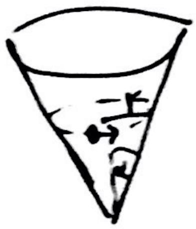
Geometría cilíndrica



$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$

$\cdot\ tg\alpha = r/z$

$\Rightarrow \dot{z} = \cot g\alpha\, \dot{r}$

$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$

$= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \cot g\alpha\, \dot{r}\hat{z}$

$\bullet\ K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \cot g^2\alpha\, \dot{r}^2\right)$

$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2(1+\cot g^2\alpha) + r^2\dot{\theta}^2\right)$

$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2\right)$ → Energía cinética

$\bullet\ U = mgz$

$= mgr\cot g\alpha$ → Energía potencial

$\boxed{E = K+U}$ cantidad conservada ①

$\Rightarrow \mathcal{L} = K - U = \frac{m}{2}\dot{r}^2\operatorname{cosec}^2\alpha + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - mgr\cot g\alpha$ → Lagrangeano

E-L:

$\bullet\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 r - mg\cot g\alpha$

$\bullet\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\operatorname{cosec}^2\alpha\, \dot{r}$

$\bullet\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\operatorname{cosec}^2\alpha\, \ddot{r}$

Euler-Lagrange:

$\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}$

$\Rightarrow \cancel{m}\dot{\theta}^2 r - \cancel{m}g\cot g\alpha = \cancel{m}\operatorname{cosec}^2\alpha\, \ddot{r}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\ddot{r}}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{g\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \dot{\theta}^2 r = 0}$

Ec. Movimiento ①

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

- $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}r\dot{r}$

Euler-Lagrange:

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})}$$ Ec movimiento ②

$\Rightarrow mr^2\dot{\theta}$ cte

↳ Momentum angular.

$$\Rightarrow \boxed{\ell = mr^2\dot{\theta}}$$ Cantidad conservada ②

↳ $\dot{\theta} = \dfrac{\ell}{mr^2}$

Así,

$$\boxed{\frac{\ddot{r}}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{g\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\ell^2}{m^2r^3} = 0}$$ Ec de movimiento

Si la partícula se mueve en un círculo de radio r_0 cte tenemos que la frecuencia de rotación de la masita es....

$$\frac{\cancel{\ddot{r}_0}^{\,0}}{\operatorname{sen}^2\alpha} + g\cot g\alpha = \dot{\theta}^2 r_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g\cot g\alpha}{r_0}} = \omega}$$ Frecuencia

Si ahora se perturba la masita en el eje radial se tendrá que oscila en torno a $r=r_0$. veamos que así es:

d será la distancia que se mueve en el eje radial

$$r = r_0 + d$$

$\longrightarrow$ oscila en torno a r_0

Reemplazando en la ec de movimiento:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_0+d) + \frac{g\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\ell^2}{m^2(r_0+d)^3} = 0$$

donde

• $\ell = \underbrace{m r_0^2 \omega}_{\text{basta con saber esto.}} = m r_0^2 \sqrt{\frac{g\operatorname{cotg}\alpha}{r_0}}$

Aproximaciones de r en torno a r_0. Lo mismo que de $d \ll 1$ $\rightarrow$ • $\frac{1}{(r_0+d)^3} \overset{\text{taylor}}{\approx} \frac{1}{r_0^3} - 3 r_0^{-4} d + \dots$ $\rightarrow$ Aproximación lineal.

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(r_0+d) + \frac{g\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cancel{m^2} r_0^4 \left(\frac{g\operatorname{cotg}\alpha}{r_0}\right)}{\cancel{m^2}}\cdot\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{3d}{r_0^4}\right) = 0$$

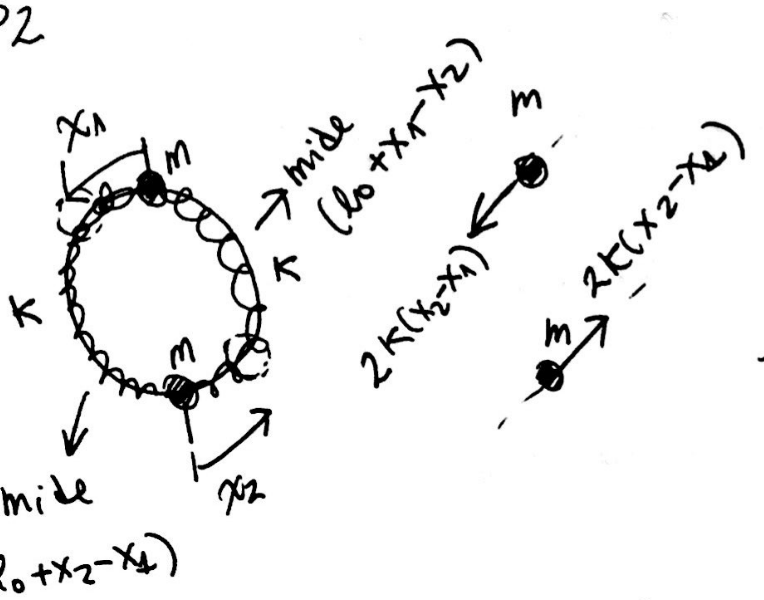
$$\Rightarrow \ddot{d} + \frac{g\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \cancel{r_0^3}(g\operatorname{cotg}\alpha)\cdot\frac{1}{\cancel{r_0^3}}\left(1-\frac{3d}{r_0}\right)=0$$

$$\Rightarrow \ddot{d} + \cancel{g\operatorname{cotg}\alpha} - \cancel{g\operatorname{cotg}\alpha} + \frac{3gd\operatorname{cotg}\alpha}{r_0} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{d} + \underbrace{\frac{3g\operatorname{cotg}\alpha}{r_0}}_{\Omega^2} d = 0$$

$\rightarrow$ Frecuencia radial.

2



$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}_1 = +2k(x_2-x_1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}_2 = -2k(x_2-x_1)}$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Proponiendo una solucion oscilatoria donde x_1 y x_2 se mueven con la misma frecuencia ω se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{i\omega t}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 e^{i\omega t}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

Asi ...

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot -\omega^2 \cancel{e^{i\omega t}}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\cancel{e^{i\omega t}}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -m\omega^2+2k & -2k \\ -2k & -m\omega^2+2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que exista solución:

$$\det\begin{pmatrix} -m\omega^2+2k & -2k \\ -2k & -m\omega^2+2k \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+2k)^2 - (2k)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -m\omega^2+2k = \pm 2k$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 = \pm 2k - 2k$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\mp 2k + 2k}{m}$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{4k/m}$$

- Con ω_1 no hay oscilaciones, es decir, las masas solo se trasladan.
- Con ω_2 se oscila a frec $\sqrt{4k/m}$. Ambas oscilan con la misma frecuencia.

Scanned by CamScanner