensión y los elementos pasivos caídas de tensión.

*Cálculo de tensiones y corrientes*

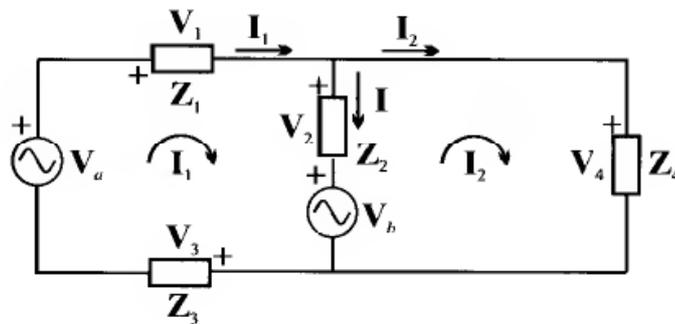


**Figura 14.17**

Hay tres procedimientos para calcular las corrientes y tensiones en una red. El primero consiste en utilizar simultáneamente las dos leyes de Kirchhoff, se conoce como método de ramas. El segundo utiliza sólo la segunda ley y se conoce como método de mallas, y el tercero usa la primera ley y se conoce como método de nudos. El primer método se suele usar en el caso de circuitos sencillos y los otros dos para circuitos más complejos, ya que además permiten una generalización del método de análisis.

Aquí vamos a explicar únicamente el método de mallas. Suponemos que la red es lineal, plana y sin acoplo magnético entre elementos del circuito.

En la figura 14.18 está representada una red plana. Elegimos las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  como muestra la figura; la elección es arbitraria pero se toma así por que permite obtener las ecuaciones de una forma sistemática. Dicha corriente es la que circula por las ramas externas de cada uno de las mallas. La corriente  $I$  que circula por la rama común a las mallas será, aplicando la primera ley de Kirchhoff, igual a la diferencia entre las corrientes anteriores. El sentido de recorrido de cada malla es el de movimiento de las agujas del reloj, sentido horario.



**Figura 14.18**

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla,

$$\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b - (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = 0 \quad (14.68)$$

En la segunda malla,

$$\mathbf{V}_b + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_4 = 0 \quad (14.69)$$

Considerando la corriente que circula por cada impedancia obtendremos la tensiones  $\mathbf{V}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ . Estas tensiones se deben a que por las ramas externas, ramas que aparecen en una malla o bucle, circulan respectivamente la corriente  $\mathbf{I}_1$  por la malla uno e  $\mathbf{I}_2$  por el dos. Por la rama común, rama compartida por dos mallas, circula  $\mathbf{I}$ , y como en el nudo superior se debe cumplir la primera ley de Kirchhoff  $\mathbf{I} + \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1$ , es decir,  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$ . Aplicando estas condiciones tenemos,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}_1 ; \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2 (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) ; \quad \mathbf{V}_3 = \mathbf{Z}_3 \mathbf{I}_1 ; \quad \mathbf{V}_4 = \mathbf{Z}_4 \mathbf{I}_2$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores y agrupando las tensiones de las fuentes en el primer miembro y las caídas de tensión en el segundo queda el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b &= (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) \mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_b &= -\mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4) \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (14.70)$$

Dicho sistema en forma matricial es,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) & -\mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

Si observamos las ecuaciones del sistema comprobamos que los primeros miembros son la suma algebraica de las fuerzas electromotrices, tensiones en bornes de los generadores, en la malla, considerando positivas las que elevan el potencial en el sentido del recorrido, es decir, entra por el terminal negativo y sale por el positivo, y negativas las que suponen una caída de tensión en el citado sentido. Dado los sentidos de referencia elegidos, una fuente puede actuar como positiva en una malla y negativa en la otra.

En los segundos miembros observamos que la corriente de las ramas no compartidas en el lazo está multiplicada por la suma de todas las impedancias que están en el contorno del lazo, a esta suma se la conoce como **impedancia de malla o lazo**, y la impedancia en la rama común o compartida está multiplicada por la corriente del malla contigua afectada de signo menos.

*Regla para el método de mallas*

Las consideraciones anteriores nos permiten enunciar la regla general para establecer las ecuaciones de red por el método de mallas. En primer lugar se asignan las corrientes hipotéticas de cada malla o lazo y su sentido de circulación, que generalmente se elige para todos el de movimiento de las agujas del reloj. En el primer miembro de la ecuación de cada malla figura la suma de las fuerzas electromotrices de las fuentes de tensión que se sitúan en las ramas que componen la malla, tomando como positivas las que elevan la tensión en el sentido de la corriente de malla y negativas las otras. En el segundo miembro se multiplica la corriente de malla por la suma de todas las impedancias situadas en las ramas que componen la malla, impedancia de malla, y se resta el producto de la(las) impedancia(s) compartida(s) por la corriente de la malla contigua, malla con la que comparte la rama común. De esta manera se obtiene un sistema de tantas ecuaciones como mallas con tantas incógnitas como corrientes de malla.

Si no se elige para todas las mallas el mismo sentido de la corriente, cambia el signo de los términos de la rama compartida.

Suponemos que la impedancia de cada rama no lleva ningún componente en paralelo con ella.

La solución del sistema de ecuaciones, que se puede calcular por el método que se considere más adecuado, nos permite obtener las corrientes de malla o lazo en función de las fuerzas electromotrices de los generadores y las impedancias en las distintas ramas. Este sistema sirve para cualquier número de mallas, por tanto permite un análisis general y sistematizado de redes.

Para el ejemplo que hemos indicado en las ecuaciones (14.70) la solución, aplicando el método de Cramer, será,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_a - V_b & -Z_2 \\ V_b & (Z_2 + Z_4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2 + Z_3) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_2 + Z_4) \end{vmatrix}} \quad (14.71)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2 + Z_3) & V_a - V_b \\ -Z_2 & V_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2 + Z_3) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_2 + Z_4) \end{vmatrix}} \quad (14.71)$$

Con los valores obtenidos para las corrientes de malla podemos calcular

las corrientes de rama. Si la rama es externa su corriente es la del lazo en el que está situada; si es rama común, la corriente es la diferencia entre las corrientes de las mallas que comparten la rama. El sentido de la corriente real será el que corresponde a un valor positivo de la diferencia. Una vez conocidas las corrientes de rama, las tensiones o potenciales entre nudos o terminales se obtienen aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la rama o elemento de rama que se considere.

*Red con acoplo magnético entre elementos*

En este apartado vamos a estudiar el caso de una red como la indicada en la figura 14.19. En ella, además de un generador y dos impedancias, existe dos bobinas  $L_1$  y  $L_2$ , cuyos coeficientes de autoinducción son respectivamente  $L_1$  y  $L_2$ , pero también están acopladas entre sí magnéticamente y su coeficiente de inducción mutua es  $M$ . El efecto de la inducción mutua entre bobinas es que la corriente en una de ellas afecta a la tensión en los terminales de la otra. La polaridad del potencial inducido depende del sentido de la corriente y de la orientación relativa de los campos magnéticos que se crean en las bobinas; es decir, depende, además del sentido de la corriente, de las direcciones de arrollamiento de ambas bobinas así como de su disposición en el espacio o núcleo magnético.

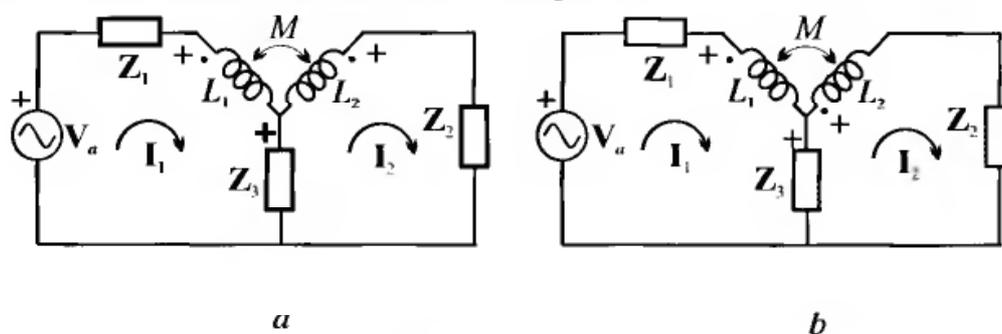


Figura 14.19

Dado que una vez construido un sistema de bobinas es difícil saber sus sentidos de arrollamiento etc, se adoptan unos criterios y marcas que permiten saber la correspondencia entre sentido de la corriente en una bobina y el potencial inducido en la otra. Las marcas que se suelen utilizar son puntos y el símbolo + o letras. Aquí vamos a utilizar  $\bullet$ . El símbolo  $\bullet$  puesto en uno de los terminales de cada bobina indica que cuando entramos por dicho terminal el sentido de arrollamiento es el mismo para dichas bobinas. Su interpretación desde el punto de vista de las tensiones inducidas es la siguiente: Cuando una corriente entra por el terminal de la bobina que tiene un punto ( $\bullet$ ), la f.e.m. inducida en la propia bobina tiene la referencia de

potencial positivo en dicho terminal. La f.e.m. inducida por esta misma corriente en la otra bobina también es positiva en el terminal que tiene el punto.

En la figura 14.19a se muestran los signos de los potenciales inducidos, así como los puntos y sentidos de la corriente.

El término correspondiente a la inducción mutua se expresa de la forma  $j\omega M$ ; es decir, de forma análoga a la autoinducción, con la salvedad de que el signo depende de los sentidos de arrollamiento.

Teniendo en cuenta los criterios enunciados en el párrafo anterior y la segunda ley de Kirchhoff, las ecuaciones que obtenemos para esta red con dos mallas y elementos acoplados son:

Circuito de la figura 14.19a. La corriente  $I_2$  sale, no entra, por el punto, por tanto,

$$\begin{aligned} V_a &= (\mathbf{Z}_1 + j\omega L_1 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_1 - (j\omega M + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_2 \\ 0 &= -(j\omega M + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_1 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (14.72)$$

Circuito de la figura 14.19b. La corriente  $I_2$  entra por el punto, luego,

$$\begin{aligned} V_a &= (\mathbf{Z}_1 + j\omega L_1 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_1 + (j\omega M - \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_2 \\ 0 &= (j\omega M - \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_1 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (14.73)$$

Las expresiones anteriores ponen de manifiesto que el signo que precede a  $M$ , es decir, la f.e.m. correspondiente a la inducción mutua depende de la posición del punto en uno de los terminales; éste refleja el sentido de arrollamiento de las bobinas y en consecuencia del campo magnético variable responsable de la inducción. Además el término  $j\omega M$  afecta al término  $(j\omega M - \mathbf{Z}_3)$  común a las dos mallas, y su valor depende de los sentidos de referencia, es decir, de como se han dispuesto los arrollamientos.

### 14.1.3.3 Teoremas de redes

Cuando analizamos el comportamiento de redes se introducen procedimientos y conceptos que permiten simplificaciones o un mejor conocimiento de la influencia y comportamiento de los distintos elementos que componen la red. A continuación vamos a estudiar algunos teoremas y definiciones.

#### *Impedancia de entrada*

Si suponemos que detrás de un par de terminales existe una red pasiva, es decir, compuesta por impedancias, sin conocer la disposición ni magnitud de las impedancias que componen la red podemos caracterizar lo que hay detrás de los bornes mediante una impedancia conocida como **impedancia**

de entrada. Se obtiene esta impedancia de entrada de la forma siguiente: Aplicamos a los terminales de entrada un generador  $V$  y medimos la corriente  $I$  que entra por uno de los terminales. La impedancia de entrada será,

$$Z_e = \frac{V}{I} \tag{14.74}$$

*Superposición en una red*

En este apartado vamos a estudiar la corriente en una rama de la red y comprobar que se cumple el principio de superposición.

La red se indica en la figura 14.20 y se compone de dos mallas. La corriente de la primera malla es  $I_1$  y la de la segunda  $I$ . Nos interesa conocer en este caso la corriente que circula por la impedancia  $Z_L$ . Para ello comenzamos por establecer las ecuaciones de la red y después obtener la corriente  $I$ .

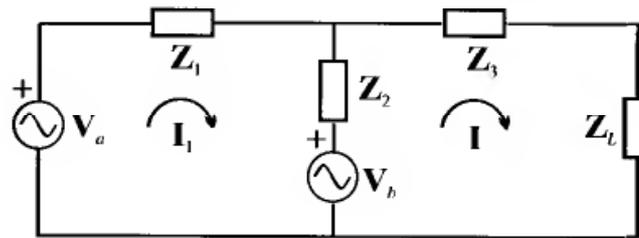


Figura 14.20

Ecuaciones del circuito:

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= (Z_1 + Z_2) I_1 - Z_2 I \\ V_b &= -Z_2 I_1 + (Z_2 + Z_3 + Z_L) I \end{aligned} \tag{14.75}$$

Resolviendo el sistema por el método de Cramer, tendremos para la corriente  $I$ ,

$$I = \frac{\begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2) & V_a - V_b \\ -Z_2 & V_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_2 + Z_3 + Z_L) \end{vmatrix}}$$

Si representamos el determinante del sistema por  $\Delta$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_2 + Z_3 + Z_L) \end{vmatrix}$$

y desarrollamos el determinante del numcrador,

$$I = V_b \frac{(Z_1 + Z_2)}{\Delta} + (V_a - V_b) \frac{Z_2}{\Delta}$$

operando tenemos,

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}_a \frac{\mathbf{Z}_2}{\Delta} + \mathbf{V}_b \frac{\mathbf{Z}_1}{\Delta} \quad (14.76)$$

La ecuación anterior muestra que la corriente que atraviesa la impedancia  $\mathbf{Z}_L$  es una combinación lineal de las tensiones de las dos fuentes que figuran en el circuito. En otras palabras, se puede obtener como la suma de dos aportaciones, la primera se obtendría suponiendo que la fuente  $\mathbf{V}_b$  está cortocircuitada, y la segunda con  $\mathbf{V}_a$  en cortocircuito.

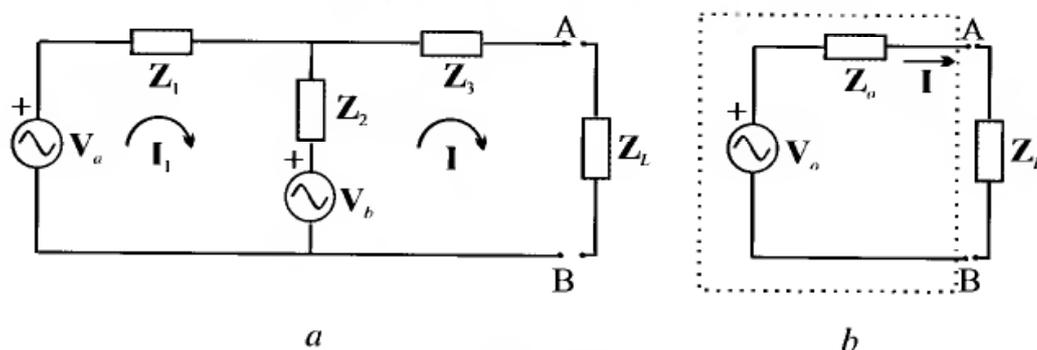
La ecuación que muestra  $\mathbf{I}$  como combinación lineal de las fuentes expresa de forma matemática el **principio de superposición**, es decir, que la corriente debida a un conjunto de fuentes es la suma, combinación lineal, de las corrientes producidas por cada fuente considerada individualmente.

#### *Teorema de Thévenin*

Generalmente utilizamos instrumentos o dispositivos, por ejemplo una fuente de tensión, que tienen unos terminales de salida y detrás de éstos existen fuentes y distintos tipos de componentes. En tales circunstancias interesa conocer la relación entre tensión en los terminales con la corriente que suministran a una carga conectada a ellos. Dicha relación depende del conjunto de elementos que componen el dispositivo desde sus terminales hacia el interior.

El teorema de Thévenin nos permite sintetizar lo que existe en el interior del dispositivo, reduciéndolo a una fuente equivalente en serie con una impedancia.

Para establecer las características más importantes del teorema utilizamos el circuito indicado en la figura 14.21a



**Figura 14.21**

Se puede demostrar que una red vista desde los terminales AB es equivalente a un generador  $\mathbf{V}_o$  en serie con una impedancia  $\mathbf{Z}_o$  dispuesto como indica la figura 14.21b, de manera que la tensión en los bornes AB está re-

lacionada con los parámetros anteriores y la corriente que se suministra a la carga es de la forma siguiente:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o - \mathbf{Z}_o \mathbf{I} \quad (14.77)$$

La relación anterior expresa el **teorema de Thévenin**.

$\mathbf{V}_o$  es la tensión en los bornes AB cuando no existe carga, (la impedancia  $\mathbf{Z}_L = \infty$ ), es decir, la tensión en bornes con el circuito abierto.

