



Tareas 1 y 2

Respuestas

FI2001-3 Mecánica
Profesor: Francisco Brieva Rodríguez
Auxiliares: Isidora Araya Day
Joaquín Medina Dueñas



Tarea 1 - Pregunta 1

(a) Encontrar $\vec{r}(\alpha)$ y $\vec{v}(\alpha; \dot{\alpha})$, los vectores posición y velocidad del punto P:

$$\vec{r} = R\hat{\rho} - L(t)\hat{\phi} = R\hat{\rho} - R\alpha\hat{\phi} \quad (1)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\alpha}\hat{\phi} - R\dot{\alpha}\hat{\phi} + R\alpha\dot{\hat{\rho}} = R\alpha\dot{\hat{\rho}} \quad (2)$$

(b) Se define ρ como la distancia del origen al punto P, y ϕ como el ángulo que forma $\vec{r}$ con la recta OQ. Determinar la dependencia de ρ y ϕ en términos de α :

Para obtener ρ y ϕ , podemos ver las relaciones existentes en un triángulo rectángulo. Para ρ obtenemos la hipotenusa entre los catetos R y $R\alpha$.

$$\rho = \sqrt{R^2 + \alpha^2 R^2} = R\sqrt{1 + \alpha^2} \quad (3)$$

Y para encontrar ϕ , se utiliza la relación entre el ángulo $\alpha - \phi$, el que se encuentra dentro del triángulo rectángulo, y los catetos.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \phi) &= \frac{R\alpha}{R} \\ \phi &= \alpha - \arctan(\alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

(c) ¿Qué relación satisfacen $\frac{d\phi}{dt}$ y $\frac{d\alpha}{dt}$?

De la parte anterior, conocemos ϕ en función de α . Para obtener la relación entre $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ y $\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$ debemos derivar esa expresión.

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha - \arctan(\alpha) \bigg/ \frac{d}{dt}() \\ \dot{\phi} &= \dot{\alpha} - \frac{1}{1 + \alpha^2} \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} &= \dot{\alpha} \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2} \right) \\ \dot{\phi} &= \dot{\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Tarea 1 - Pregunta 2

Una barra rígida de largo l se mueve entre dos paredes rígidas que forman un ángulo recto entre ellas (Ver Figura 2). Sea θ el ángulo que forma la barra con la vertical.

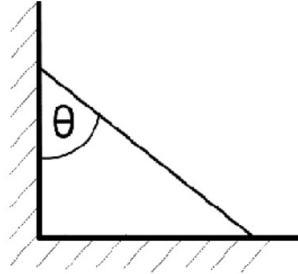


Figura 1

(a) Determine el vector posición, velocidad y aceleración del punto medio de la barra en función de θ .

Se tiene que el vector posición, usando como origen el centro de la barra, es:

$$\vec{r}(\theta) = \frac{l}{2} \sin(\theta) \hat{i} + \frac{l}{2} \cos(\theta) \hat{j}$$

Luego se deriva la expresión anterior para obtener la velocidad:

$$\vec{v}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{l}{2} \cos(\theta) \dot{\theta} \hat{i} - \frac{l}{2} \sin(\theta) \dot{\theta} \hat{j}$$

Derivando otra vez se llega al valor de la aceleración:

$$\vec{a}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \left(-\frac{l}{2} \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + \frac{l}{2} \cos(\theta) \ddot{\theta}\right) \hat{i} - \left(\frac{l}{2} \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \frac{l}{2} \sin(\theta) \ddot{\theta}\right) \hat{j}$$

(b) Calcule el radio de curvatura de la trayectoria seguida por el centro de la barra, en función de θ . Interprete el resultado y dibuje la trayectoria.

Tenemos que el producto cruz entre $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tiene un valor de:

$$\vec{v} \times \vec{a} = -\frac{l^2}{4} \dot{\theta}^3 \hat{k}$$

Aplicando la norma nos queda la expresión positiva igual a $\frac{l^2}{4} \dot{\theta}^3$ Por otra parte tenemos que,

$$\vec{v}^3 = \frac{l^3}{8} \dot{\theta}^3$$

Finalmente el radio de curvatura seguido tiene un valor de:

$$\frac{\vec{v}^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = \frac{\frac{l^3}{8} \dot{\theta}^3}{\frac{l^2}{4} \dot{\theta}^3} = \frac{l}{2}$$

La trayectoria se puede observar en la Figura 3, donde claramente se ve un cuarto de una circunferencia con radio de curvatura igual a $\frac{l}{2}$. (En la figura 3 se utilizó el caso particular con un radio de curvatura igual a 1). Esta además representa una clara relación con el ángulo θ .

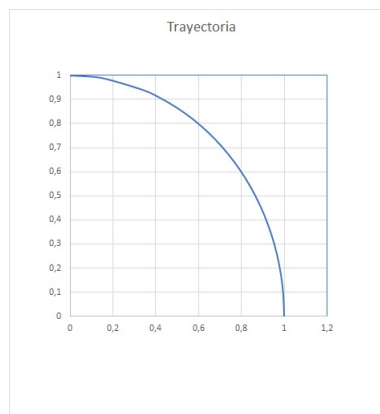


Figura 2: Trayectoria seguida por el centro de la barra.

(c) Suponga ahora que el apoyo inferior de la barra se mueve con rapidez constante. Determine la función $\theta = \theta(t)$ resultante del movimiento.