$\mathbf{Z}_o$  es la impedancia que se *ve* desde los bornes AB cuando se han cortocircuitado las fuentes  $\mathbf{V}_a$  y  $\mathbf{V}_b$ . Este valor también se obtendría cortocircuitando los bornes AB y midiendo la corriente que circula por dicho cortocircuito, ya que en este caso  $\mathbf{V} = 0$  y

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{I}_c}$$

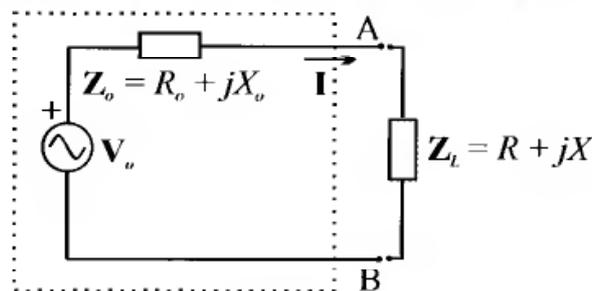
$\mathbf{I}_c$  es la corriente que atraviesa el cortocircuito.

Resumimos ahora el procedimiento para calcular  $\mathbf{V}_o$  y  $\mathbf{Z}_o$ :

Para calcular  $\mathbf{V}_o$  se obtiene la tensión en los bornes AB por el método de mallas, suponiendo que la impedancia  $\mathbf{Z}_L$  no está conectada. El cálculo de  $\mathbf{Z}_o$  se realiza cortocircuitando todas las fuentes, manteniendo  $\mathbf{Z}_L$  desconectada y componiendo el conjunto de impedancias de las distintas ramas que se *ven* desde los terminales AB.

#### *Teorema de la máxima transferencia de potencia*

En muchas ocasiones nos interesa saber cuales son las mejores condiciones que deben reunir el dispositivo que suministra potencia y el que la recibe para que se transfiera la máxima potencia del generador al receptor.



**Figura 14.22**

Como hemos visto en el apartado anterior una red se puede representar, aplicando el teorema de Thévenin, por una fuente ideal  $\mathbf{V}_o = V_o \angle 0$  en serie con una impedancia  $\mathbf{Z}_o = R_o + jX_o$ . Si unimos a los bornes del dispositivo la impedancia  $\mathbf{Z}_L$  como muestra la figura 14.22, la potencia que se transmite a  $\mathbf{Z} = R + jX$  es,

$$P = \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] = \operatorname{Re} [\mathbf{Z}_L \mathbf{I} \mathbf{I}^*] = \operatorname{Re} [\mathbf{Z}_L (\mathbf{I} \mathbf{I}^*)] \quad (14.78)$$

La corriente que circula por la impedancia  $\mathbf{Z}_L$  es,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_o} = \frac{V_o}{(R + R_o) + j(X + X_o)} \quad (14.79)$$

La potencia  $P$  será:

$$P = \frac{V_o^2 R}{(R + R_o)^2 + (X + X_o)^2} \quad (14.80)$$

Calculamos los valores de  $R$  y  $X$  para que se transfiera la máxima potencia mediante las condiciones de máximo de  $P$ ; es decir, derivando la expresión anterior con respecto a  $R$  y  $X$  e igualando a cero.

$$\frac{dP}{dR} = 0 ; \quad \frac{dP}{dX} = 0$$

De la segunda ecuación anterior se deduce que,

$$X = -X_o$$

Si llevamos este valor a la primera ecuación se deduce que,

$$(R + R_o)^2 - 2R(R + R_o) = 0$$

por tanto,

$$R = R_o$$

Es decir, la máxima transferencia de potencia ocurre cuando,

$$R = R_o ; \quad X = -X_o \quad (14.81)$$

o de otra forma

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_o^* \quad (14.82)$$

Esto explica por qué interesa adaptar la impedancia del receptor, o carga, a la impedancia de salida del generador que suministra energía. Como hemos visto debe cumplirse que el valor de la carga sea el número complejo conjugado de la impedancia interna del generador.

## 14.2 PROBLEMAS

## PROBLEMA 14.1

Tenemos dos circuitos como los indicados en la figura P14.1a y b. Cuando se cierra el interruptor S de los dos circuitos, ¿qué diferencia existe entre las corrientes iniciales de cada circuito?

Si reducimos  $R$  a la mitad, ¿qué parámetro del circuito cambia y en qué proporción?

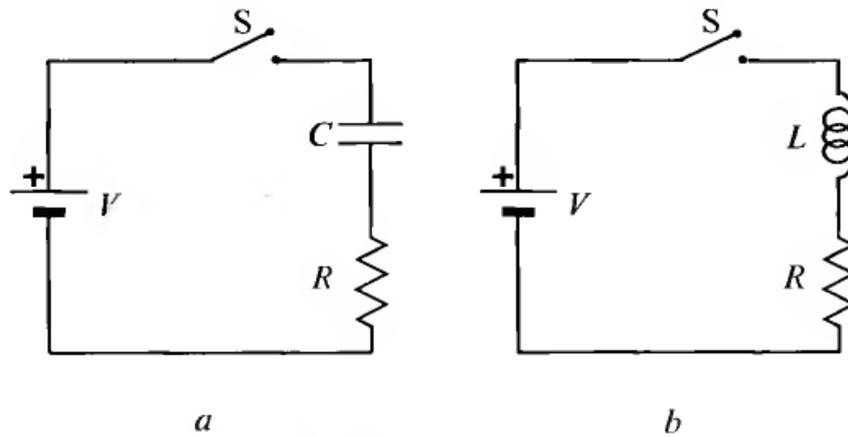


Figura P14.1

**Solución**

En el apartado de la introducción correspondiente a los fenómenos transitorios en un circuito  $R - L$  serie, se obtiene la siguiente expresión para la corriente,

$$i = \frac{V}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L}t))$$

De forma análoga, en el apartado sobre el circuito  $R - C$ , se deduce la expresión siguiente para la corriente,

$$i = \frac{V}{R} \exp(-\frac{t}{RC})$$

De las dos ecuaciones anteriores se deduce que para  $t = 0$  la corriente en el circuito  $R - L$  es nula mientras que en el circuito  $R - C$  alcanza el valor máximo, es decir,

Para  $t = 0$

$$\text{Circuito } R - L \rightarrow i = 0 ; \text{ Circuito } R - C \rightarrow i = \frac{V}{R}$$

Este comportamiento se debe a que inicialmente en el circuito  $R - L$  la f.c.m. inducida en la autoinducción  $L$  que se opone al paso de corriente alcanza su máximo valor  $V$ , en consecuencia la corriente es nula. En el circuito  $R - C$  ocurre lo contrario, es decir, en el instante inicial el condensador está

descargado y por tanto la diferencia de potencial entre sus bornes es cero y como consecuencia la corriente únicamente está limitada por la resistencia  $R$ ,  $i = V/R$ .

Si reducimos  $R$  a la mitad, el parámetro del circuito que cambia en ambos casos es la denominada constante de tiempo, y como se muestra en los apartados correspondientes de la introducción, es de la forma siguiente en cada circuito,

$$\text{Circuito } R - L \rightarrow \tau = \frac{L}{R} ; \text{ Circuito } R - C \rightarrow \tau = RC$$

Cuando se reduce la resistencia a la mitad, las respectivas constantes de tiempo son,

$$\text{Circuito } R - L \rightarrow \tau = \frac{2L}{R} ; \text{ Circuito } R - C \rightarrow \tau = \frac{R}{2}C$$

En forma verbal, la constante de tiempo se duplica en el circuito  $R - L$  y se reduce a la mitad en el circuito  $R - C$

### PROBLEMA 14.2

Al cerrar el interruptor  $S$  del circuito indicado en la figura P14.2, circula por él una corriente oscilatoria que se inicia y termina con valor nulo. Explicar qué componentes del circuito y por qué razón determinan los valores inicial y final de la corriente indicados.

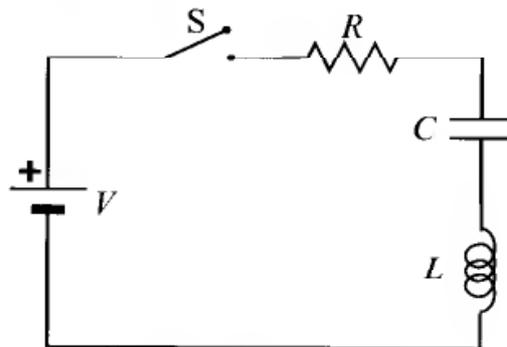


Figura P14.2

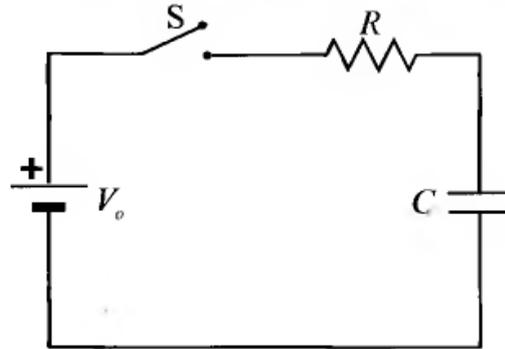
### Solución

Comienza con valor nulo por que la f.e.m. inducida en  $L$ , como hemos visto en el problema anterior, inicialmente es del mismo valor y signo contrario a la aplicada.

Cuando  $t$  tiende a infinito la f.e.m. inducida en  $L$  tiende a cero, pero el condensador se comporta como un circuito abierto en el caso de corriente continua, por tanto la corriente final también es nula.

**PROBLEMA 14.3**

En el instante  $t = 0$  se cierra el conmutador  $S$  en el circuito  $R - C$  indicado en la figura P14.14. Calcular las energías suministrada por la batería, disipada en la resistencia y almacenada en el condensador.

**Figura P14.3****Solución**

En primer lugar debemos obtener la ecuación que relaciona las distintas tensiones en los bornes de cada componente en un instante dado y la que se aplica mediante la batería.

En el condensador,

$$u = \frac{q}{C}$$

En la resistencia

$$u = R i$$

La tensión aplicada será igual a la suma de la tensión en el condensador y resistencia.

$$V_o = \frac{q}{C} + R i$$

Para calcular la energía suministrada por la batería, así como la almacenada en el condensador y disipada en la resistencia, se multiplica ambos miembros de la ecuación anterior por  $i dt$  y se integran entre 0 e  $\infty$ ,

$$V_o i dt = \frac{q}{C} i dt + R i^2 dt$$

Teniendo en cuenta la definición de corriente,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$V_o i dt = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} dt + R i^2 dt = \frac{1}{C} q dq + R i^2 dt$$

En el apartado correspondiente a los fenómenos transitorios en un circuito  $R - C$ , la corriente obtenida es de la forma,

$$i = \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Calculamos la energía suministrada por la batería utilizando la corriente anterior e integrando entre cero e infinito,

$$W_b = \int_0^{\infty} V_o \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt = \frac{V_o^2}{R} (-CR) \left[ \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]_0^{\infty} = V_o^2 C$$

La energía almacenada en el condensador se obtiene mediante la integración del segundo término del segundo miembro de la ecuación para el balance de energía en el circuito,

$$W_c = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{C} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Donde  $Q$  representa la carga final del condensador, es decir, para  $t = \infty$ . La carga inicial del condensador es nula, ya que suponemos que se parte del condensador descargado. Por definición la relación entre la carga y potencial en el condensador es  $Q = C V_o$ , por tanto,

$$W_c = \frac{1}{2} \frac{1}{C} (C V_o)^2 = \frac{1}{2} C V_o^2$$

Llevando las expresiones de  $W_b$  y  $W_c$  a la ecuación que muestra el balance de energía en los distintos componentes obtenemos,

$$V_o^2 C = \frac{1}{2} C V_o^2 + \int_0^{\infty} R i^2 dt$$

Despejando el término con la integral y operando obtenemos la energía disipada en la resistencia, que es de la forma siguiente,

$$W_R = \int_0^{\infty} R i^2 dt = \frac{1}{2} C V_o^2$$

En conclusión, la batería suministra una energía  $W_b = C V_o^2$ . La mitad de dicha energía se almacena en el condensador y la otra mitad se disipa en la resistencia  $R$  durante el proceso que culmina con la carga del condensador al potencial  $V_o$ .

#### PROBLEMA 14.4

En un instante dado el conmutador  $S$  de la figura P14.1 pasa de la posición 1 a la 2. Calcular el intercambio de energía en el circuito  $R - L$ .

Suponemos que en dicho instante por el circuito  $R - L$  circula una corriente  $I_o = V_o/R$ .

#### Solución

Calculamos el balance de energía en el proceso que ocurre al cortocircuitar el sistema  $R - L$  partiendo de la ecuación diferencial que expresa su comportamiento en régimen transitorio:

$$L \frac{di}{dt} + R i = 0$$

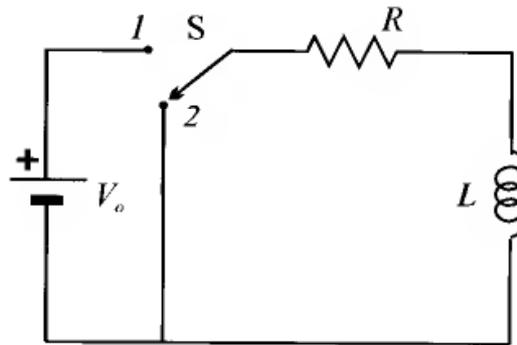


Figura P14.4

Si multiplicamos los términos de la ecuación por  $i dt$ , y a continuación integramos entre  $t = 0$  y  $t = \infty$ , obtenemos el balance de energía en el proceso.

$$\int_0^{\infty} L \frac{di}{dt} i dt + \int_0^{\infty} R i^2 dt = 0$$

$$W_L = \int_0^{\infty} L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^{\infty} L i di = L \left[ \frac{i^2}{2} \right]_0^{\infty}$$

Para  $t = 0$  la corriente que circula por  $L$  es  $I_o = V_o/R$ . Cuando  $t = \infty$  la corriente por el circuito es cero. Con estos límites la energía  $W_L$  será,

$$W_L = -\frac{1}{2} L I_o^2$$

Llevando este resultado a la ecuación del balance energético queda,

$$-\frac{1}{2} L I_o^2 + \int_0^{\infty} R i^2 dt = 0$$

Despejando la energía disipada en la resistencia tendremos,

$$\int_0^{\infty} R i^2 dt = \frac{1}{2} L I_o^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{V_o}{R} \right)^2$$

Las relaciones obtenidas ponen de manifiesto que la energía almacenada en el instante  $t = 0$  en la autoinducción  $L$  se disipa en la resistencia durante el proceso que termina con una corriente nula en el circuito.

### PROBLEMA 14.5

Dado el circuito indicado en la figura P14.5, en el instante  $t = 0$  se cierra el interruptor S.

Calcular la corriente  $i(t)$  que circula por  $L$ .

#### Solución

Se trata de encontrar la corriente de cortocircuito en la autoinducción  $L = 0,1H$ . La ecuación diferencial que gobierna este proceso es:

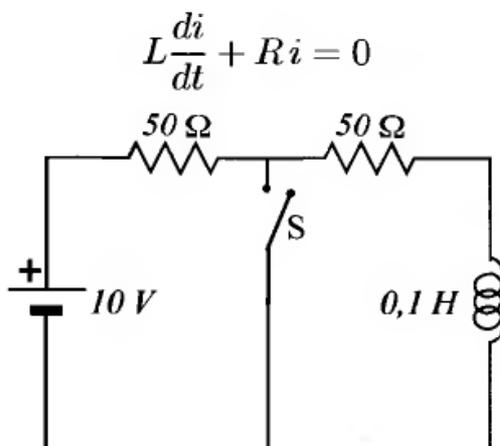


Figura P14.5

y su solución es:

$$i = I_o \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$$

La corriente inicial en nuestro caso es la que atraviesa la dos resistencias de  $50 \Omega$  y  $L$  antes de cerrar S, es decir,

$$I_o = \frac{V_o}{2 \times 50} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ A}$$

Al cortocircuitar, la única resistencia que permanece en serie con  $L$  es  $R = 50 \Omega$ , por tanto la corriente que circula por  $L$  es,

$$i = 0,1 \exp\left(-\frac{50}{0,1} t\right) = 0,1 \exp(-500 t)$$

### PROBLEMA 14.6

En el circuito indicado en la figura P14.6 el conmutador S está inicialmente en la posición 1, alcanzando el estado estacionario. En un instante, que consideramos  $t = 0$ , pasamos S a la posición 2.

Calcular la corriente  $i(t)$  que circula por  $R$ .

#### Solución

Dado que en este problema se trata de cambiar la fuente aplicada, el proceso que tiene lugar consiste en pasar de un condensador cargado a que, en el mismo circuito, se produzca la carga del condensador a otro potencial.

En el apartado 14.1.1.2 encontramos la solución de la ecuación general para la carga  $q$ , y es de la forma,

$$q = N \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + C V_o$$

$V_o$  es el valor del potencial de la pila en la segunda posición, es decir,  $V_o = 5 \text{ V}$ .

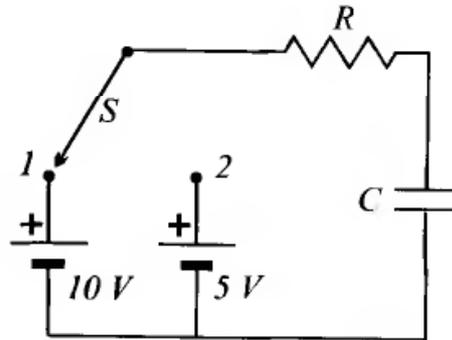


Figura P14.6

La constante  $N$  se calcula aplicando las condiciones iniciales, y en este problema se concretan en que el condensador está cargado en el instante  $t = 0$  a un potencial de  $10\text{ V}$ .

$$\text{Para } t = 0 \quad q = Q_0 = C V = C 10$$

De donde se deduce que,

$$10C = N \exp\left(-\frac{0}{RC}\right) + 5C$$

Operando obtenemos  $N = 5C$ .

Sustituyendo  $N$  en la primera ecuación,

$$q = 5C \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + 5C = 5C \left(1 + \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

La corriente  $i$  se obtiene derivando la carga con respecto al tiempo.

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{5}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

El signo negativo se debe a que el condensador se descarga en lugar de cargarse, ya que pasa de estar bajo la tensión de  $10\text{ V}$  a la de  $5\text{ V}$ .

### PROBLEMA 14.7

Dado el circuito indicado en la figura P14.7, calcular las corrientes de malla  $i_1$  e  $i_2$  a partir del instante en que se cierra el conmutador  $S$ .

Calcular también la corriente que circula por  $R'$  ( $R' = 2R$ ).

Suponemos que la pila ha estado conectada antes del cierre del interruptor durante el tiempo necesario para cargar completamente el condensador  $C$ .

### Solución

Ahora vamos a estudiar un circuito compuesto por dos mallas y aplicaremos las leyes de Kirchhoff. Establezcamos en primer lugar las ecuaciones de red para tensiones, corrientes y carga en un instante dado.

Malla 1

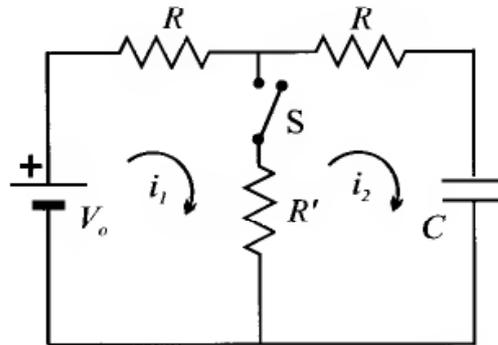
$$V_o = (R + R') i_1 - R' i_2$$

Malla 2

$$0 = -R' i_1 + (R + R') i_2 + \frac{q}{C}$$

En la malla 2 se verifica además que,

$$i_2 = \frac{dq}{dt}$$



**Figura P14.7**

Derivando las dos ecuaciones con respecto al tiempo y agrupándolas tendremos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$(R + R') \frac{di_1}{dt} - R' \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$-R' \frac{di_1}{dt} + (R + R') \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = 0$$

Despejando  $(di_1/dt)$  y sustituyendo en la segunda tendremos,

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{R'}{R + R'} \frac{di_2}{dt}$$

$$-\frac{R'^2}{R + R'} \frac{di_2}{dt} + (R + R') \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = 0$$

Realizando operaciones queda,

$$\frac{R^2 + 2RR'}{R + R'} \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = 0$$

Si definimos,

$$a = \frac{R(R + 2R')}{R + R'}$$

Teniendo en cuenta que  $R' = 2R$

$$a = \frac{5}{3}R$$

la ecuación diferencial queda de la forma siguiente,

$$a \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = 0$$

Esta ecuación diferencial es similar a la que obtuvimos para  $q$  en un circuito  $R - C$  en régimen transitorio, con  $R = a$ .

Su solución es de la forma,

$$i_2 = A \exp\left(-\frac{t}{aC}\right) + B$$

Las constantes  $A$  y  $B$  se calculan con las condiciones que cumple  $i_2$  para  $t = \infty$  y la carga del condensador en  $t = 0$ .

Para  $t = \infty$  la corriente que atraviesa el condensador es nula, circuito abierto,

$$\text{Para } t = \infty \quad 0 = 0 + B$$

De la relación se deduce que  $B = 0$ .

Determinamos  $A$  utilizando la carga  $q$  con sus respectivas condiciones.

Dado que,

$$\frac{dq}{dt} = i_2$$

Integrado la corriente  $i_2$  tendremos,

$$q = \int i_2 dt = A(-aC) \exp\left(-\frac{t}{aC}\right) + D$$

Para  $t = 0$   $q = Q_o = CV_o$ . De donde se deduce que,

$$Q_o = CV_o = A(-aC) + D$$

Cuando  $t = \infty$  el condensador esta a un potencial que depende de la corriente que circula por la malla uno; dicho potencial será,

$$V_{fC} = V_o - R \frac{V_o}{R + R'} = V_o \left(1 - \frac{R}{R + R'}\right) = \frac{R'}{R + R'} V_o$$

por tanto,

$$Q_{fC} = CV_{fC} = \frac{R'}{R + R'} V_o C$$

Llevando este valor a la solución de  $q$  tendremos que,

$$Q_{fC} = \frac{R'}{R + R'} V_o C = D$$

Combinado esta condición con la obtenida para  $t = 0$  obtenemos la constante  $A$ .

$$A = \frac{CV_o - D}{-aC} = -\frac{V_o}{a} \left(1 - \frac{R'}{R + R'}\right) = -\frac{V_o}{a} \frac{R}{R + R'}$$

La corriente  $i_2$  queda de la forma,

$$i_2 = -\frac{V_o}{a} \frac{R}{R + R'} \exp\left(-\frac{t}{aC}\right)$$

Considerando que  $a = (5/3)R$  y  $R' = 2R$ , queda,

$$i_2 = -\frac{1}{5} \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{3t}{5RC}\right)$$

De la primera ecuación establecida para la malla 1 podemos deducir  $i_1$  en función de  $i_2$ . Despejando  $i_1$ ,

$$i_1 = \frac{V_o}{R + R'} + \frac{R'}{R + R'} i_2 = \frac{1}{R + R'} (V_o + R' i_2)$$

$$i_1 = \frac{1}{R + R'} \left( V_o - R' \frac{1}{5} \frac{V_o}{R} \exp\left(-\frac{3t}{5RC}\right) \right)$$

$$i_1 = \frac{V_o}{3R} \left( 1 - \frac{2}{5} \exp\left(-\frac{3t}{5RC}\right) \right)$$

La corriente que circula por  $R'$  es la que corresponde a la rama común entre las dos mallas.

$$i_c = i_1 - i_2 = \frac{V_o}{3R} \left( 1 - \frac{2}{5} \exp\left(-\frac{3t}{5RC}\right) \right) + \frac{V_o}{5R} \exp\left(-\frac{3t}{5RC}\right)$$

$$i_c = \frac{V_o}{15R} \left( 5 + \exp\left(-\frac{3t}{5RC}\right) \right)$$

También se puede resolver el sistema de ecuaciones utilizando la carga  $q$  como variable en la integración.

#### PROBLEMA 14.8

Dado el circuito que muestra la figura P14.8, calcular la corriente  $i$  que circula por  $R_1$  cuando cerramos el interruptor S.

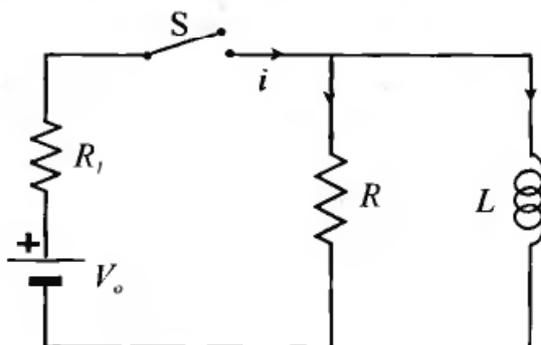


Figura P14.8

#### Solución

Si consideramos el circuito formado por dos mallas con las corrientes,  $i_1 = i$  en la primera malla e  $i_2$  en la segunda. Las ecuaciones respectivas para cada malla cuando se cierra el circuito son:

$$\begin{aligned} V_o &= (R + R_1) i - R i_2 \\ -L \frac{di_2}{dt} &= -R i + R i_2 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones podemos obtenerla despejando  $i$  en la primera ecuación y sustituyendo dicho valor en la segunda.

$$i = \frac{V_o + R i_2}{R + R_1} = \frac{V_o}{R + R_1} + \frac{R}{R + R_1} i_2$$

Sustituyendo en la segunda y trasponiendo términos,

$$0 = -R \frac{V_o + R i_2}{R + R_1} + R i_2 + L \frac{d i_2}{d t}$$

$$0 = -\frac{R V_o}{R + R_1} - \frac{R^2}{R + R_1} i_2 + R i_2 + L \frac{d i_2}{d t}$$

Si multiplicamos la última ecuación por  $(R + R_1)/R$  y operamos, queda de la forma,

$$V_o = R_1 i_2 + \frac{R + R_1}{R} L \frac{d i_2}{d t} \rightarrow V_o = R_1 i_2 + L' \frac{d i_2}{d t}$$

Donde

$$L' = \frac{R + R_1}{R} L$$

La ecuación deducida es similar a la que corresponde a un circuito  $R-L$ , cuya solución obtuvimos en el apartado 14.1.1.1, que es:

$$i_2 = \frac{V_o}{R_1} + M \exp\left(-\frac{R}{L'} t\right)$$

La constante  $M$  se determina con las condiciones iniciales. Al conectar el interruptor S la corriente en la malla dos es nula, ya que la f.e.m. en la autoinducción se opone al paso de corriente, por tanto,

$$\text{Para } t = 0 \quad i_2 = 0$$

De esta condición se deduce que,

$$M = -\frac{V_o}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{V_o}{R_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L'} t\right)\right)$$

Para calcular la corriente  $i$ , llevamos esta solución para  $i_2$  a la expresión obtenida con la ecuación de la primera malla, es decir,

$$i = \frac{V_o}{R + R_1} + \frac{R}{R + R_1} \frac{V_o}{R_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L'} t\right)\right)$$

Sustituyendo  $L'$  por su valor y operando queda,

$$i = \frac{V_o}{R + R_1} \left(1 + \frac{R}{R_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{R R_1}{L(R + R_1)} t\right)\right)\right)$$

Esta ecuación muestra que en el instante inicial ( $t = 0$ ) la corriente  $i$  es,

$$i = \frac{V_o}{R + R_1}$$

Para  $t = \infty$

$$i = \frac{V_o}{R_1}$$

Los valores muestran que inicialmente la autoinducción se comporta como un circuito abierto y cuando pasa mucho tiempo tiende a un cortocircuito.

### PROBLEMA 14.9

A un circuito formado por una resistencia  $R = 1 \text{ k}\Omega$  en serie con una autoinducción  $L = 3 \text{ H}$ , se le suministra una corriente de la forma que muestra la figura P14.9.

1) Calcular la energía suministrada al circuito entre 0 y 10 s. y entre 0 y 35 s.

2) Calcular la energía almacenada en la autoinducción en el instante  $t = 35 \text{ s}$ .

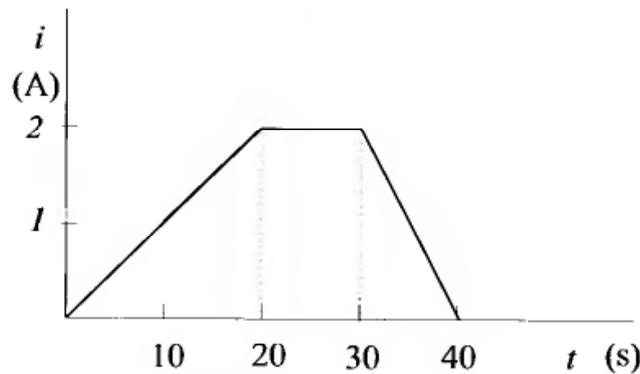


Figura P14.9

### Solución

La ecuación diferencial que expresa el comportamiento de un circuito  $R - L$ , con  $i = i(t)$  y  $u = u(t)$  es:

$$L \frac{di}{dt} + R i = u$$

La energía suministrada por el generador será:

$$W = \int_0^t u i dt$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación diferencial anterior por  $i$  y sustituyendo en la energía tendremos,

$$W = \int_0^t u i dt = L \int_0^t i di + R \int_0^t i^2 dt$$

Para calcular los dos términos del segundo miembro necesitamos conocer el comportamiento de  $i$  en los distintos intervalos de tiempo.

Intervalo  $0 \leq t \leq 20$

La ecuación de la recta  $i - t$  nos proporciona la variación de la corriente con el tiempo.

$$i = \frac{2}{20}t = 0,1t$$

Intervalo  $20 \leq t \leq 30$

$$i = 2$$

Intervalo  $30 \leq t \leq 40$

$$i = -\frac{2}{10}t + b$$

para  $t = 40$   $i = 0$ , por tanto  $b = 8$

$$i = -0,2t + 8$$

1) La energía disipada en la resistencia es:

$$W_R = R \int_0^t i^2 dt$$

La energía almacenada en el campo magnético:

$$W_m = L \int_0^t i di$$

Entre 0 y 10 segundos

$$W_R = R \int_0^{10} 0,01 t^2 dt = 10^3 \times 10^{-2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{1}{3} 10^4 \quad [\text{J}]$$

La corriente para  $t = 10$  es 1 A, por tanto,

$$W_m = L \int_0^1 i di = \frac{1}{2} L [i^2]_0^1 = \frac{1}{2} \quad [\text{J}]$$

La energía total será:

$$W = \int_0^{10} u i dt = \frac{1}{3} 10^4 + \frac{1}{2} \simeq 3333,8 \quad [\text{J}]$$

Entre 0 y 35 segundos

$$W'_R = R \int_0^{20} 0,01 t^2 dt + R \int_{20}^{30} 2^2 dt + R \int_{30}^{35} (-0,2t + 8)^2 dt$$

$$W'_R \simeq 10^3 \times \left( 10^{-2} \frac{8000}{3} + 4 \times 10 + 11,667 \right) \simeq 78333 \quad [\text{J}]$$

La corriente para  $t = 35$  es 1 A, por tanto,

$$W'_m = L \int_0^1 i di = \frac{1}{2} L [i^2]_0^1 = \frac{1}{2} \quad [\text{J}]$$

La energía total será:

$$W' = \int_0^{35} u i dt \simeq 78333 + \frac{1}{2} \simeq 78333,5 \quad [\text{J}]$$

2) La energía almacenada en la autoinducción en el instante  $t = 35$  s es:

$$W'_m = L \int_0^1 i di = \frac{1}{2} L [i^2]_0^1 = \frac{1}{2} = 0,5 \quad [\text{J}]$$

### PROBLEMA 14.10

Calcular las reactancias  $X_L$  de una bobina de 1 mH y  $X_C$  de un condensador de 1  $\mu\text{F}$ , para las siguientes frecuencias:  $f = 1000$  Hz y  $f = 10000$  Hz.

#### Solución

Dado que  $\omega = 2\pi f$  y teniendo en cuenta que,

$$X_L = \omega L \quad \text{y} \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

Cuando  $f = 1000$  Hz

$$X_L = 2\pi 10^3 \times 10^{-3} = 2\pi \quad \Omega \quad \text{y} \quad X_C = -\frac{1}{2\pi 10^3 \times 10^{-6}} = -\frac{500}{\pi} \quad [\Omega]$$

Para  $f = 10000$  Hz

$$X'_L = 2\pi 10^4 \times 10^{-3} = 20\pi \quad \Omega \quad \text{y} \quad X'_C = -\frac{1}{2\pi 10^4 \times 10^{-6}} = -\frac{50}{\pi} \quad [\Omega]$$

### PROBLEMA 14.11

Dibujar una gráfica de la reactancia en función de la frecuencia para los dos componentes indicados en el problema anterior. Observar los valores respectivos para  $f = 0$  y  $f \rightarrow \infty$ .

#### Solución

Partiendo de los valores de cada reactancia en función de la frecuencia angular obtenemos sus valores en función de  $f$ ,

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad ; \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi f C}$$

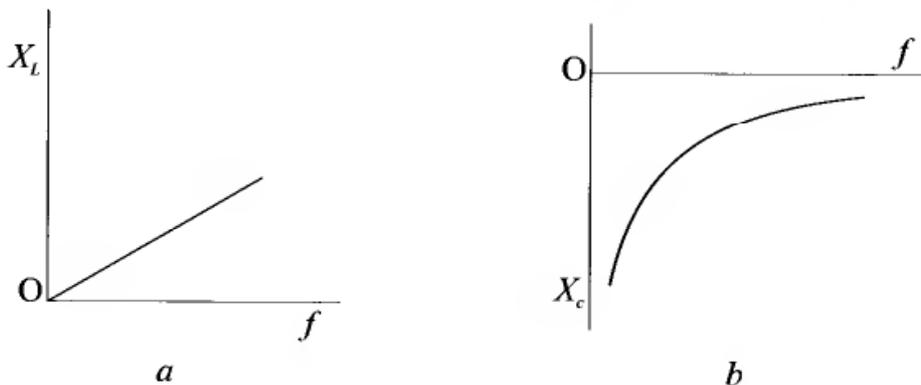


Figura P14.11

La reactancia inductiva es una función lineal de la frecuencia, mientras que la capacitiva varía con la inversa de la frecuencia. Su representación gráfica se muestra en las figuras P14.11a y P14.11b.