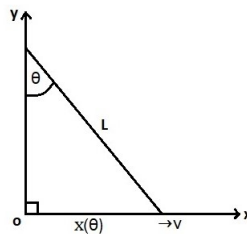


Figura 3

Utilizando la relación trigonométrica se tiene:

$$\vec{x}(\theta) = l \sin(\theta)$$

Además se sabe que:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}(\theta)}{t}$$



Luego reemplazando esto último en la posición $\vec{x}(\theta)$ se llega a:

$$\vec{x}(\theta) = \vec{v}t$$

$$l \sin(\theta) = \vec{v}t$$

$$\sin(\theta) = \frac{\vec{v}t}{l}$$

Aplicando la función inversa del seno a ambos lados finalmente se llega a la función $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \arcsin\left(\frac{\vec{v}t}{l}\right)$$



Pregunta 3

Considere una pelota rebotando contra el suelo. Si llega al suelo con una rapidez v , despegas del suelo con una rapidez $v' = \alpha v$, con $0 < \alpha < 1$. Suponga en el tiempo $t = 0$ la pelota despegas del suelo con una velocidad v_0 . Luego, en el instante $t = t_1$ ocurre el primer bote, tras el cual la pelota despegas del suelo con velocidad v_1 , y así para el n -ésimo bote.

(a) Calcule el instante t_n en el que ocurre el n -ésimo bote de la pelota. Exprese el resultado en función de v_0, α, n , y la aceleración de gravedad g .

(b) Analice la convergencia de la serie t_n . Determine el instante T en el cual la partícula deja de rebotar. ¿Cuántos botes da?

(c) Despeje n de la expresión $T - t_n$. Grafique n logarítmicamente en función del tiempo. Analice el gráfico obtenido.

(a)

Para calcular el instante t en el que ocurre el n -ésimo bote de la pelota, basta despejar cada t de la ecuación $0 = v(n) - g \cdot b$, siendo $v(n)$ la velocidad con la que la pelota se despegas del suelo en el bote en cuestión, y t_b el tiempo que le toma a la pelota alcanzar la altura máxima, que se calcula como $t_b(n) = \frac{v(n)}{g}$.

Dado que luego de cada bote, la velocidad se multiplica por un factor $0 < \alpha < 1$, la velocidad para el n -ésimo bote se calcula como $v(n) = v_0 \cdot \alpha^{n-1}$.

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = 2 \frac{v_0}{g}$$

$$t_2 = 2 \frac{v_0 \cdot \alpha}{g} + t_1$$

$$t_3 = 2 \frac{v_0 \cdot \alpha^2}{g} + t_2$$

$$\vdots$$

$$t_n = 2v_0 \cdot \alpha^{n-1} + t_{n-1}$$

$$t_n = \frac{2v_0}{g} + \frac{2v_0\alpha}{g} + \frac{2v_0\alpha^2}{g} \dots \frac{2v_0\alpha^{n-1}}{g}$$

La igualdad anterior puede escribirse como una sumatoria:

$$t_n = \frac{2v_0}{g} \cdot \sum_{k=1}^n \alpha^{k-1}$$



Dado que estamos sumando los elementos de una progresión geométrica, el valor de t_n es:

$$t_n = \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{(1 - \alpha^n)}{(1 - \alpha)}$$

(b)

Dado que $0 < \alpha < 1$, cuando $n \rightarrow \infty$, $\alpha^n \rightarrow 0$, por lo que la serie converge y lo hace a $\frac{2v_0}{(g(1-\alpha))}$. Además, como no hay ninguna restricción en cuanto a la altura mínima que puede alcanzar la pelota al rebotar, y la velocidad nunca se reducirá a 0, para calcular el instante T en que la pelota deja de rebotar, es necesario tender n a infinito, ya que teóricamente, esa es la cantidad de botes que daría.

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{v_0}{g} \cdot \frac{(1 - \alpha^n)}{(1 - \alpha)} = 2 \frac{v_0}{g(1 - \alpha)}$$

(c)

$$T - t_n = 2 \frac{v_0}{g(1 - \alpha)} - 2 \frac{v_0}{g} \cdot \frac{(1 - \alpha^n)}{(1 - \alpha)}$$

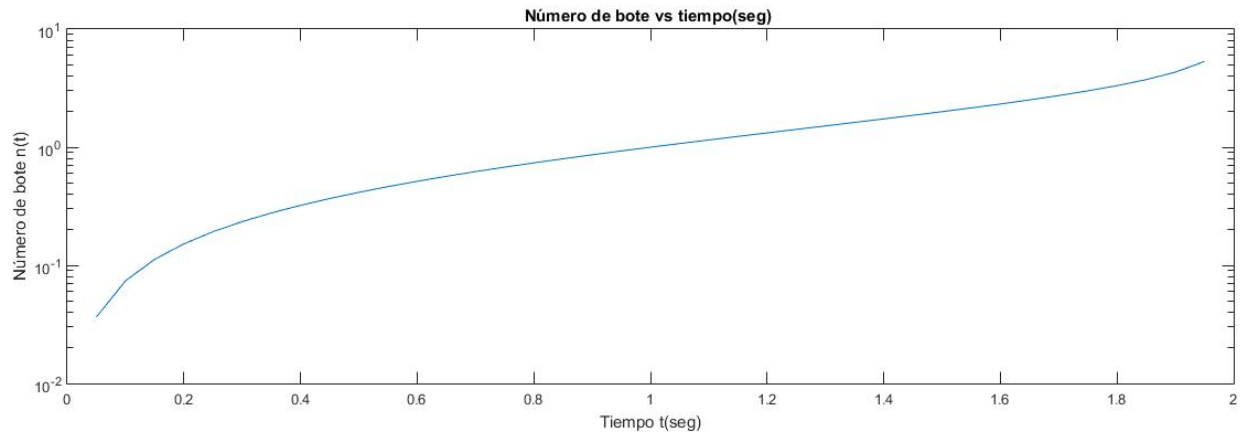
$$T - t_n = 2v_0 \frac{\alpha^n}{g(1 - \alpha)}$$

Al despejar α^n queda:

$$\alpha^n = (T - t(n)) \frac{g(1 - \alpha)}{2v_0}$$

Aplicando ln a ambos lados, reemplazando T y despejando n

$$n(t) = \frac{\ln\left(\frac{2v_0}{g(1-\alpha)} - t\right) \cdot \frac{g(1-\alpha)}{2v_0}}{\ln \alpha}$$



Para graficar n logarítmicamente en función del tiempo(t), se utilizaron los valores $v_0 = 5 \frac{m}{s}$, $\alpha = 0,5$ y $g = 10 \frac{m}{s^2}$. Se usó además un intervalo de tiempo de dos segundos, desde $t = 0$ hasta $t = T$, que al evaluarlo en las constantes quedó como $T=2$. Al observar el gráfico, se puede observar que a medida que el tiempo(t) avanza, el número de botes que ocurren durante cada variación de tiempo Δt se hace cada vez mayor, por lo que las imágenes de la función se concentran más y más, tendiendo a infinito para un Δt muy cercano a $t = 2$.

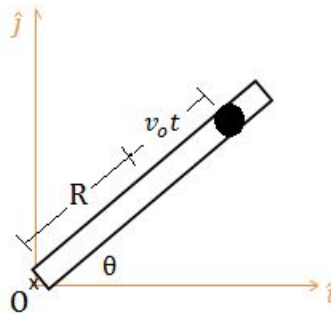
Pregunta 4

Una partícula se mueve por el interior de un tubo de largo $2R$ que gira con una rapidez angular constante ω_0 en torno a un eje perpendicular al tubo. La partícula inicia su movimiento desde el punto medio del tubo y, al mismo tiempo que rota en forma solidaria con el, se desplaza por el interior del tubo con una rapidez constante v_0 respecto al mismo.

- (a) Calcule el radio de la curvatura de la trayectoria descrita en función del tiempo.
- (b) Determine el camino recorrido por la partícula desde que inicia su movimiento hasta que llega al extremo del tubo.

(a)

Empezamos por poner nuestro sistema de coordenadas cartesiano con origen en O , un borde del tubo de largo $2R$. El tubo describe un ángulo θ con respecto a la vertical. Un instante después de haber empezado el movimiento (desde el punto medio del tubo) habrá recorrido una distancia $d = v_0 t$, sin pérdida de generalidad, en la figura siguiente hemos supuesto que la partícula se mueve hacia el lado positivo del eje cartesiano, ya que trabajaremos algebraicamente.



Obtendremos el radio de curvatura mediante $\rho_c = \frac{|\vec{v}|^3}{||\vec{v} \times \vec{a}||}$, por lo que necesitamos vector posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$. La hipotenusa del triángulo rectángulo de ángulo θ describe la distancia a la que se encuentra la partícula con respecto al origen O en función del tiempo, por lo que mediante relaciones trigonométricas y proyectando esta distancia sobre los ejes ortogonales con tal de obtener un vector, tenemos:

$$\vec{r}(t) = (R + v_0 t)\cos\theta\hat{i} + (R + v_0 t)\sin\theta\hat{j} \quad (6)$$

Derivando (6) con respecto al tiempo, obtenemos $\vec{v}$:

$$\vec{v}(t) = (v_0\cos\theta - (R + v_0 t)\sin\theta\dot{\theta})\hat{i} + (v_0\sin\theta - (R + v_0 t)\cos\theta\dot{\theta})\hat{j} \quad (7)$$

Derivando (7) con respecto al tiempo, obtenemos $\vec{a}$:

$$\vec{a}(t) = (-2 \cdot v_0\sin\dot{\theta} - (R + v_0 t)\cos\theta\dot{\theta}^2)\hat{i} + (2 \cdot v_0\cos\dot{\theta} - (R + v_0 t)\sin\theta\dot{\theta}^2)\hat{j} \quad (8)$$



De (6) obtenemos el módulo de la velocidad, es decir la rapidez, que utilizaremos para obtener ρ_c ,

$$|\vec{v}| = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2}$$

$$|\vec{v}|^3 = v_0^3 \left(1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)^{3/2}$$

Realizamos el producto cruz entre $\vec{v}$ y $\vec{a}$, luego sacando módulo, obtenemos:

$$\begin{aligned} |\vec{v} \times \vec{a}| &= (2v_0^2 \dot{\theta} + (R + V_0 t)^2 \dot{\theta}^3) \\ &= 2v_0^2 \dot{\theta} + V_0^2 \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^3 \\ &= v_0^2 \dot{\theta} \left(2 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right) \end{aligned}$$

Con lo que ahora podemos obtener ρ_c :

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{v_0^3 \left(1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)^{3/2}}{v_0^2 \dot{\theta} \left(2 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)} \\ \Rightarrow \rho_c &= \frac{v_0 \left(1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)^{3/2}}{\dot{\theta} \left(2 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la partícula describe una trayectoria circular de radio ρ_c .