En los extremos de la frecuencia, las reactancias alcanzan los siguientes valores,

$$\text{Para } f \rightarrow 0 \quad X_L \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad X_C \rightarrow -\infty$$

$$\text{Para } f \rightarrow \infty \quad X_L \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad X_C \rightarrow 0$$

### PROBLEMA 14.12

Una bobina de 50 mH tiene una reactancia inductiva de 1500  $\Omega$  (1,5 k $\Omega$ ) para una frecuencia determinada, ¿Cuál es dicha frecuencia? Si se duplica la frecuencia, ¿cuánto varía la reactancia inductiva?

#### Solución

La reactancia inductiva es:

$$X_L = \omega L = \omega \times 50 \times 10^{-3} = 1500 \Omega$$

por tanto, despejando  $\omega$  tendremos,

$$\omega = \frac{1500}{50 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$$

Dado que  $\omega = 2\pi f$ , la frecuencia será,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3 \times 10^4}{2\pi} \simeq 4774.65 \text{ c/s}$$

Si se duplica la frecuencia,

$$X'_L = 2\omega L = 2 \times 1500 \Omega = 3000 \Omega$$

Es decir, se duplica la reactancia.

### PROBLEMA 14.13

Un condensador de 0,5  $\mu\text{F}$  tiene una reactancia capacitiva de  $-15 \Omega$  para una determinada frecuencia, ¿cuál es dicha frecuencia? Si se reduce dicha frecuencia a la mitad, ¿cuánto valdrá ahora la reactancia capacitiva?

#### Solución

La reactancia capacitiva es:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{\omega \times 0,5 \times 10^{-6}} = -15 \Omega$$

Despejando  $\omega$  tendremos,

$$\omega = \frac{1}{15 \times 0,5 \times 10^{-6}} \simeq 133333,33 \text{ s}^{-1}$$

y la frecuencia  $f$  será,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^6}{2\pi \times 7,5} \simeq 21220,7 \text{ c/s}$$

Si se reduce la frecuencia a la mitad,  $\omega' = \frac{1}{2}\omega$  y por tanto,

$$-\frac{1}{\omega' C} = -\frac{2}{\omega C} = -2 \times 15 = -30 \Omega$$

La reactancia capacitiva se duplica.

#### PROBLEMA 14.14

Tenemos una bobina de 0.4 H en serie con un condensador de 0.1  $\mu\text{F}$ . Calcular la frecuencia para la que tienen el mismo módulo la reactancia inductiva y la capacitiva. Obtener las reactancias respectivas.

#### Solución

La dos reactancias tienen el mismo módulo cuando se cumple que,

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Es decir, cuando,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-1} \times 1 \times 10^{-7}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-8}}} = 5000 \text{ s}^{-1}$$

La frecuencia es,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5000}{2\pi} \simeq 795,775 \text{ c/s}$$

Las respectivas reactancias para la frecuencia obtenida son:

$$X_L = \omega L = 5000 \times 0,4 = 2000 \Omega$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{5000 \times 0,1 \times 10^{-6}} = -2000 \Omega$$

#### PROBLEMA 14.15

Tenemos un circuito  $R-L-C$  serie. con  $R = 4 \Omega$ ,  $L = 5 \mu\text{H}$  y  $C = 1 \mu\text{F}$ , y se supone que la frecuencia angular utilizada es  $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Calcular cada una de las reactancias. Obtener la impedancia compleja, así como el módulo y la fase de dicha impedancia.

#### Solución

La ecuación (14.27) del apartado 14.1.2.1 de la introducción, donde se estudia la forma compleja de la impedancia, muestra los componentes de dicha impedancia cuando se disponen los elementos en serie como en este problema.

Para calcular la solución debemos sustituir los datos que corresponden a cada componente y realizar la operaciones necesarias a fin de obtener el resultado,

$$\begin{aligned} X_L &= \omega L = 10^6 \times 5 \times 10^{-6} = 5 \ \Omega \\ X_C &= -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^6 \times 10^{-6}} = -1 \ \Omega \\ R &= 4 \ \Omega \end{aligned}$$

La impedancia compleja será,

$$\begin{aligned} \bar{Z} = \mathbf{Z} &= R + j(X_L + X_C) = 4 + j(5 - 1) \\ \mathbf{Z} &= 4 + j4 \end{aligned}$$

El módulo de la impedancia es,

$$Z = |\mathbf{Z}| = (4^2 + 4^2)^{1/2} = 4\sqrt{2} \ \Omega$$

La fase o ángulo que forma el vector que representa la impedancia con el eje real (eje X) es,

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{X_L + X_C}{R} = \arctan \left( \frac{4}{4} \right) = \arctan(1) \\ \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

### PROBLEMA 14.16

Se define el voltaje eficaz de una tensión periódica  $f(t)$  de la forma siguiente:

$$V_e = \left( \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

Calcular el valor eficaz de la tensión periódica que se muestra en la figura P14.16.

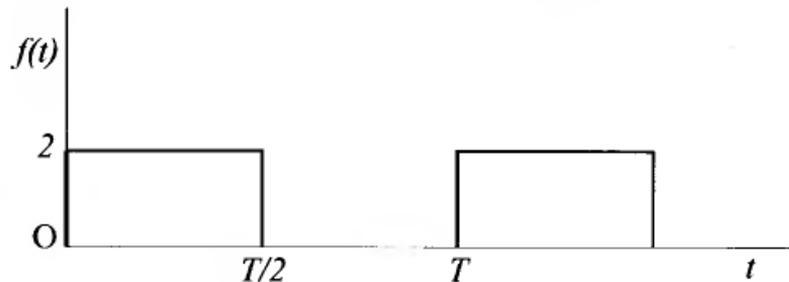


Figura P14.16

### Solución

La función periódica que representa la figura P14.16 es un impulso rectangular cuya amplitud es 2 y su periodo  $T$ . Aplicando la definición de tensión eficaz calculamos su valor,

$$V_e = \left( \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 2^2 dt + \int_{T/2}^T 0 \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{T} 4 \frac{T}{2} \right)^{1/2}$$

El valor eficaz de la tensión es,

$$V_e = \sqrt{2} \quad [\text{V}]$$

### PROBLEMA 14.17

Dado el circuito indicado en la figura P14.17, calcular lo siguiente: Impedancia de cada rama, corriente en cada rama, impedancia conjunta de las dos ramas y corriente total que suministra la fuente de energía.  $V = 10 \cos 10^4 t$ .

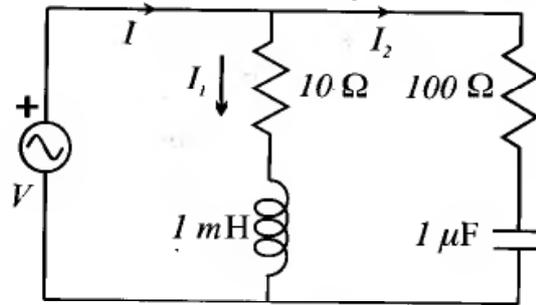


Figura P14.17

### Solución

El generador suministra una tensión

$$V = V_o \cos \omega t = 10 \cos 10^4 t$$

De donde se deduce que,

$$V_o = 10 \text{ V} \quad \text{y} \quad \omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$$

*Impedancias de cada rama*

La impedancia de la rama izquierda es una asociación en serie de una resistencia y una inductancia, por tanto su impedancia será,

$$\mathbf{Z}_1 = 10 + jX_L = 10 + j10^4 \times 10^{-3} = 10 + j10$$

El módulo y la fase correspondiente son,

$$Z_1 = (10^2 + 10^2)^{1/2} = 10\sqrt{2} \quad [\Omega]$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{10}{10}\right) = \arctan(1) \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

La expresión exponencial de la impedancia es,

$$\mathbf{Z}_1 = Z_1 e^{j\theta_1} = 10\sqrt{2} e^{j\pi/4} = 10\sqrt{2} \exp(j\frac{\pi}{4})$$

La impedancia de la rama derecha es una asociación en serie de una resistencia y una reactancia capacitiva, por lo que su impedancia será,

$$\mathbf{Z}_2 = 100 + j X_C = 100 - j \frac{1}{10^4 \times 10^{-6}} = 100 - j 100$$

Su módulo y fase son,

$$Z_2 = (100^2 + 100^2)^{1/2} = 100\sqrt{2} \quad [\Omega]$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-100}{100}\right) = \arctan(-1) \quad \rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

La forma exponencial de  $\mathbf{Z}_2$  es,

$$\mathbf{Z}_2 = Z_2 e^{j\theta_2} = 100\sqrt{2} e^{-j\pi/4} = 100\sqrt{2} \exp(-j\frac{\pi}{4})$$

*Corriente en cada rama*

Rama izquierda,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{10}{10\sqrt{2} e^{j\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{\pi}{4} - j \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$$

Hemos utilizado la formula de Euler  $e^{-j\theta} = \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta$ , que relaciona la exponencial compleja con las funciones circulares seno y coseno.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - j) \quad [\text{A}]$$

Podemos calcular la corriente usando la forma cartesiana de los números complejos,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{10}{10 + j10} = \frac{1}{1 + j} = \frac{1 - j}{1 + 1}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2}(1 - j) \quad [\text{A}]$$

La corriente  $\mathbf{I}_2$  será,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{10}{100 - j100} = \frac{1}{10(1 - j)} = \frac{1 + j}{10(1 - j)(1 + j)}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{20}(1 + j) \quad [\text{A}]$$

*Impedancia conjunta*

Se obtiene asociando las dos impedancias  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$  en paralelo,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{10 + j10} + \frac{1}{100 - j100}$$

Realizando operaciones,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{10} \left( \frac{1}{2}(1 - j) + \frac{1}{200}(1 + j) \right) = \frac{1}{200} (10(1 - j) + (1 + j))$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{200} (11 - j9)$$

$$\mathbf{Z} = 200 \frac{11 + j9}{11^2 + 9^2} = \frac{200}{202} (11 + j9) \quad (\Omega)$$

La corriente total  $\mathbf{I}$  que suministra la fuente de energía será,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}(1 - j) + \frac{1}{20}(1 + j) = \frac{10}{20}(1 - j) + \frac{1}{20}(1 + j)$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{20}(11 - j9) \quad [\text{A}]$$

### PROBLEMA 14.18

La figura P14.18 muestra un circuito de corriente alterna.  $V = 10 \text{ V}$ ,  $\omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Calcular módulo y fase de la corriente  $\mathbf{I}$  que atraviesa la autoinducción  $L$ .

$R_1 = 5000 \Omega$ ,  $R_2 = 10000 \Omega$ ,  $C = 0.1 \mu\text{F}$ ,  $L = 10 \text{ H}$ .

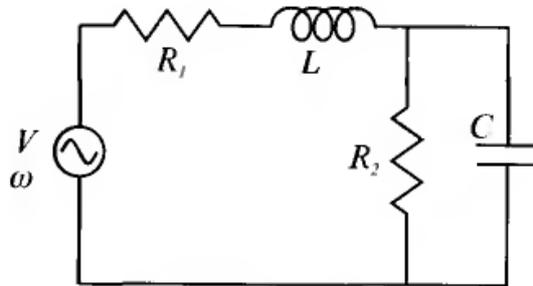


Figura P14.18

### Solución

Para calcular la corriente  $\mathbf{I}$  que atraviesa la inductancia  $L$ , debemos en primer lugar obtener la impedancia equivalente de condensador y resistencia  $R_2$  en paralelo. Después se calcula la impedancia debida a la autoinducción  $L$  en serie con la resistencia  $R_1$ .

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + j\omega C = \frac{1 + j\omega CR_2}{R_2}$$

Sustituyendo los datos numéricos,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1 + j10^3 \times 10^{-7} \times 10^4}{10^4} = \frac{1 + j}{10^4}$$

Despejando  $\mathbf{Z}_2$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{10^4}{1 + j} = \frac{10^4(1 - j)}{1 + 1} = 5000(1 - j)$$

La impedancia  $\mathbf{Z}_1$  es,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\omega L = 5000 + j10^3 \times 10 = 5000(1 + j2)$$

La impedancia total es la suma de las anteriores, que están dispuestas en serie.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

$$\mathbf{Z} = 5000(1 - j) + 5000(1 + j2) = 5000(2 + j)$$

La corriente  $\mathbf{I}$  se calcula aplicando la 2ª ley de Kirchhoff a la malla formada por el generador y las impedancias  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$ .

$$\mathbf{I} = \frac{V}{\mathbf{Z}} = \frac{10}{5000(2+j)} = \frac{10(2-j)}{5000(4+1)}$$

$$\mathbf{I} = \frac{2(2-j)}{5000} = \frac{4(2-j)}{10000} = 4 \times 10^{-4}(2-j)$$

El módulo de  $\mathbf{I}$  es,

$$I = 4 \times 10^{-4} \sqrt{4+1} = 4 \times 10^{-4} \sqrt{5} \quad [\text{A}]$$

La fase,

$$\tan \theta = \frac{-1}{2} = -0,5$$

$$\theta = \arctan(-0,5) = -26,565 \text{ grados}$$

La corriente se retrasa con respecto a la tensión aplicada.

### PROBLEMA 14.19

Disponemos de un circuito como el indicado en la figura P14.19, donde  $R = 10^5 \Omega$ ,  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0,001 \mu\text{F}$  y  $L = 1 \text{ mH}$ . La frecuencia angular  $\omega = 10^4$  y el generador G suministra una tensión  $V = 10 \angle 0 = 10 + j0$  voltios. Calcular módulo y fase de la corriente que circula por la autoinducción  $L$ . Obtener la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia  $R$ .

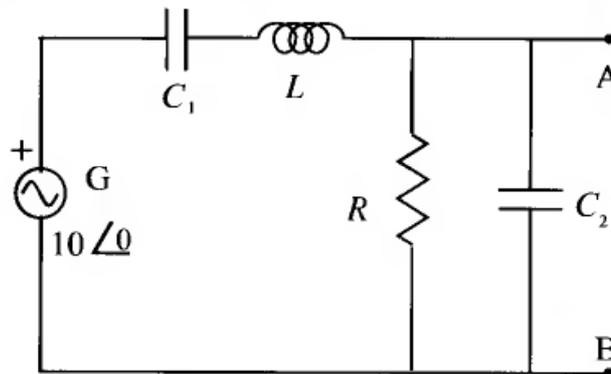


Figura P14.19

### Solución

El circuito está formado por dos impedancias  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$  en serie.

$\mathbf{Z}_1$  está formada por la autoinducción  $L$  y el condensador  $C_1$  en serie.

$\mathbf{Z}_2$  lo forman una resistencia  $R$  y el condensador  $C_2$  dispuestos en paralelo.

Calculamos en primer lugar las impedancias.

$$\mathbf{Z}_1 = j\omega L - \frac{j}{\omega C_1} = j 10^4 \times 10^{-3} - \frac{j}{10^4 \times 10^{-5}} = 0$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{R} + j\omega C_2 = \frac{1 + j\omega RC_2}{R} = \frac{1 + j10^4 \times 10^5 \times 10^{-9}}{10^5}$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = 10^{-5}(1 + j)$$

La corriente que circula por el circuito es,

$$\mathbf{I} = \frac{V}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{V}{\mathbf{Z}_2} = V \times 10^{-5}(1 + j)$$

$$\mathbf{I} = 10 \times 10^{-5}(1 + j) = 10^{-4}(1 + j) \text{ [A]}$$

Como la impedancia  $\mathbf{Z}_1 = 0$  para la frecuencia  $\omega = 10^4$ , la tensión entre los bornes de la resistencia  $R$  es,

$$V_{AB} = V = 10 \text{ [V]}$$

o bien,

$$V_{AB} = \mathbf{Z}_2 \mathbf{I} = \frac{10^{-4}(1 + j)}{10^{-5}(1 + j)} = 10 \text{ [V]}$$

### PROBLEMA 14.20

La figura P14.20 muestra un circuito de corriente alterna. Los valores de cada componente se expresan en forma de número complejo.

Calcular el módulo y la fase de la corriente  $\mathbf{I}$  que suministra el generador.