(b)

Ya que podemos definir la rapidez como la derivada de la posición con respecto al tiempo, es decir, $|\vec{v}| = \frac{dx}{dt}$, y como ya tenemos este valor, integramos para obtener la distancia recorrida por la partícula desde que inicia su movimiento ($t_i = 0$) hasta que llega al extremo del tubo ($t_f = \frac{R}{v_0}$). Y ya que $\dot{\theta} = \omega_0$, obtenemos:

$$D_{rec} = \int_0^{\frac{R}{v_0}} v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \omega_0^2} dt$$

Tarea 1 - Pregunta 4

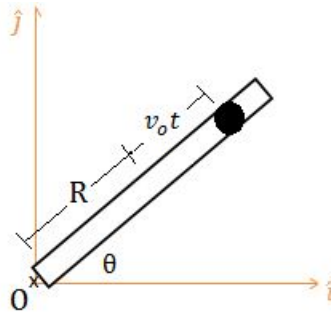
Una partícula se mueve por el interior de un tubo de largo $2R$ que gira con una rapidez angular constante ω_0 en torno a un eje perpendicular al tubo. La partícula inicia su movimiento desde el punto medio del tubo y, al mismo tiempo que rota en forma solidaria con el, se desplaza por el interior del tubo con una rapidez constante v_0 respecto al mismo.

(a) Calcule el radio de la curvatura de la trayectoria descrita en función del tiempo.

(b) Determine el camino recorrido por la partícula desde que inicia su movimiento hasta que llega al extremo del tubo.

(a)

Empezamos por poner nuestro sistema de coordenadas cartesiano con origen en O , un borde del tubo de largo $2R$. El tubo describe un ángulo θ con respecto a la vertical. Un instante después de haber empezado el movimiento (desde el punto medio del tubo) habrá recorrido una distancia $d = v_0 t$, sin pérdida de generalidad, en la figura siguiente hemos supuesto que la partícula se mueve hacia el lado positivo del eje cartesiano, ya que trabajaremos algebraicamente.



Obtendremos el radio de curvatura mediante $\rho_c = \frac{|\vec{v}|^3}{||\vec{v} \times \vec{a}||}$, por lo que necesitamos vector posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$. La hipotenusa del triángulo rectángulo de ángulo θ describe la distancia a la que se encuentra la partícula con respecto al origen O en función del tiempo, por lo que mediante relaciones trigonométricas y proyectando esta distancia sobre los ejes ortogonales con tal de obtener un vector, tenemos:

$$\vec{r}(t) = (R + v_0 t)\cos\theta\hat{i} + (R + v_0 t)\sin\theta\hat{j} \quad (9)$$

Derivando (6) con respecto al tiempo, obtenemos $\vec{v}$:

$$\vec{v}(t) = (v_0\cos\theta - (R + v_0 t)\sin\theta\dot{\theta})\hat{i} + (v_0\sin\theta - (R + v_0 t)\cos\theta\dot{\theta})\hat{j} \quad (10)$$

Derivando (7) con respecto al tiempo, obtenemos $\vec{a}$:

$$\vec{a}(t) = (-2 \cdot v_0\sin\dot{\theta} - (R + v_0 t)\cos\theta\dot{\theta}^2)\hat{i} + (2 \cdot v_0\cos\dot{\theta} - (R + v_0 t)\sin\theta\dot{\theta}^2)\hat{j} \quad (11)$$



De (6) obtenemos el módulo de la velocidad, es decir la rapidez, que utilizaremos para obtener ρ_c ,

$$|\vec{v}| = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2}$$

$$|\vec{v}|^3 = v_0^3 \left(1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)^{3/2}$$

Realizamos el producto cruz entre $\vec{v}$ y $\vec{a}$, luego sacando módulo, obtenemos:

$$\begin{aligned} |\vec{v} \times \vec{a}| &= (2v_0^2 \dot{\theta} + (R + V_0 t)^2 \dot{\theta}^3) \\ &= 2v_0^2 \dot{\theta} + V_0^2 \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^3 \\ &= v_0^2 \dot{\theta} \left(2 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right) \end{aligned}$$

Con lo que ahora podemos obtener ρ_c :

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{v_0^3 \left(1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)^{3/2}}{v_0^2 \dot{\theta} \left(2 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)} \\ \Rightarrow \rho_c &= \frac{v_0 \left(1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)^{3/2}}{\dot{\theta} \left(2 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \dot{\theta}^2\right)} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la partícula describe una trayectoria circular de radio ρ_c .

(b)

Ya que podemos definir la rapidez como la derivada de la posición con respecto al tiempo, es decir, $|\vec{v}| = \frac{dx}{dt}$, y como ya tenemos este valor, integramos para obtener la distancia recorrida por la partícula desde que inicia su movimiento ($t_i = 0$) hasta que llega al extremo del tubo ($t_f = \frac{R}{v_0}$). Y ya que $\dot{\theta} = \omega_0$, obtenemos:

$$D_{rec} = \int_0^{\frac{R}{v_0}} v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{v_0} + t\right)^2 \omega_0^2} dt$$



Tarea 1- Pregunta 5

(a)

Para calcular la rapidez de la partícula obtendremos su velocidad, derivando su posición con respecto al tiempo:

$$\vec{r} = R \cos(w_0 t) \hat{i} + R \sin(w_0 t) \hat{j} + ct \hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -Rw_0 \sin(w_0 t) \hat{i} + Rw_0 \cos(w_0 t) \hat{j} + c \hat{k}$$

Con esta velocidad, y calculando su norma, obtendremos su rapidez

$$\|\vec{v}\| = v = \dot{s} = \sqrt{R^2 w_0^2 + c^2}$$

Además sabemos que $\vec{v} = \dot{s} \hat{t}$ y $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \ddot{s} \hat{t} + \dot{s} \cdot \frac{d\hat{t}}{dt}$

Por lo tanto:

$$\vec{a}_t = 0, \text{ pues } \ddot{s} = 0$$

$$\vec{a}_n = \dot{s} \cdot \frac{d\hat{t}}{dt} = \dot{s}^2 \cdot \frac{1}{R_c} \hat{n}, R_c: \text{Radio de curvatura}$$

$$\vec{a}_n = R w_0^2 \hat{n}, \text{ Calculado con } R_c \text{ obtenido en (b)}$$

(b)

Sabemos que $R_c = \frac{\dot{s}^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$. Ya tenemos $\dot{s}$ y $\vec{v}$. Obtendremos $\vec{a}$ derivando $\vec{v}$ con respecto al tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -Rw_0^2 \cos(w_0 t) \hat{i} - Rw_0^2 \sin(w_0 t) \hat{j}$$

Luego, haciendo el producto cruz y calculando su norma,

$$\|\vec{v} \times \vec{a}\| = R w_0^2 \left(\sqrt{R^2 w_0^2 + c^2} \right)$$

Por lo tanto:

$$R_c = \frac{\dot{s}^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = R + \frac{c^2}{R w_0^2}$$

(c)

La proyección del vector posición sobre el tangente a la trayectoria es, en otras palabras, la proyección de $\vec{r}$ sobre $\vec{v}$, pues este último tiene un vector dirección tangente a la trayectoria en todo momento. Por lo tanto:

$$Proy_{\vec{v}} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \hat{t} = \frac{c^2 t}{\dot{s}} \hat{t} = \frac{c^2 t}{\sqrt{R^2 w_0^2 + c^2}} \hat{t}$$



(d)

Para esto veremos su posición, es decir, $\vec{r}$.

$$\vec{r} = R \cos(w_0 t) \hat{i} + R \sin(w_0 t) \hat{j} + ct \hat{k}$$

Como nos podemos dar cuenta, para que el movimiento ocurra sobre un plano, su posición debe estar definida por tan sólo dos vectores direccionales del triedro cartesiano. Esto ocurre con $c = 0$. En este caso, el movimiento sólo se ve representado por las componentes cartesianas $\hat{i}$ y $\hat{j}$, Quedando w_0 libre. También vemos movimientos planos cuando w_0 anula al seno o al coseno.

Pregunta 6

Comenzamos analizando la velocidad de los caracoles. Sabemos, por los datos otorgados, que su módulo es constante y su dirección y sentido apunta hacia el caracol hacia su derecha. Entonces, llamamos a esta velocidad V_0 . Para estudiarla mejor, la descomponemos de la siguiente manera:

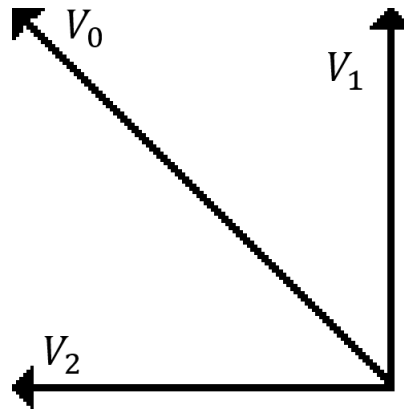


Figura 4: Descomposición de V_0 en V_1 y V_2

De esta manera, podemos observar que V_1 y V_2 son ortogonales entre sí. También notamos que, como todos los caracoles tienen la misma rapidez, la magnitud de V_1 y V_2 es igual para cada uno de los caracoles. También observamos que como se encuentran equidistantes, se forma un triángulo equilátero este ello, donde V_1 y V_2 aplican una rotación y homotecia respectivamente, como se aprecia en la imagen:

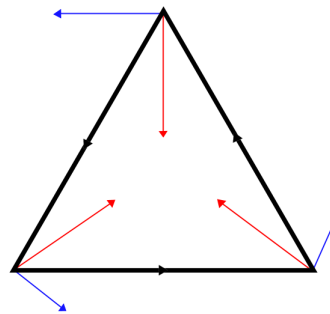


Figura 5: Representación de V_0 , V_1 y V_2 (en negro, azul y rojo, respectivamente) para cada uno de los caracoles

De esta manera, sabemos que podemos explicar la trayectoria de los caracoles si analizamos los movimientos de rotación y homotecia que la componen:

Homotecia: Por trigonometría, sabemos que $V_2 = V_0 \sin(\frac{\pi}{3})$. También sabemos que, ya que los caracoles están alineados en forma de un triángulo equilátero de lado L , la distancia de cada uno respecto al centro de este puede ser representada como $R_0 = \frac{L}{\sqrt{3}}$. Entonces, como se mueven con rapidez constante, la distancia entre un caracol y el origen en un determinado tiempo t se puede representar como:

$$R(t) = R_0 - V_2 t$$

Rotación: Por trigonometría, sabemos que $V_1 = V_0 \cos(\frac{\pi}{3})$. También podemos ver que, siendo ortogonal al vector que apunta al centro del triángulo V_2 , V_1 representa la velocidad tangencial de este. De esta manera, podemos calcular la velocidad angular como $\omega(t) = -\frac{V_1}{R(t)}$, que es negativo por regla de la mano derecha. Entonces, al tener radio y velocidad angular, podemos usar estos datos para describir el movimiento en coordenadas polares de la siguiente forma:

$$x(t) = R(t) \cos(\omega(t)t + \phi)$$

$$y(t) = R(t) \sin(\omega(t)t + \phi)$$

Donde ϕ es una constante que representa a la fase, dependiente de la posición inicial.