#### Solución

Determinamos la impedancia total del circuito. En primer lugar calculamos la impedancia de la paralelo de resistencia y condensador en paralelo que denominamos  $\mathbf{Z}_1$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{-j4} = \frac{1 + j}{4}$$

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{4}{1 + j} \frac{1 - j}{1 - j} = \frac{4(1 - j)}{2} = 2(1 - j)$$

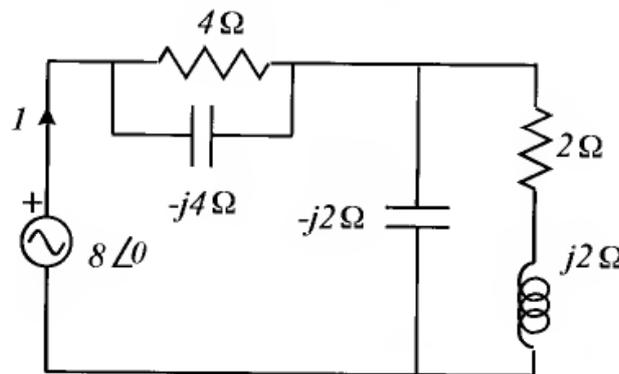


Figura P14.20

A continuación, la impedancia de la resistencia de  $2\Omega$  en serie con la bobina es

$$\mathbf{Z}_2 = (2 + j2) \Omega$$

Seguidamente,  $\mathbf{Z}_3$  es la impedancia equivalente de  $\mathbf{Z}_2$  en paralelo con el condensador

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{-j2} = \frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{-j2} = \frac{-j2 + (2 + 2j)}{-j4 + 4} = \frac{2}{4 - j4} = \frac{1}{2 - j2}$$

Luego

$$\mathbf{Z}_3 = 2(1 - j) \Omega$$

Y la impedancia total del circuito será la suma de  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_3$

$$\mathbf{Z}_T = 2(1 - j) + 2(1 - j) = 4(1 - j) \Omega$$

La corriente que circula por el circuito será

$$\mathbf{I} = \frac{V}{\mathbf{Z}_T} = \frac{8}{4(1 - j)}$$

Operando

$$\mathbf{I} = \frac{8}{4(1 - j)} \frac{1 + j}{1 + j} = (1 + j) \quad [\text{A}]$$

El módulo y la fase de la corriente serán

$$I = \sqrt{2} \text{ (A)} \quad \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

### PROBLEMA14.21

En la figura P14.21 se muestra un circuito divisor de tensión. Calcular la relación entre el voltaje de salida  $V_{AB}$  y el que suministra la fuente  $V = V_0 \cos \omega t$ . Comprobar si dicha relación varía con la frecuencia.

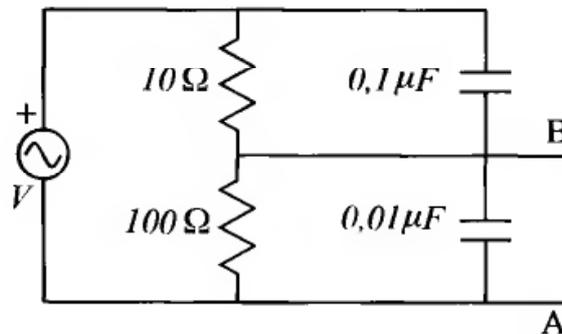


Figura P14.21

### Solución

El circuito es la asociación en serie de dos impedancia  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$ , que a su vez están formadas por la asociación en paralelo de una resistencia y un condensador. Para calcular  $V_{AB}$  debemos obtener primero las impedancia

$\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$  y después calcular la impedancia total. A partir de esta última se calcula la corriente y con ella se obtiene la tensión pedida.

Cálculo de las impedancias.

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1/j\omega C_1} = \frac{1}{10} + j\omega C_1 = 10^{-1} + j\omega 10^{-7}$$

$$\mathbf{Z}_1 = 10 \left( \frac{1}{1 + j\omega 10^{-6}} \right) = 10 \left( \frac{1 - j\omega 10^{-6}}{1 + \omega^2 10^{-12}} \right)$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 = \frac{1}{100} + j\omega 10^{-8} = 10^{-2}(1 + j\omega 10^{-6})$$

$$\mathbf{Z}_2 = 10^2 \left( \frac{1}{1 + j\omega 10^{-6}} \right) = 10^2 \left( \frac{1 - j\omega 10^{-6}}{1 + \omega^2 10^{-12}} \right)$$

La impedancia total es la suma de las dos anteriores, por tanto,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \left( \frac{1 - j\omega 10^{-6}}{1 + \omega^2 10^{-12}} \right) (10 + 100)$$

$$\mathbf{Z} = 110 \left( \frac{1 - j\omega 10^{-6}}{1 + \omega^2 10^{-12}} \right)$$

La corriente que suministra el generador es,

$$\mathbf{I} = \frac{V}{\mathbf{Z}} = \frac{V}{110} \left( \frac{1 + \omega^2 10^{-12}}{1 - j\omega 10^{-6}} \right)^{-1}$$

La diferencia de potencial entre AB es,

$$V_{AB} = \mathbf{I} \mathbf{Z}_2 = \frac{V}{110} \left( \frac{1 + \omega^2 10^{-12}}{1 - j\omega 10^{-6}} \right)^{-1} \times 100 \left( \frac{1 - j\omega 10^{-6}}{1 + \omega^2 10^{-12}} \right)$$

$$V_{AB} = \frac{100}{110} V \rightarrow \frac{V_{AB}}{V} = \frac{100}{110}$$

Vemos que la relación entre la tensión de entrada  $V$  y salida  $V_{AB}$  no depende de la frecuencia. La razón está en los valores de las resistencias y capacidades elegidas.

### PROBLEMA 14.22

Dado el circuito que muestra la figura P14.22, calcular la impedancia  $Z_{AB}$  que se puede medir en los bornes AB en función de la frecuencia angular  $\omega$ .

#### Solución

En este circuito se calcula la impedancia mediante la aplicación sucesiva de suma de impedancias en serie y paralelo.

$$1^\circ \mathbf{Z}_1 = j\omega L - \frac{j}{\omega C}; \quad 2^\circ \frac{1}{\mathbf{Z}_2} = j\omega C + \frac{1}{\mathbf{Z}_1}; \quad 3^\circ \mathbf{Z}_{AB} = \mathbf{Z}_2 + j\omega L$$

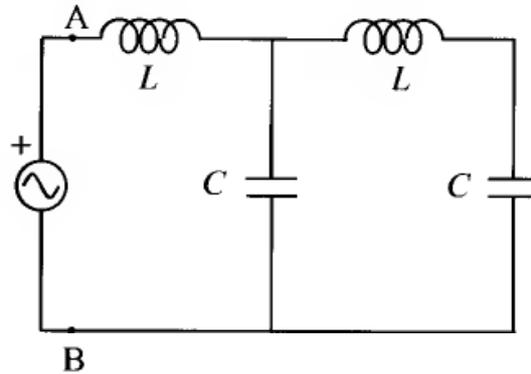


Figura P14.22

Realizando los pasos sucesivos tendremos,

$$\frac{1}{Z_2} = j\omega C + \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC} = j\omega C \left(1 + \frac{1}{1 - \omega^2 LC}\right)$$

$$Z_2 = -j \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega C (2 - \omega^2 LC)}$$

Finalmente,

$$Z_{AB} = j\omega L - j \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega C (2 - \omega^2 LC)} = j \frac{-\omega^4 L^2 C^2 + 3\omega^2 LC - 1}{\omega C (2 - \omega^2 LC)}$$

### PROBLEMA 14.23

En el circuito de la figura P14.23 consideramos dos zonas, la situada a la derecha de los puntos AB y la localizada a la izquierda. Suponemos que la segunda es un generador ideal en serie con una resistencia, y la primera una carga compuesta por resistencias y capacidades.

Donde  $\omega = 10^4$ ,  $C = 2\mu\text{F} = 2 \times 10^{-6} \text{F}$  y  $R = 50 \Omega$ .

Calcular la impedancia  $Z_{AB}$  del circuito situado a la derecha de los puntos AB.

**Solución**

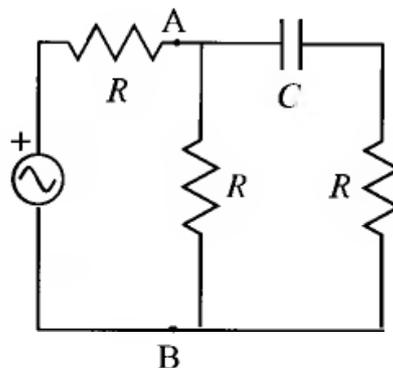


Figura P14.23

La solución se obtiene de mediante la aplicación sucesiva de la asociación de impedancias en serie y paralelo.

$$\mathbf{Z}_1 = -\frac{j}{\omega C} + R = \frac{\omega CR - j}{\omega C} = \frac{10^4 \times 2 \times 10^{-6} \times 50 - j}{10^4 \times 2 \times 10^{-6}} = 50(1 - j)$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50(1 - j)} = \frac{1}{100}(3 + j)$$

$$\mathbf{Z}_{AB} = 100 \frac{1}{3 + j} = 100 \frac{(3 - j)}{9 + 1}$$

El resultado final es,

$$\mathbf{Z}_{AB} = 10(3 - j)$$

### PROBLEMA 14.24

Dado el circuito de la figura P14.24a:

Donde  $\omega = 10^4$ ,  $L = 2 \times 10^{-3}$  H,  $C = 5 \mu\text{F} = 5 \times 10^{-6}$  F y  $R = 20 \Omega$ .

- 1) Calcular la impedancia  $\mathbf{Z}_{AB}$ .
- 2) Calcular la admitancia  $\mathbf{Y}_{AB}$ .
- 3) Obtener la parte real e imaginaria del circuito equivalente serie indicado en la figura P14.24b.

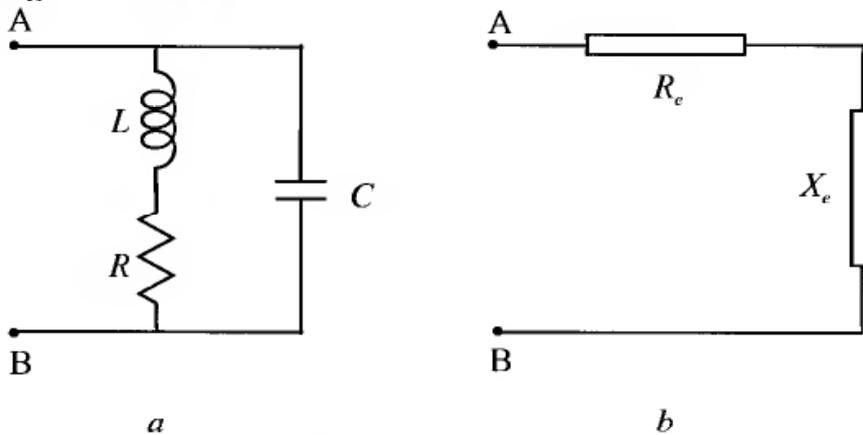


Figura P14.24

### Solución

#### 1) Cálculo de $\mathbf{Z}_{AB}$

En primer lugar se obtiene la impedancia de la resistencia y autoinducción en serie y después se calcula la composición en paralelo de la impedancia anterior con el condensador.

$$\mathbf{Z}_1 = R + j\omega L = 20 + j2 \times 10^{-3} \times 10^4 = 20 + j20 = 20(1 + j)$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + j\omega C = \frac{1}{20(1 + j)} + j10^4 \times 5 \times 10^{-6} = 0,025(1 - j) + 0,05j$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{AB}} = 0,025(1 + j)$$

El valor de  $\mathbf{Z}_{AB}$  es,

$$\mathbf{Z}_{AB} = \frac{1}{0,025(1+j)} = 20(1-j)$$

2) *Cálculo de la admitancia  $\mathbf{Y}_{AB}$*

Por definición,

$$\mathbf{Y}_{AB} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{1}{20(1-j)}$$

Por tanto

$$\mathbf{Y}_{AB} = 0,025(1+j)$$

3) *Cálculo de las componentes del circuito equivalente*

Hemos obtenido  $\mathbf{Z}_{AB}$ . Ahora simplemente debemos separar la parte real e imaginaria de la impedancia, en consecuencia,

$$R_e = 20 \quad \text{y} \quad X_e = -20$$

### PROBLEMA 14.25

A un circuito como el indicado en la figura P14.25 se le suministra una potencia por un generador de tensión ideal  $V = V_o \cos 2\pi 10^4 t$ .

Calcular el factor de potencia que corresponde al circuito.

#### Solución

El factor de potencia, como vimos en el apartado 14.1.2.4 de la introducción, es  $\cos \theta$ , siendo  $\theta$  el desfase entre tensión y corriente debido a la impedancia  $\mathbf{Z}$ .

$$\mathbf{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) ; \quad \tan \theta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

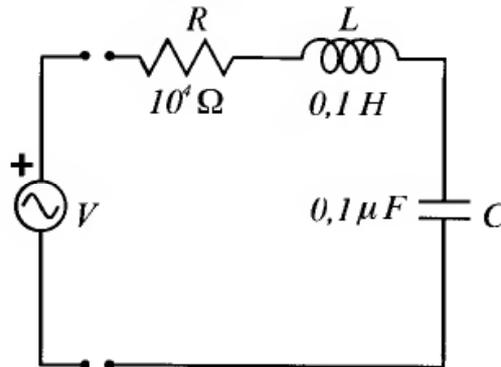


Figura P14.25

Sustituyendo los valores de los distintos componentes,

$$\tan \theta = \frac{2\pi 10^4 \times 10^{-1} - (2\pi 10^4 \times 10^{-7})^{-1}}{10^4} \simeq 0,612$$

La relación entre tangente y coseno es:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

Sustituyendo el valor de  $\tan \theta$  calculamos el factor de potencia.

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi - 1/2\pi)^2 \times 10^{-2}}} \simeq 0,853$$

### PROBLEMA 14.26

Dado el circuito indicado en la figura P14.26. calcular:

1) La diferencia de potencial entre los puntos AB, en función de  $R, C, \omega$  y  $V$ .

2) Representar gráficamente la variación del potencial entre A y B cuando cambia  $R$  desde cero hasta infinito.

### Solución

Se calcula en primer lugar la impedancia de cada rama del circuito al que conectamos el generador. Después se obtiene la corriente en cada rama. Finalmente se calculan las tensiones en los puntos A y B, cuya diferencia nos da la tensión  $V_{BA}$  pedida.

*Impedancia de las ramas*

$$\mathbf{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}(\omega C R - j)$$

$$\mathbf{Z}_2 = -2 \frac{j}{\omega C}$$

*Corrientes de rama*

$$\mathbf{I}_1 = \frac{V}{\mathbf{Z}_1} = \frac{V \omega C}{\omega C R - j} = \frac{V \omega C}{1 + (\omega C R)^2}(\omega C R + j)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{V}{\mathbf{Z}_2} = \frac{V}{2} j \omega C$$

*Potenciales*

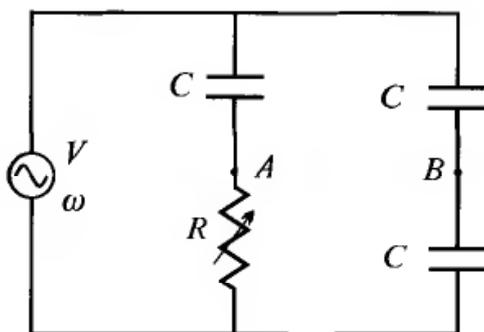


Figura P14.26.1

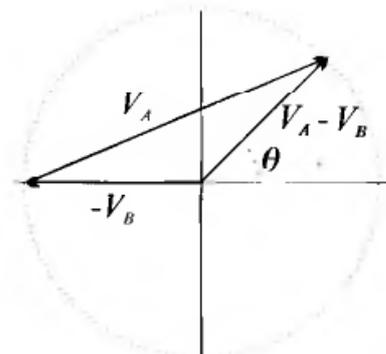


Figura P14.26.2

Tomando como referencia de potencial en el extremo inferior del circuito calculamos los potenciales.

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{I}_1 R = \frac{V \omega C R}{1 + (\omega C R)^2} (\omega C R + j)$$

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{I}_2 \left( \frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{V}{2} j\omega C \left( \frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{V}{2}$$

$$\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B = \frac{V \omega C R}{1 + (\omega C R)^2} (\omega C R + j) - \frac{V}{2}$$

Realizando operaciones,

$$\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B = \frac{V}{2(1 + (\omega C R)^2)} ((\omega C R)^2 - 1 + j 2\omega C R)$$

El módulo y fase de  $\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$  se obtiene a partir de la expresión anterior,

$$|\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B| = \frac{V}{2(1 + (\omega C R)^2)} (((\omega C R)^2 - 1)^2 + (2\omega C R)^2)^{1/2}$$

$$|\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B| = \frac{V}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{2\omega C R}{(\omega C R)^2 - 1} ; \theta = \arctan \left( \frac{2\omega C R}{(\omega C R)^2 - 1} \right)$$

La representación gráfica de  $\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$  se muestra en la figura P14.26.2

El ángulo varía desde  $\theta = 0$  para  $R$  tendiendo a infinito, hasta  $\theta = \pi$  cuando  $R$  tiende a 0, pasando por  $\theta = \pi/2$  cuando  $\omega C R = 1$ .

### PROBLEMA 14.27

Dado el circuito que muestra la figura P14.27, calcular la tensión  $V_{AB}$  en función de la tensión  $V_1$  que suministra el generador de corriente alterna (c. a.).

#### Solución

Resolvemos el circuito aplicando las ideas desarrolladas en el apartado 14.1.3.3 de la introducción.