Entonces, podemos describir la trayectoria de los caracoles como:

$$x(t) = \left(\frac{L}{\sqrt{3}} - V_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t\right) \cos\left(-\frac{V_0 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{L}{\sqrt{3}} - V_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t\right)}t + \phi\right)$$

$$y(t) = \left(\frac{L}{\sqrt{3}} - V_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t\right) \sin\left(-\frac{V_0 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{L}{\sqrt{3}} - V_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t\right)}t + \phi\right)$$

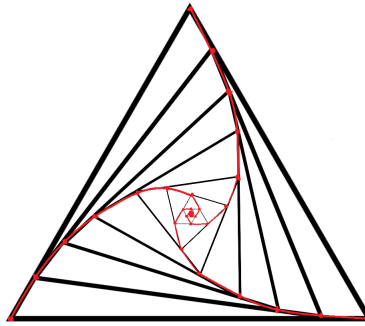


Figura 6: Trayectoria aproximada de los caracoles en el tiempo

Finalmente, podemos decir que los caracoles se mueven con rapidez constante, manteniéndose a posición equidistante entre sí en cada momento, hasta un punto en el que se encuentran en el centro del triángulo.



Tarea 2 - Pregunta 1

(a)

Estudiando las fuerzas que actúan sobre la partícula, obtenemos que en la dirección tangencial a la curva solo actúa la gravedad. Utilizando la segunda ley de Newton tenemos

$$-mg \sin \theta = m\ddot{s}$$

Aproximando el ángulo pequeño se obtiene

$$\ddot{s} + g\theta = 0$$

Ahora queremos que la curva sea tal que el período de oscilación sea independiente de la amplitud del movimiento. Sabemos que un movimiento armónico simple con ecuación de movimiento $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ la solución es periódica con período $\frac{2\pi}{\omega}$. Entonces el período de un movimiento armónico simple no depende de la amplitud. Por lo tanto, para que nuestra canaleta satisfaga esta condición, una partícula que desliza por ella tiene que describir un MAS. Para obtener eso en la ecuación de movimiento se debe cumplir que el ángulo θ sea proporcional al arco s , $\theta = \alpha s$, con α la constante de proporcionalidad. Así se obtiene

$$\ddot{s} + g\alpha s = 0$$

(b)

Ahora no podemos aproximar el ángulo pequeño. Así la ecuación de movimiento es

$$\ddot{s} = -g \sin \theta$$

Pero sabemos que el movimiento tiene que ser armónico simple. Así imponemos que $\ddot{s}$ sea proporcional a $-s$.

$$\alpha s = g \sin \theta$$

Podemos diferenciar esta relación para obtener

$$ds = \frac{g}{\alpha} \cos \theta d\theta$$

Ahora podemos proyectar este elemento diferencial de arco en los ejes OX y OY para obtener ecuaciones separadas para las componentes en x e y de la canaleta.

$$dx = ds \cos \theta = \frac{g}{\alpha} \cos^2 \theta d\theta = \frac{g}{2\alpha} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$dy = ds \sin \theta = \frac{g}{\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{g}{2\alpha} \sin 2\theta d\theta$$

Ahora podemos integrar estas ecuaciones con las condiciones de borde $x(\theta = 0) = 0$ e $y(\theta = 0) = 0$ para obtener la curva que describe la canaleta, parametrizada por θ .

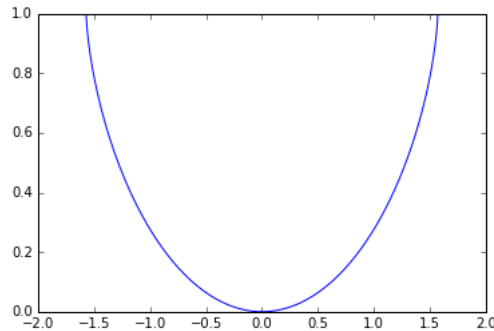
$$x = \frac{g}{2\alpha} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$$



$$y = -\frac{g}{2\alpha} \left(\frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

(c)

Podemos ver la curva que describe la canaleta en la siguiente figura. Al graficar esta figura se



utilizó $\frac{g}{2\alpha} = 1$. La curva descrita por la canaleta es una cicloide invertida. Notemos que la curva queda en función de un parámetro desconocido α , ya que cualquier cicloide satisface la condición del problema, por lo tanto no importa el valor del parámetro.

(d)

Por construcción se sabe que el arco de la canaleta satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{s} + \alpha s = 0$$

Con esto podemos determinar $s(t)$, imponiendo como condiciones iniciales $s(t=0) = s_0$ y $\dot{s}(t=0) = 0$. Estas condiciones representan la amplitud de la partícula deslizando por la canaleta, y que la partícula parte desde el reposo.

$$s(t) = s_0 \cos \sqrt{\alpha} t$$

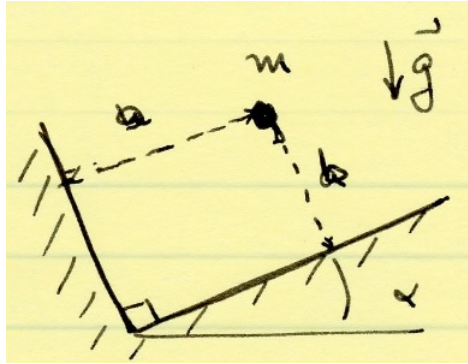
Ahora encontramos el tiempo T en el cual el arco descrito por la trayectoria es nulo, lo que indica que la partícula llega al punto más bajo de la canaleta.

$$s(T) = 0 \implies T = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$$

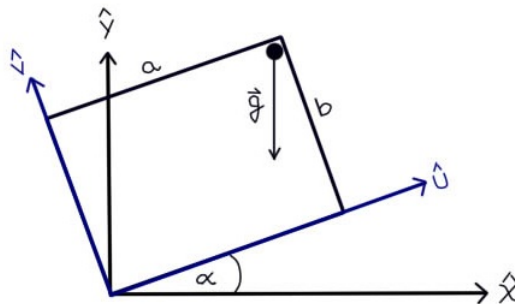
Concluimos que el tiempo que tarda la partícula en llegar al punto más bajo de la canaleta es independiente de la amplitud, representada por el parámetro s_0 .

Tarea 2 - Pregunta 2

Se tiene una caja inclinada y apoyada sobre el piso, formando un ángulo con este. Dentro de la caja se suelta en (a; b) una pelotita de masa m , la cual cae por efectos de la gravedad y rebota elásticamente con el fondo de la caja. Se quiere estudiar el comportamiento de la pelotita dentro de la caja, suponiendo que esta última no se mueve.



(a) Escoja un sistema de coordenadas apropiado para el problema y plantee las ecuaciones de movimiento de la pelotita.



$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{\hat{x}}{\cos(\alpha)}; \hat{v} = \frac{\hat{y}}{\sin(\alpha)} \\ \vec{g} &= [-\sin(\alpha)\hat{u} - \cos(\alpha)\hat{v}]g \\ \hat{u} &\Rightarrow m\ddot{u} = -mg\sin(\alpha) \Rightarrow \ddot{u} = -g\sin(\alpha) \\ \hat{v} &\Rightarrow m\ddot{v} = -mg\cos(\alpha) \Rightarrow \ddot{v} = -g\cos(\alpha)\end{aligned}$$

(b) ¿Cuanto demora la pelotita en chocar con una de las paredes? ¿De que depende con que pared de la caja choca?

$$\text{Usando: } \vec{y} = \vec{y}_0 - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Para que caiga en la cara a:

$$v = b - \frac{1}{2}g\cos(\alpha)t^2; v = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{g} = \cos(\alpha)t^2 \Rightarrow t_{total} = \sqrt{\frac{2b}{g\cos(\alpha)}}; a > b\tan(\alpha)$$

Para que caiga en la cara b:

$$u = a - \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2; u = 0$$

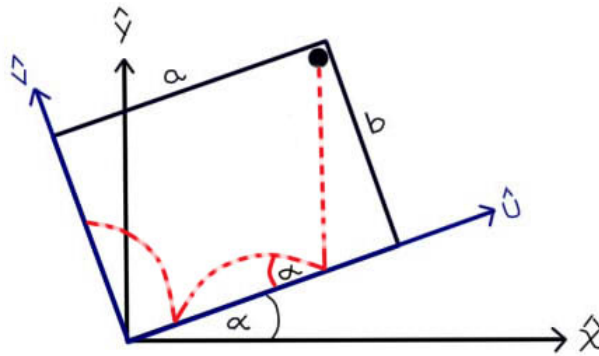
$$\Rightarrow \frac{2a}{g} = \sin(\alpha)t^2 \Rightarrow t_{total} = \sqrt{\frac{2a}{g \sin(\alpha)}}; a < b \tan(\alpha)$$

Para que caiga en el medio:

se requiere que $a = b \tan(\alpha)$, y el tiempo empleado se obtiene usando cualquiera de las dos ecuaciones.

(c) Suponga cada una de las tres situaciones posibles (que choca con la cara izquierda, con la derecha y con la intersección entre ambas) y describa el movimiento de la pelotita en cada uno de esos casos. ¿Que trayectoria recorre? Dibujela digitalmente. ¿Cuanto tiempo demora?

Asumiendo que el choque es elástico, si la pelotita cae en la cara izquierda (o derecha), su siguiente movimiento será rebotar hacia el lado opuesto de la cara siguiendo una trayectoria parabólica hacia abajo por efecto de la gravedad (con el ángulo inicial del rebote siendo el mismo con el que llego a rebotar), y al momento de chocar con otra cara repetiría la misma trayectoria en sentido contrario. Si al soltar la pelota del punto inicial cae directamente en el vértice inferior de la caja, saltaría hacia arriba, se detendría en el punto de inicio, y volvería a caer, repitiendo este proceso indefinidamente.



(d) ¿Que ocurre si los rebotes no son elásticos?

En el caso que los choques fueran elásticos, la pelotita rebotaría hasta que la energía cinética sea cero, y en cada rebote se acercaría mas al vértice de la caja.



Pregunta 3

Considere un cono recto de semi-ángulo γ . Sobre la superficie del cono se mueve una partícula con velocidad de magnitud constante v_c y de dirección tal que forma un ángulo constante β con la generatriz del cono. Si la partícula inicia su movimiento a una distancia h del vértice del cono.