En primer lugar vamos a calcular las reactancias que corresponden a los respectivos componentes para la frecuencia de operación.

$$jX_{C1} = -\frac{j}{10^8 \times 10^{-9}} = -j 10 ; jX_{C2} = -j ; jL = j10^8 \times 10^{-6} = j100$$

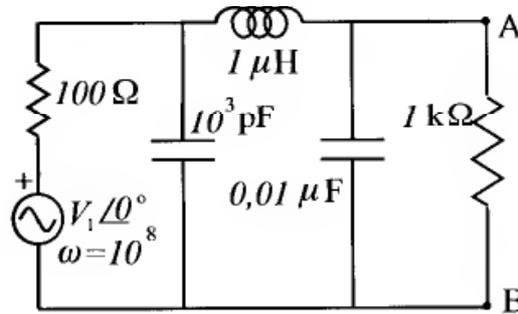


Figura P14.27

Las ecuaciones de red son:

$$\begin{aligned} V_1 &= (100 - j10)\mathbf{I}_1 + j10\mathbf{I}_2 + 0 \\ 0 &= j10\mathbf{I}_1 + j89\mathbf{I}_2 + j\mathbf{I}_3 \\ 0 &= 0 + j\mathbf{I}_2 + (1000 - j)\mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

La tensión  $V_{AB} = 1000\mathbf{I}_3$ , por tanto debemos calcular  $\mathbf{I}_3$  mediante el sistema de ecuaciones anterior. Aplicando el método de Cramer:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} (100 - j10) & j10 & V_1 \\ j10 & j89 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (100 - j10) & j10 & 0 \\ j10 & j89 & j \\ 0 & j & (1000 - j) \end{vmatrix}} = \frac{-10V_1}{10^3(999 + j8899)}$$

Realizando operaciones,

$$\mathbf{I}_3 \simeq V_1 10^{-6}(-0,12 + j1,11)$$

La tensión será:

$$V_{AB} = 1000\mathbf{I}_3 \simeq V_1 10^{-3}(-0,12 + j1,11)$$

### PROBLEMA 14.28

En la figura P14.28 se muestra el diagrama de un circuito de c.a. Calcular la corriente que circula por la resistencia de  $10 \Omega$ .

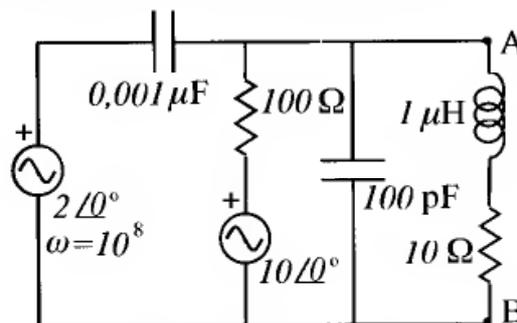


Figura P14.28

**Solución**

Procedemos de forma similar al caso anterior.

$$jX_{C1} = -\frac{j}{\omega C_1} = -\frac{j}{10^8 \times 10^{-9}} = -j10 \quad ; \quad jX_{C2} = -\frac{j}{10^{-10} \times 10^8} = -j100$$

$$jX_L = j10^8 \times 10^{-6} = j100$$

Las ecuaciones de red, suponiendo que todas las corrientes de malla tienen sentido horario, son:

$$\begin{aligned} 2 - 10 &= (100 - j10)\mathbf{I}_1 - 100\mathbf{I}_2 + 0 \\ 10 &= -100\mathbf{I}_1 + (100 - j100)\mathbf{I}_2 + j100\mathbf{I}_3 \\ 0 &= 0 + j100\mathbf{I}_2 + (j100 - j100 + 10)\mathbf{I}_3 \\ -8 &= (100 - j10)\mathbf{I}_1 - 100\mathbf{I}_2 \\ 10 &= -100\mathbf{I}_1 + (100 - j100)\mathbf{I}_2 + j100\mathbf{I}_3 \\ 0 &= j100\mathbf{I}_2 + 10\mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

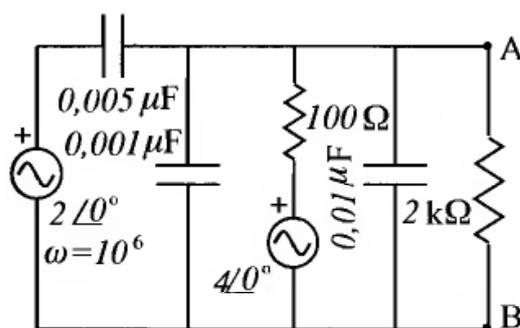
La corriente por la resistencia de  $10 \Omega$  es  $\mathbf{I}_3$ , por tanto calculamos dicha corriente mediante el sistema de ecuaciones anterior, utilizando el método de Cramer.

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} (100 - j10) & -100 & -8 \\ -100 & (100 - j100) & 10 \\ 0 & j100 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (100 - j10) & -100 & 0 \\ -100 & (100 - j100) & j100 \\ 0 & j100 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{-10^4(1 + j2)}{10^4(99 - j21)}$$

$$\mathbf{I}_3 = -\frac{(1 + j2)}{(99 - j21)} \simeq -10^{-2}(0,55 + j2,14)$$

**PROBLEMA 14.29**

Calcular la tensión  $V_{AB}$  en el circuito que muestra la figura P14.29.

**Solución**

**Figura P14.29**

La tensión pedida el la misma que existe en los terminales de la impedancia  $\mathbf{Z}$  formada por la composición de la resistencia de  $2 \text{ k}\Omega$  en paralelo con el condensador de  $0,01 \mu\text{F}$ , por tanto, para evitar la solución de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas agrupamos en primer lugar los componentes citados anteriormente.

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{2 \times 10^3} + j\omega C = \frac{1}{2 \times 10^2} + j10^6 \times 10^{-8} = 10^{-2}(0,5 + j)$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{10^{-2}(0,5 + j)} = 40 - j80$$

Las reactancias correspondiente a los dos condensadores de  $0,001$  y  $0,005 \mu\text{F}$  son:

$$jX_{C1} = -j\frac{1}{10^6 \times 10^{-9}} = -j10^3 ; \quad jX_{C2} = \frac{-j}{5 \times 10^{-9} \times 10^6} = -j200$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{Z}$  la red o circuito se reduce a tres mallas o lazos, y el sistema de ecuaciones correspondiente, suponiendo que las corrientes de malla tienen el sentido horario, es:

$$\begin{aligned} 2 &= && (-j1200)\mathbf{I}_1 + j1000\mathbf{I}_2 + 0 \\ -4 &= && j1000\mathbf{I}_1 + (100 - j1000)\mathbf{I}_2 - 100\mathbf{I}_3 \\ 4 &= && 0 - 100\mathbf{I}_2 + (140 - j80)\mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

Para obtener la tensión  $V_{AB}$  debemos calcular la corriente  $\mathbf{I}_3$  y multiplicarla por  $\mathbf{Z}$ .

Calculamos  $\mathbf{I}_3$  mediante el sistema de ecuaciones anterior, utilizando el método de Cramer.

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} (-j1200) & j1000 & 2 \\ j1000 & (100 - j1000) & -4 \\ 0 & -100 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-j1200) & j1000 & 0 \\ j1000 & (100 - j1000) & -100 \\ 0 & -100 & (140 - j80) \end{vmatrix}} = \frac{-10^5(8 + j2)}{10^5(-376 + j112)}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{-(8 + j2)}{(-376 + j112)} \simeq 10^{-2}(1,81 + j1,07)$$

La tensión será:

$$V_{AB} = \mathbf{Z}\mathbf{I}_3 \simeq 10^{-2}(1,81 + j1,07)(40 - j80) \simeq 1,58 - j1,02 \text{ [V]}$$

### PROBLEMA 14.30

Dado el circuito de c.a. que muestra la figura P14.30, calcular la corriente que circula por la resistencia de  $300 \Omega$ .

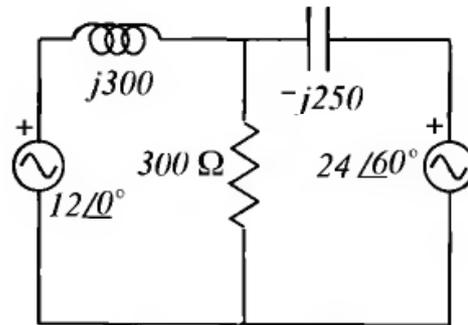


Figura P14.30

**Solución**

Se trata de un circuito con dos mallas, y la particularidad en este caso es que el generador de la segunda malla está desfasado  $60^\circ$  con respecto al generador de la primera malla que se toma como referencia de fases.

La tensión del segundo generador es:

$$V_2 = 24e^{j60^\circ} = 24(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 12 + j12\sqrt{3}$$

Las ecuaciones del sistema, considerando que las corrientes de malla tienen el sentido del movimiento de las agujas del reloj, sentido horario, son:

$$\begin{aligned} 12 &= 300(1 + j)\mathbf{I}_1 - 300\mathbf{I}_2 \\ -12(1 + j\sqrt{3}) &= -300\mathbf{I}_1 + (300 - j250)\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

La corriente que circula por la resistencia de  $300 \Omega$  es la diferencia entre las dos corrientes de malla, por tanto debemos resolver el sistema de ecuaciones para obtener las dos intensidades de malla. Utilizando el método de Cramer,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -300 \\ -12(1 + j\sqrt{3}) & (300 - j250) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 300(1 + j) & -300 \\ -300 & (300 - j250) \end{vmatrix}} = \frac{j10^2(30 + 36\sqrt{3})}{10^3(75 + j15)}$$

$$\mathbf{I}_1 \simeq -10^{-2}(2,37 + j11,84)$$

La corriente  $\mathbf{I}_2$  será:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 300(1 + j) & 12 \\ -300 & -12(1 + j\sqrt{3}) \end{vmatrix}}{10^3(75 + j15)} = \frac{10^2(36\sqrt{3} - j36(\sqrt{3} + 1))}{10^3(75 + j15)}$$

$$\mathbf{I}_2 \simeq 10^{-2}(5,47 - j14,21)$$

Dado el signo de la corriente  $\mathbf{I}_1$ , obtenemos la corriente en la resistencia de  $300 \Omega$  de la forma siguiente:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 10^{-2}((2,37 + j11,84) + (5,47 - j14,21))$$

$$\mathbf{I} = 10^{-2}(7,84 - j2,37)$$

Es decir, la corriente tiene el sentido de  $\mathbf{I}_2$ .

### PROBLEMA 14.31

En el circuito de tres mallas que muestra la figura P14.31 tenemos dos resistencias de  $1\text{ k}\Omega$ . Calcular la relación entre las tensiones que hay en los bornes de dichas resistencias.

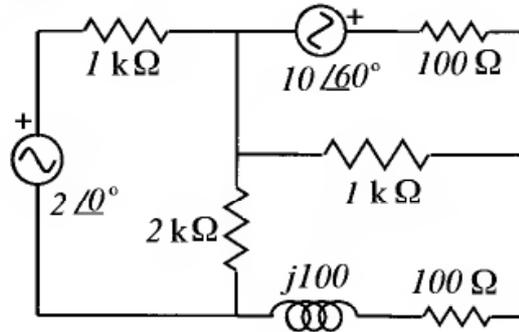


Figura P14.31

### Solución

La red de tres mallas tiene un generador, el de la segunda malla, desfasado  $60^\circ$  con respecto al generador de la primera tomado como referencia. La tensión que suministra dicho generador es:

$$\mathbf{V}_2 = 10(\cos 60^\circ + j \operatorname{sen} 60^\circ) = 5(1 + j\sqrt{3})$$

Para calcular la relación entre las tensiones en las resistencia de  $1\text{ k}\Omega$ , tenemos que obtener la corriente en las tres mallas.

El sistema de ecuaciones, considerando las corrientes en sentido horario, es:

$$\begin{aligned} 2 &= 3000\mathbf{I}_1 + 0 && -2000\mathbf{I}_3 \\ 5(1 + j\sqrt{3}) &= 0 + 1100\mathbf{I}_2 && -1000\mathbf{I}_3 \\ 0 &= -2000\mathbf{I}_1 - 1000\mathbf{I}_2 + (1100 + j100)\mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

Resolviendo por el método de Cramer obtenemos las tres corrientes de malla.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2000 \\ 5(1 + j\sqrt{3}) & 1100 & -1000 \\ 0 & -1000 & (1100 + j100) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3000 & 0 & -2000 \\ 0 & 1100 & -1000 \\ -2000 & -1000 & (1100 + j100) \end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{10^4 (1042 + j(22 + 1000\sqrt{3}))}{10^7(-377 + j33)} \simeq -10^{-3}(2,34 + j4,86)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3000 & 2 & -2000 \\ 0 & 5(1 + j\sqrt{3}) & -1000 \\ -2000 & 0 & (1100 + j100) \end{vmatrix}}{10^7(-377 + j33)}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{10^5 ((5 - 15\sqrt{3}) + j(15 - 35\sqrt{3}))}{10^7(-377 + j33)} \simeq 10^{-3}(0,45 + j1,25)$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3000 & 0 & 2 \\ 0 & 1100 & 5(1 + j\sqrt{3}) \\ -2000 & -1000 & 0 \end{vmatrix}}{10^7(-377 + j33)}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{10^5 (194 + j150\sqrt{3})}{10^7(-377 + j33)} \simeq -10^{-3}(4,51 + j7,29)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = 10^{-3}(4,96 + j8,54)$$

La tensión entre los terminales de la resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$  de la primera malla es:

$$\mathbf{V}_{R1} = 10^3 \mathbf{I}_1 = -(2,34 + j4,86)$$

La tensión en la resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$  de la rama común entre las mallas dos y tres es:

$$\mathbf{V}_c = 10^3 \mathbf{I} \simeq (4,96 + j8,54)$$

Su relación será:

$$\frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{V}_{R1}} \simeq -\frac{(4,96 + j8,54)}{(2,34 + j4,86)} \simeq -1,83 + j0,14$$

$$\left| \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{V}_{R1}} \right| = \sqrt{1,825^2 + 0,141^2} \simeq 1,84$$

$$\tan \theta \simeq -\frac{0,14}{1,83} \simeq -7,65 \times 10^2$$

Esto quiere decir que la tensión  $\mathbf{V}_c$  se retrasa ligeramente con respecto a  $\mathbf{V}_{R1}$ .

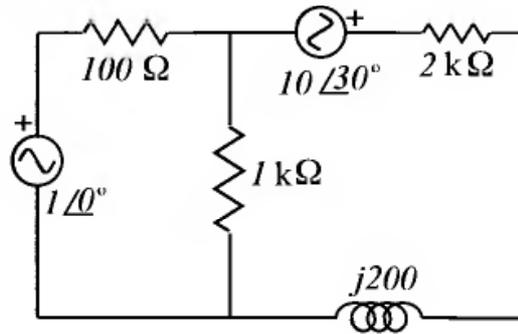
### PROBLEMA 14.32

Dado el circuito de la figura P14.32, calcular la tensión entre los bornes de la autoinducción.

**Solución**

En la segunda malla del circuito que vamos a estudiar existe un generador cuya tensión desfasa  $30^\circ$  con respecto al situado en la primera que tomamos como referencia de fases.

$$\mathbf{V}_2 = 10(\cos 30^\circ + j \operatorname{sen} 30^\circ) = 5(\sqrt{3} + j)$$

**Figura P14.32**

Para calcular la tensión en los bornes de la autoinducción de la segunda malla debemos conocer la corriente  $\mathbf{I}_2$ . Dicha corriente se determina estableciendo en primer lugar el sistema de ecuaciones de red y después resolviéndolo por el método de Cramer. Suponemos todas las corrientes de malla en sentido horario.

Las ecuaciones de la red son:

$$\begin{aligned} 1 &= 1100\mathbf{I}_1 - 1000\mathbf{I}_2 \\ 5(\sqrt{3} + j) &= -1000\mathbf{I}_1 + (3000 + j200)\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

La corriente  $\mathbf{I}_2$  será:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1100 & 1 \\ -1000 & 5(\sqrt{3} + j) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1100 & -1000 \\ -1000 & (3000 + j200) \end{vmatrix}} = \frac{(1000 + 5500\sqrt{3}) + j5500}{10^4(230 + j22)}$$

$$\mathbf{I}_2 \simeq 10^{-3}(4,76 + j1,94)$$

La tensión en los bornes de la autoinducción es:

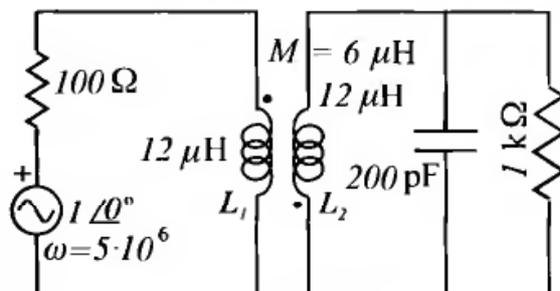
$$\mathbf{V}_L = j200 \mathbf{I}_2 = j200 \times 10^{-3}(4,76 + j1,94) \simeq -0,38 + j0,95$$

$$V_L = \sqrt{0,38^2 + 0,95^2} \simeq 1,02$$

$$\tan \theta \simeq -\frac{0,95}{0,38} \simeq -2,5$$

**PROBLEMA 14.33**

La figura P14.33 muestra un circuito con bobinas magnéticamente acopladas. Calcular la tensión en los bornes de la resistencia de  $1\text{ k}\Omega$ .