(a)

Determine la ecuación de la trayectoria y dibújela (por ejemplo, posición r de la partícula sobre el manto en función del ángulo de rotación en torno al eje del cono).

$$\vec{r}(\phi_0) = h$$

Para analizar el problema se usará un sistema de coordenadas esféricas con centro en O y el ángulo cenital estará definido por $\theta = \pi - \gamma$. Nótese que es constante y que $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\gamma)$ $\cos(\theta) = -\cos(\gamma)$

Luego se puede descomponer la velocidad como:

$$\vec{v} = v_c(\cos(\beta)\hat{r} + \text{sen}(\beta)\hat{\phi})$$

Podemos derivar la expresión general de velocidad para coordenadas esféricas como:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{r}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\right) \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\left(\hat{\theta}\dot{\theta} + \text{sen}(\theta)\hat{\phi}\dot{\phi}\right) \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\text{sen}(\theta)\hat{\phi} \end{aligned}$$

Luego podemos igualar ambas formas del vector velocidad

$$\begin{aligned} v_c(\cos(\beta)\hat{r} + \text{sen}(\beta)\hat{\phi}) &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\text{sen}(\theta)\hat{\phi} ; \theta = \text{cte} \\ v_c \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ 0 \\ \text{sen}(\beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ r\dot{\phi}\text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esto se desprenden las ecuaciones:

$$\frac{dr}{dt} = v_c \cos(\beta)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_c \text{sen}(\beta)}{r \text{sen}(\gamma)}$$



Primero determinamos la posición respecto del tiempo.

$$\begin{aligned}\int_h^r dr' &= \int_0^t v_c \cos(\beta) dt' \\ r - h &= v_c \cos(\beta)(t - 0) \\ r &= v_c \cos(\beta)t + h\end{aligned}$$

Luego determinamos la relación entre la posición y el ángulo azimutal.

$$\begin{aligned}\int_0^\phi d\phi' &= \int_0^t \frac{v_c \sin(\beta)}{r(t') \sin(\gamma)} dt' \\ \phi - 0 &= \frac{v_c \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \int_0^t \frac{dt'}{v_c \cos(\beta)t' + h} \\ \phi &= \frac{v_c \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{d\mu}{\mu v_c \cos(\beta)} \\ &= \frac{\tan(\beta)}{\sin(\gamma)} \ln(\mu) \Big|_{t'=0}^{t'=t} \\ &= \frac{\tan(\beta)}{\sin(\gamma)} \ln(v_c \cos(\beta)t' + h) \Big|_{t'=0}^{t'=t} \\ &= \frac{\tan(\beta)}{\sin(\gamma)} \ln\left(\frac{v_c \cos(\beta)t + h}{h}\right) \\ &= \frac{\tan(\beta)}{\sin(\gamma)} \ln\left(\frac{r}{h}\right) \\ \Rightarrow \frac{\phi \sin(\gamma)}{\tan(\beta)} &= \ln\left(\frac{r}{h}\right) \\ \Rightarrow e^{\frac{\phi \sin(\gamma)}{\tan(\beta)}} &= \frac{r}{h} \\ \Rightarrow r &= h e^{\frac{\phi \sin(\gamma)}{\tan(\beta)}} \\ &= h e^{\phi C}\end{aligned}$$

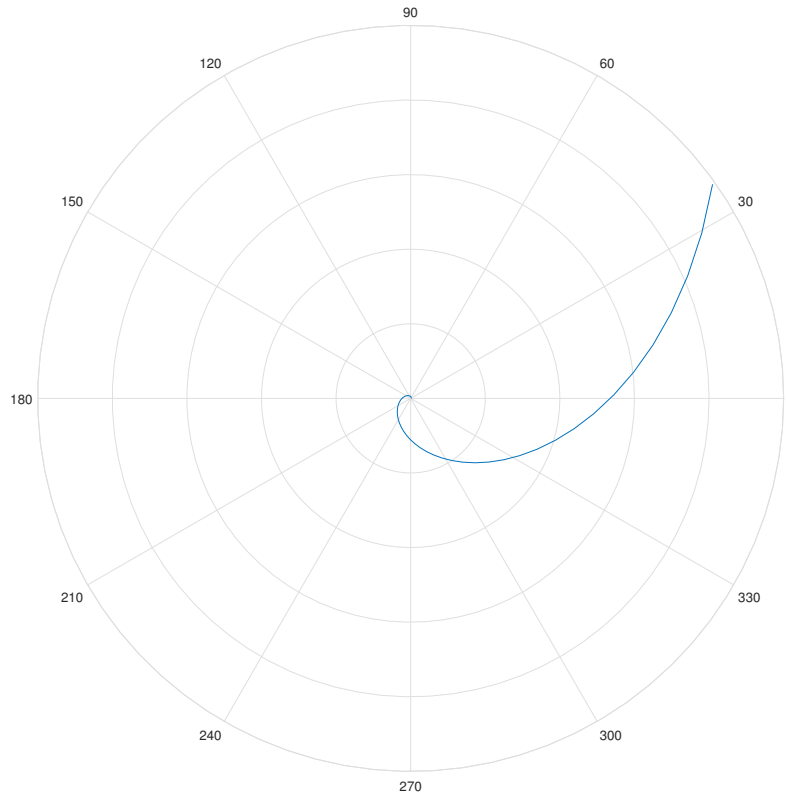


Figura 7: Vista superior de la trayectoria

(b)

¿ Cuánto demora en dar la primera vuelta al cono? ¿ Y la segunda? ¿ Y la enésima?

Combinando las dos ecuaciones para la posición de la parte anterior tenemos:

$$r = he^{\phi C} = v_c \cos(\beta) t + h$$

Evaluyendo al final de la primera vuelta:

$$\begin{aligned} he^{2\pi C} &= v_c \cos(\beta) t_1 + h \\ h(e^{2\pi C} - 1) &= v_c \cos(\beta) t_1 \\ \frac{h(e^{2\pi C} - 1)}{v_c \cos(\beta)} &= t_1 \end{aligned}$$

Como al final de cada vuelta el ángulo azimutal es $\phi = 2n\pi$ y esto es sólo una ponderación, la expresión anterior se puede generalizar para todo n número de vueltas como:

$$t_n = \frac{h(e^{2n\pi C} - 1)}{v_c \cos(\beta)}$$