**Figura P14.33****Solución**

Se trata de un circuito con acoplo magnético al que se aplican las ideas enunciadas en el apartado 14.1.3.4 de la introducción.

En primer lugar, para que en el secundario aparezca un sólo lazo, calculamos la impedancia del conjunto formado por la resistencia de  $1\text{ k}\Omega$  en paralelo con el condensador de  $2 \times 10^2\text{ pF}$ . Esto no afecta al cálculo de la tensión en los bornes de la resistencia ya que es la misma para el conjunto.

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{1000} + j\omega C = 10^{-3} + j5 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-10} = 10^{-3}(1 + j)$$

$$\mathbf{Z} = 500(1 - j)$$

Por otra parte,

$$j\omega L_1 = j5 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-6} = j60 ; \quad j\omega L_2 = j60 ; \quad j\omega M = j30$$

Las ecuaciones de malla, teniendo en cuenta las posiciones del punto en los arrollamientos y eligiendo el sentido horario para las corrientes de malla, son:

$$1 = (100 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 = (100 + j60)\mathbf{I}_1 + j30\mathbf{I}_2$$

$$0 = j\omega M \mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z} + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 = j30 \mathbf{I}_1 + (500 + j(60 - 500))\mathbf{I}_2$$

$$1 = (100 + j60)\mathbf{I}_1 + j30\mathbf{I}_2$$

$$0 = j30 \mathbf{I}_1 + (500 - j440)\mathbf{I}_2$$

Por el método de Cramer calculamos la intensidad  $\mathbf{I}_2$ , que nos permite obtener la tensión en los bornes de la resistencia.

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (100 + j60) & 1 \\ j30 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (100 + j60) & j30 \\ j30 & (500 - j440) \end{vmatrix}} = \frac{-j30}{10^2(773 - j140)}$$

$$\mathbf{I}_2 \simeq 10^{-4}(0,68 - j3,75)$$

La tensión pedida es:

$$V = \mathbf{Z} \mathbf{I}_2 = 500(1 - j) \frac{-j30}{10^2(773 + j140)}$$

$$V \simeq -10^{-2} \times (22,19 + j15,37) \quad [\text{V}]$$

### PROBLEMA 13.34

Dado el circuito que muestra la figura P14.35, calcular la corriente que circula por la resistencia de  $2\Omega$ .

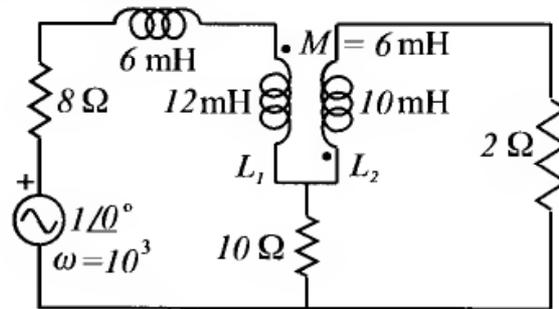


Figura P14.34

### Solución

Operamos de forma análoga al problema anterior. La ecuaciones de malla son:

$$1 = (10 + 8 + j\omega(L + L_1))\mathbf{I}_1 + (j\omega M - 10)\mathbf{I}_2$$

$$0 = (j\omega M - 10)\mathbf{I}_1 + (10 + 2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2$$

Para la frecuencia de funcionamiento las distintas reactancias son:

$$j\omega L = j10^3 \times 6 \times 10^{-3} = j6; \quad j\omega L_1 = j12; \quad j\omega L_2 = j10; \quad j\omega M = j6$$

$$1 = (18 + j18)\mathbf{I}_1 + (-10 + j6)\mathbf{I}_2$$

$$0 = (-10 + j6)\mathbf{I}_1 + (12 + j10)\mathbf{I}_2$$

La corriente que circula por la resistencia de  $2\Omega$  es  $\mathbf{I}_2$ , por tanto debemos obtener dicha corriente a partir del sistema de ecuaciones anterior.

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (18 + j18) & 1 \\ (-10 + j6) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (18 + j18) & (-10 + j6) \\ (-10 + j6) & (12 + j10) \end{vmatrix}} = \frac{(10 - j6)}{(-28 + j516)}$$

$$\mathbf{I}_2 \simeq -10^{-2}(1,26 + j1,87)$$

El signo menos muestra que la referencia del sentido de la corriente sería el opuesto, es decir, el contrario al movimiento de las agujas del reloj.

## Apéndice A

# RELACIONES MATEMÁTICAS I

## A.1 ÁREAS Y VOLUMENES

**Paralelepípedo rectángulo.**

Lados  $a, b, c$

$$\text{Area de la superficie} = 2(ab + ac + bc) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Volumen} = abc \quad (\text{A.2})$$

**Esfera de radio  $r$ .**

$$\text{Area} = 4\pi r^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (\text{A.4})$$

**Cilindro recto de radio  $r$  y altura  $h$ .**

$$\text{Area superficie lateral} = 2\pi r h \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h \quad (\text{A.6})$$

**Cono recto de radio  $r$  y altura  $h$ .**

$$\text{Area de la superficie lateral} = \pi r(r^2 + h^2)^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (\text{A.8})$$

**Casquete esférico de radio  $r$  y altura  $h$**

$$\text{Area de la superficie} = 2 r h \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi h^2 (3 r - h) \quad (\text{A.10})$$

**Tronco de cono recto de radios  $a$  y  $b$  y altura  $h$ .**

$$\text{Area de la superficie lateral} = \pi(a + b)(h^2 + (b - a)^2)^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi h (a^2 + a b + b^2) \quad (\text{A.12})$$

**Toroide de radio interior  $a$  y exterior  $b$ .**

$$\text{Area de la superficie} = \pi^2(b^2 - a^2) \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{4} \pi^2(a + b)(b - a)^2 \quad (\text{A.14})$$

**Elipsoide de semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$ .**

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \pi a b c \quad (\text{A.15})$$

## A.2 NÚMEROS COMPLEJOS

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= a + j b = M e^{j \alpha} = M (\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha) \\ M &= (a^2 + b^2)^{1/2}; \quad j = \sqrt{-1}; \quad j^2 = -1 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Conjugado de } \mathbf{z} \text{ es } \mathbf{z}^* = \bar{\mathbf{z}} = a - j b \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{z}_1 \pm \mathbf{z}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (a_1 + j b_1)(a_2 + j b_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = M_1 e^{j \alpha_1} M_2 e^{j \alpha_2} = M_1 M_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = M_1 M_2 \exp j(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^* = (a + j b)(a - j b) = a^2 + b^2 = M^2 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \exp j(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (\text{A.22})$$

### A.3 RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \text{ sen } \beta \quad (\text{A.23})$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \quad (\text{A.24})$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \text{sen } \alpha \cos \beta \quad (\text{A.25})$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (\text{A.26})$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \text{ sen } \beta \quad (\text{A.27})$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \quad (\text{A.28})$$

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.29})$$

$$\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.30})$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.31})$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.32})$$

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha \quad (\text{A.33})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen }^2 \alpha \quad (\text{A.34})$$

$$\text{sen }^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{A.35})$$

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \text{sen } \alpha \quad (\text{A.36})$$

**A.4 RELACIONES HIPERBÓLICAS**

$$e^{\pm x} = \operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x \quad (\text{A.37})$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad (\text{A.38})$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad (\text{A.39})$$

**A.5 RELACIONES LOGARÍTMICAS**

$$\log_{10} x = \log x ; \log_e x = \ln x \quad (\text{A.40})$$

$$\log x = 0,4343 \ln x ; \ln x = 2,3026 \log x \quad (\text{A.41})$$

$$\text{Decibelio} \quad \text{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 20 \log \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \text{relación entre potencias}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \text{relación entre tensiones}$$

$$\ln(re^{j\varphi}) = \ln r + j\varphi + j2k\pi \quad (k = \text{entero}) \quad (\text{A.43})$$

**A.6 DESARROLLOS EN SERIE**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{1}{2!}(x-a)^2 + \dots \quad (\text{A.44})$$

$$+ f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \dots \quad (\text{A.45})$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \dots \quad (\text{A.46})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots \quad (-1 < x \leq 1) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \dots \quad (-1 < x < 1) \quad (\text{A.48})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{A.49})$$

$$\text{sen } x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \dots \quad (\text{A.50})$$

$$\text{cos } x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \dots \quad (\text{A.51})$$

$$\text{tg } x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \dots \quad (\text{A.52})$$

$$\text{sh } x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad (\text{A.53})$$

$$\text{ch } x = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (\text{A.54})$$

## A.7 VECTORES EN FORMA COMPLEJA

Parte real  $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$  de un vector en forma compleja

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)e^{j\omega t}] \quad (\text{A.55})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_r(\mathbf{r}, t) + j\mathbf{A}_i(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.56})$$

$$\text{Re } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*) \quad (\text{A.57})$$

$$\text{Re}(\mathbf{A}e^{j\omega t}) \text{Re}(\mathbf{B}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}e^{j\omega t} + (\mathbf{A}e^{j\omega t})^*) \frac{1}{2}((\mathbf{B}e^{j\omega t} + (\mathbf{B}e^{j\omega t})^*)) \quad (\text{A.58})$$

$$\text{Re}(\mathbf{A}e^{j\omega t}) \text{Re}(\mathbf{B}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}e^{2j\omega t}) \quad (\text{A.59})$$

Valor medio de un producto de vectores en forma compleja

$$\langle \text{Re}(\mathbf{A}e^{j\omega t}) \text{Re}(\mathbf{B}e^{j\omega t}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*) \quad (\text{A.60})$$

## Apéndice B

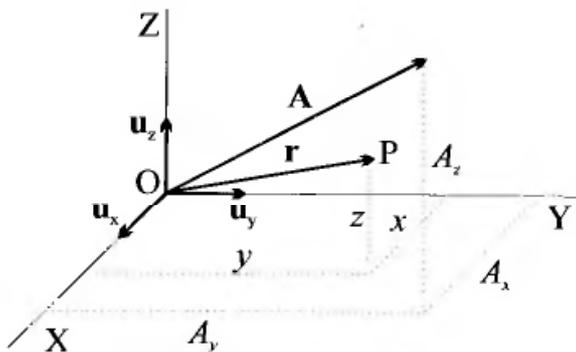
# RELACIONES MATEMÁTICAS II

## B.1 ELEMENTOS DE LONGITUD Y VOLUMEN

*Coordenadas cartesianas o rectangulares*

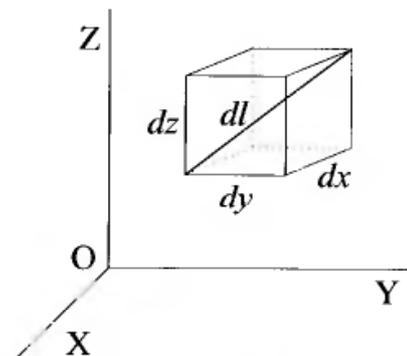
$$dl = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2} \quad (\text{B.1})$$

$$dv = dx \, dy \, dz \quad (\text{B.2})$$



**Figura B.1**

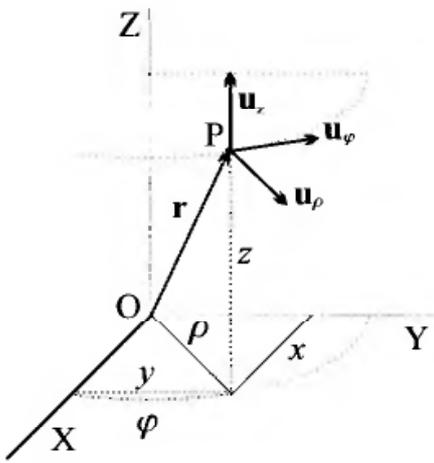
*Coordenadas cilíndricas*



**Figura B.2**

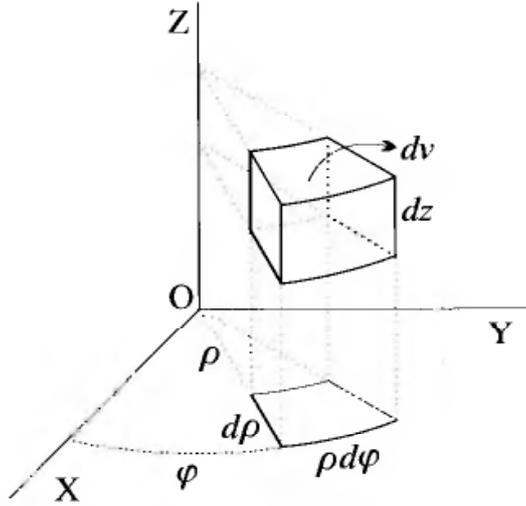
$$dl = (d\rho^2 + (\rho d\varphi)^2 + dz^2)^{1/2} \quad (\text{B.3})$$

$$dv = d\rho \, \rho d\varphi \, dz \quad (\text{B.4})$$



**Figura B.3**

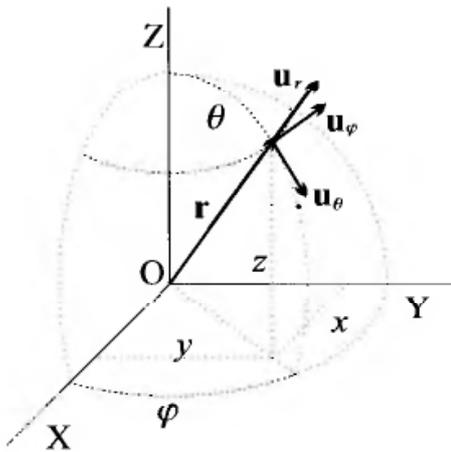
Coordenadas esféricas



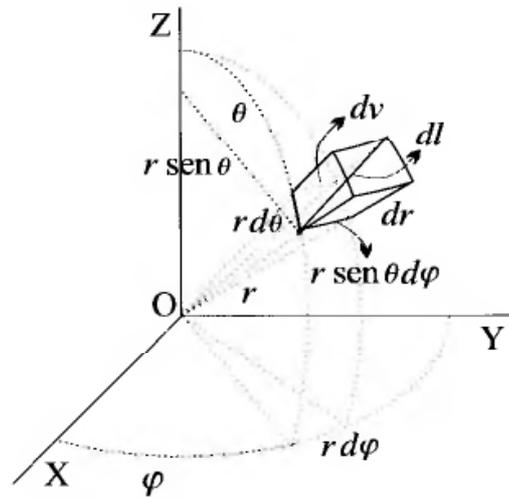
**Figura B.4**

$$dl = (dr^2 + (r d\theta)^2 + (r \text{sen } \theta d\varphi)^2)^{1/2} \tag{B.5}$$

$$dv = r^2 \text{sen } \theta dr d\theta d\varphi \tag{B.6}$$



**Figura B.5**

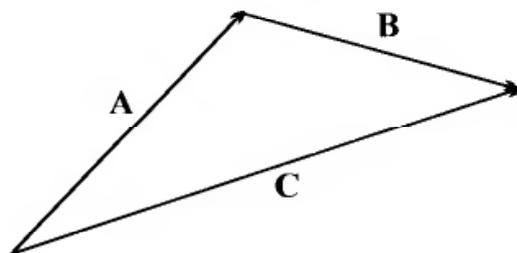


**Figura B.6**

## B.2 RELACIONES VECTORIALES

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \tag{B.7}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} ; m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B} \tag{B.8}$$



**Figura B.7**

*Componentes de un vector*

Vectores unitarios  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{u}_1 + A_2\mathbf{u}_2 + A_3\mathbf{u}_3 \tag{B.9}$$

*Producto escalar*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha \quad (\alpha = \text{ángulo que forman } \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B}) \tag{B.10}$$

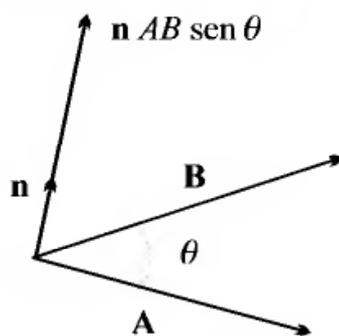
Si  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{u}_1 + A_2\mathbf{u}_2 + A_3\mathbf{u}_3$  y  $\mathbf{B} = B_1\mathbf{u}_1 + B_2\mathbf{u}_2 + B_3\mathbf{u}_3$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \tag{B.11}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} ; \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{B.12}$$

*Producto vectorial*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = nAB \operatorname{sen} \alpha \tag{B.13}$$



**Figura B.8**

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| =$  área del paralelogramos cuyos lados son  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y  $\alpha$  el ángulo que forman.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{B.14}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} ; \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) =$  al volumen del paralelepípedo de lados  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{B.17})$$

### B.3 TRANSFORMACIÓN DE COMPONENTES

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad ; \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

*Cartesianas a cilíndricas*

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\ A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \\ A_z &= A_z \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

*Cartesianas a esféricas*

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta \\ A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta \\ A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

*Cilíndricas a cartesianas*

$$\begin{aligned} A_x &= A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \\ A_y &= A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \\ A_z &= A_z \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Coordenadas del vector de posición  $\mathbf{r}(x, y, z)$

$$x = \rho \cos \varphi \quad ; \quad y = \rho \sin \varphi \quad ; \quad z = z \quad (\text{B.21})$$

*Esféricas a cartesianas*

$$\begin{aligned} A_x &= A_r \sin \theta \cos \varphi + A_\theta \cos \theta \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \\ A_y &= A_r \sin \theta \sin \varphi + A_\theta \cos \theta \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \\ A_z &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Coordenadas del vector de posición  $\mathbf{r}(x, y, z)$

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi ; \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi ; \quad z = r \cos \theta \quad (\text{B.23})$$

## B.4 DERIVACIÓN DE VECTORES

*Derivada de un vector y sus propiedades*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x) - \mathbf{A}(x)}{\Delta x} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{B})}{dx} = \frac{d\mathbf{A}}{dx} + \frac{d\mathbf{B}}{dx} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{d\Phi \mathbf{A}}{dx} = \mathbf{A} \frac{d\Phi}{dx} + \Phi \frac{d\mathbf{A}}{dx} \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dx} = \frac{d\mathbf{A}}{dx} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dx} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dx} = \frac{d\mathbf{A}}{dx} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dx} \quad (\text{B.28})$$

$$\text{Si } \mathbf{A}(x) = A(x) \mathbf{n}(x) \quad ; \quad \mathbf{n}(x) = \frac{\mathbf{A}}{A}$$

$$\frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} = \mathbf{n}(x) \frac{dA(x)}{dx} + A(x) \frac{d\mathbf{n}(x)}{dx} \quad (\text{B.29})$$

En coordenadas cartesianas  $\mathbf{A}(x) = A_x(x) \mathbf{u}_x + A_y(x) \mathbf{u}_y + A_z(x) \mathbf{u}_z$

$$\frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} = \mathbf{u}_x \frac{dA_x(x)}{dx} + \mathbf{u}_y \frac{dA_y(x)}{dx} + \mathbf{u}_z \frac{dA_z(x)}{dx} \quad (\text{B.30})$$

### B.4.1 Derivada de los vectores unitarios

*Coordenadas cilíndricas*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\rho &= \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \operatorname{sen} \varphi \\ \mathbf{u}_\varphi &= -\mathbf{u}_x \operatorname{sen} \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi \\ \mathbf{u}_z &= \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\rho}{\partial \rho} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\rho}{\partial \varphi} = \mathbf{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \rho} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{u}_\rho \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial \rho} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial \varphi} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} = 0$$

*Coordenadas esféricas*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \mathbf{u}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_y \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_z \sin \theta \\ \mathbf{u}_\theta &= \mathbf{u}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \theta \sin \varphi - \mathbf{u}_z \cos \theta \\ \mathbf{u}_\varphi &= -\mathbf{u}_x \sin \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} = \mathbf{u}_\theta ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{u}_\varphi \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial r} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{u}_r ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \varphi} = \mathbf{u}_\varphi \cos \theta \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial r} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \theta} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi} = -(\mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi)$$

#### B.4.2 Fórmulas de análisis vectorial

$$\nabla(f + \phi) = \nabla f + \nabla \phi \quad (\text{B.35})$$

$$\nabla(f \phi) = \phi \nabla f + f \nabla \phi \quad (\text{B.36})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{B.37})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (\text{B.38})$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{B.39})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{B.40})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{B.41})$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{B.42})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (\text{B.43})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{B.44})$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad (\text{B.45})$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{B.46})$$

$$\int_V \nabla \phi \, dv = \oint_S \phi \, ds \quad (\text{B.47})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Teorema de la divergencia}) \quad (\text{B.48})$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, ds \quad (\text{B.49})$$

$$\int_V \mathbf{n} \times \nabla \phi \, dv = \oint_C \phi \, dl \quad (\text{B.50})$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Teorema de Stokes}) \quad (\text{B.51})$$

*Coordenadas cartesianas o rectangulares*

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (\text{B.52})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{B.53})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y \\ & + \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{B.55})$$

*Coordenadas cilíndricas*

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{\partial \phi}{\rho \partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (\text{B.56})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} A_z \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \mathbf{u}_\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{u}_\varphi \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \\ & + \mathbf{u}_z \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{B.59})$$

*Coordenadas esféricas*

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial \phi}{r \sin \theta \partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi \quad (\text{B.60})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \right) \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{\mathbf{u}_r}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) + \\ & \frac{\mathbf{u}_\theta}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\mathbf{u}_\varphi}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

### B.4.3 Función delta de Dirac

Se define de la forma siguiente:

$$\delta(\mathbf{r}') = 0 \text{ para } \mathbf{r}' \neq 0 \quad \text{y} \quad \int \delta(\mathbf{r}') dv' = 1 \quad (\text{B.64})$$

La integral se extiende a todo el espacio.

*Propiedades de la función delta*

Dada una función  $f(\mathbf{r}')$ ,

$$\int f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}') dv' = f(0) \quad (\text{B.65})$$

$$\int f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_o) dv' = f(\mathbf{r}'_o) \quad (\text{B.66})$$

*Aplicaciones*1) *Carga puntual*Expresión de una carga puntual situada en el punto  $\mathbf{r}'_o$ 

$$\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_o) \quad (\text{B.67})$$

2) *Divergencia del campo eléctrico*

$$\nabla \cdot \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \frac{q}{\epsilon_o} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{B.68})$$

3) *Laplaciana*

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{B.69})$$

## Apéndice C

### TABLAS

#### C.1 CONSTANTES

CONSTANTES FÍSICAS		
Nombre	Símbolo	
Velocidad de la luz	$c$	$2,998 \times 10^8$ m
Carga del electrón	$e$	$1,602 \times 10^{-19}$ C
Masa del electrón	$m_e$	$9,109 \times 10^{-31}$ kg
Razón carga/masa ( $e/m_e$ )	$e/m_e$	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg
Masa del neutrón	$m_n$	$1,675 \times 10^{-27}$ kg
Masa del protón	$m_p$	$1,672 \times 10^{-27}$ kg
Constante de Plank	$h$	$6,626 \times 10^{-34}$ J.s
Permitividad del vacío	$\epsilon_o$	$8,854 \times 10^{-12}$ F/m
Permeabilidad del vacío	$\mu_o$	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Constante de Boltzmann	$k$	$1,380 \times 10^{-23}$ J/ °K
Constante de los gases	$R$	$8,314$ J/mol °K
Número de Avogadro	$N_o$	$6,023 \times 10^{23}$ mole./mol
Equivalente mecánico calor	$J$	$4,186$ J/caloría
Constante de gravitación	$G$	$6,67 \times 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> /Kg <sup>2</sup>
Energía en reposo del $e$	$m_e c^2$	$0,5110$ MeV
Energía en reposo del $p$	$M_p c^2$	$938,3$ MeV
Energía equivalente a 1 uma	uma	$1,66 \times 10^{-27}$ kg = $931,5$ MeV
Momento magnético del $e$	$\mu_e$	$9,273 \times 10^{-24}$ J T <sup>-1</sup>
Radio de Bohr	$a$	$0,5292 \times 10^{-10}$ m
Radio básico del $e$	$r_e$	$2,818 \times 10^{-15}$ m

UNIDADES		
Magnitud física	Unidad S I	Unidad S. Gauss CGS
Longitud ( $l$ )	metro (m)	cm = $10^{-2}$ m
Masa ( $m$ )	kilogramo (kg)	gramo (g)
Tiempo ( $t$ )	segundo (s)	segundo
Frecuencia ( $f$ )	herz (Hz) = c/s	ciclos/s (c/s)
Periodo ( $T$ )	$1/f = s$	
Fuerza ( $\mathbf{F}$ )	newton(N)=kg·m/s <sup>2</sup>	dina = $10^{-5}$ N
Energía ( $W$ )	julio (J) = N· m	ergio = $10^{-7}$ J
Potencia ( $P$ )	vatio (W) = J/s	erg/seg = $10^{-7}$ W
Carga eléctrica ( $Q, q$ )	culombio (C)	statculombio = $\frac{1}{3}10^{-9}$ C
Momento dipolar ( $\mathbf{p}$ )	C·m (q·l)	
Polarización ( $\mathbf{P}$ )	p/vol = C/m <sup>2</sup>	
Potencial eléctrico ( $V$ )	voltio (V) = J/C	statvolt = 299,8 V
F.e.m. ( $\mathcal{E}$ ) o ( $\mathcal{V}$ )	voltio (V) = J/C	
Int. campo eléctrico ( $\mathbf{E}$ )	V/m N/C	
Desplazamiento eléc.( $\mathbf{D}$ )	Q/m <sup>2</sup> = C/m <sup>2</sup>	
Capacidad ( $C$ )	faradio (F) = C/V	$9 \times 10^{11}$ cm
Permitividad ( $\epsilon$ )	capac./m = F/m	
Corriente eléctrica ( $I, i$ )	amperio (A) = C/s	abamperio = 10 A
Densidad de corriente ( $\mathbf{J}$ )	A/m <sup>2</sup>	
Resistencia elcc. ( $R$ )	V/I = V/A = $\Omega$	
Conductividad ( $\gamma, \sigma$ )	mho/m = 1/( $\Omega$ m)	
Inducción magnética ( $\mathbf{B}$ )	Tesla(T) = Wb/m <sup>2</sup>	gauss(G) = $10^{-4}$ T
Int. de camp. magn. ( $\mathbf{H}$ )	A/m	$4\pi \times 10^{-3}$ Oersted(Oe)
Flujo magnético ( $\Phi$ )	Weber (WB)	$10^8$ Maxwells(Mx)
Momento dipo. mag. ( $\mathbf{m}$ )	A m <sup>2</sup>	
Imanación ( $\mathbf{M}$ )	m/m <sup>3</sup> = A/m	
Inductancia ( $L$ )	henrio = (H)	
F.m.m. ( $\mathcal{F}$ )	Amperio-vuelta	1,257 Gilbert(Gb)
Permeabilidad ( $\mu$ )	Induc./m = H/m	
Reluctancia ( $\mathcal{R}$ )	f.m.m./Wb = H <sup>-1</sup>	
Potencial vector ( $\mathbf{A}$ )	$\Phi/m = \text{Wb/m}$	
Vector de Poynting ( $\mathbf{S}$ )	P/área = W/m <sup>2</sup>	
Longitud de onda ( $\lambda$ )	m	
Impedancia ( $Z$ )	V/I = $\Omega$	
Admitancia ( $Y$ )	$1/Z = \Omega^{-1}$ =Siemen(S)	

**Equivalencias.**

Electrón voltio (eV)	1 eV	=	$1,602 \times 10^{-19}$ J
Angström	1 Å	=	$10^{-10}$ m
Pulgada	1 pulg.	=	2,5401 cm
Caloría	1 cal.	=	4,184 J
Grados	$\theta^{\circ}\text{C}$	=	$(273,15 + \theta)^{\circ}\text{K}$
Kilovatio hora	1 kWh	=	$3,6 \times 10^6$ J

**C.2 RESISTIVIDAD, PERMITIVIDAD Y PERMEABILIDAD**

Material	Resistividad ( $\rho$ )( $\eta$ )( $\Omega\text{m}$ )	Permitividad relativa ( $\epsilon_r$ )	Permeabilidad relativa ( $\mu_r$ )
Aire		1,0006	
Acetato de celulosa		7	
Agua(destilada)	$10^4$	81	
Arena seca		3,4	
Aluminio	$2,83 \times 10^{-8}$		1,00002 (Para)
Ambar	$5 \times 10^{14}$	3	
Azufre	$10^{15}$	4	
Baquelita	$10^{14}$	5	
Bismuto			0,999983(Dia)
Cobalto			250 (Ferro.)
Cobre	$1,69 \times 10^{-8}$		0,999991 (Dia.)
Constantan (Cu 60, Ni 40)	$44,0 \times 10^{-8}$		
Cuarzo(fund.)	$7,5 \times 10^{17}$	5	
Ebonita	$10^{13}$ a $10^{16}$		
Germanio (puro)	0,45		
Glicerina		50	
Hierro (0°C)	$8,85 \times 10^{-8}$		5000 (Ferro.)
Madera	$10^8$ a $10^{11}$	2,1	
Mercurio	$95,8 \times 10^{-8}$		
Mica	$10^{11}$ a $10^{15}$	6	
Mumetal			100.000 (Ferro.)

Material	Resistividad ( $\rho$ )( $\eta$ )( $\Omega$ m)	Permitividad relativa ( $\epsilon_r$ )	Permeabilidad relativa ( $\mu_r$ )
Nicromo	$100 \times 10^{-8}$		600 (Ferro.)
Níquel	$7,24 \times 10^{-8}$		
Nitrato de celulosa		5	
Oro	$2,44 \times 10^{-8}$		
Parafina	$10^{15}$	2,1	
Petroleo	$10^{14}$	2,2	
Plata (0°C)	$1,47 \times 10^{-8}$		0,99998 (Dia.)
Polietileno	$10^{15}$	2,2	
Polivinilo	$10^{15}$	3,2	
Resina epoxi	$10^5$	3,7	
Silicio(puro)	640,0		
Soluc.Sat. NaCl	0.044		
Supermalloy			800.000 (Ferro.)
Teflon	$10^{15}$	2,1	
Tungsteno(Wolframio)	$5,51 \times 10^{-8}$		
Vidrio	$10^{10}$ a $10^{14}$	6	

### C.3 POTENCIAS DE DIEZ

Potencia	Prefijo	Abreviatura
$10^{12}$	Tera	T
$10^9$	Giga	G
$10^6$	Mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p

## Bibliografía

- [1] - Cheng, K.D. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. Addison-Wesley Iberoamericana. Buenos Aires (1997).
- [2] - Cheng, K.D. *Field and Wave Electromagnetic*. 2<sup>a</sup> Ed. Addison-Wesley. Reading, Massachusetts (1989).
- [3] - Durney, C.H. and Johnson, C. C. MacGraw Hill. New York (1969).
- [4] - Feynman, R. P., Leighton, R. B. y Sands, M. *Física* Vol. II. Fondo Educativo Interamericano. Bogota (1972).
- [5] - Griffiths, D.J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall. New Jersey (1989).
- [6] - Hertz, H. R. *Las ondas electromagnéticas*. Ed. Univ. Aut. Barcelona. Barcelona (1990).
- [7] - Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3<sup>a</sup> Ed. John Wiley & Sons. Inc. New York (1999).
- [8] - Kraus, J. D. *Electromagnetismo*. 3<sup>a</sup> Ed. McGraw-Hill (1986).
- [9] - López Rodríguez, V. *Electromagnetismo*. UNED. Madrid (2002).
- [10] - Lorrain, P. y Corson, D.R. *Electromagnetism*. W. H. Freeman & Co. New York (1979).
- [11] - Lorrain, P. y Corson, D.R. *Campos y ondas electromagnéticos*. Selecciones Científicas. 2<sup>a</sup> Ed. Madrid (1977).
- [12] - Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. V. 8, *Electrodynamics of Continuous Media*. 2<sup>a</sup> Ed. Pergamon Press. Oxford (1984).

- [13] - Maxwell, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover Pub. Inc. New York (1954).
- [14] - Murray R. Spiegel y L. Abellanas. *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*. Mc Graw Hill (1991).
- [15] - Nayfeh, m. H. and Brussel, M. K. *Electricity and Magnetism*. John Wiley & Son. New York (1985).
- [16] - Panofsky, W. H. H. and Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism*. 2ª Ed. Addison Wesley Pub. Co. London (1977).
- [17] - Plonsey, R. and Collin, E. *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*. MacGraw Hil Book Co. New York (1961).
- [18] - Popovic, B.D. *Intoductory Engineering Electromagnetics*. Addison - Wesley Pub. Co. London (1971).
- [19] - Portis, A. M. *Campos electromagnéticos*. Ed. Reverté S. A. Barcelona (1985).
- [20] - Purcell, E. M. *Electricidad y Magnetismo*. 2ª Ed. Reverté S. A. Barcelona (1992).
- [21] - Rosser, W.G.V. *Classical Electromagnetism*. Butterworths. London (1968).
- [22] - Reitz, J. R., Milford, F. J. y Christy, R. W. *Fundamentos de Teoría Electromagnética*. 4ª Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. EE UU (1996).
- [23] - Sanchez Quesada, F, Sanchez Soto, L, Sancho Ruiz, M. y Santamaría Sanchez-Barriga, J. *Fundamentos de electromagnetismo*. Ed. Síntesis. Madrid (2000).
- [24] - Ticker, R. A. R. *The Contributions of Faraday and Maxwell to Electrical Science*. Pergamon Press, London (1966).
- [25] - Wangsness, R. K. *Campos Electromagnéticos*. Linusa . Mexico (1987)
- [26] - Whittaker, E. *A History of the Teories of Aether and Electricity*. Thomas Nelson and Son Ltd. London (1962).