FI2001 Mecánica
Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Isidora Araya y Joaquín Medina

Pauta Auxiliar 3

4 de agosto de 2017

P1. (a) Escribir las ecuaciones de movimiento de la partícula en el sistema de coordenadas cilíndricas.

Para escribir las ecuaciones de movimiento, es necesario coordinar la información geométrica del problema con la dinámica de este.
Debido a la geometría cilíndrica del problema, se tienen las siguientes ecuaciones para las variables cinemáticas:

- $\overrightarrow{r(t)} = r\hat{r} + z\hat{z}$
- $\overrightarrow{v(t)} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$
- $\overrightarrow{a(t)} = (\ddot{r} - r\theta^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$

Por otro lado, las ecuaciones escalares que rigen la dinámica del problema son las siguientes (vienen de $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ en cada dirección)

- $\hat{\theta}$: $0 = ma_\theta$
- $\hat{z}$: $N\sin\alpha = ma_z$
- $\hat{r}$: $-N\cos\alpha = ma_r$

A partir de la dinámica y geometría, se establecen las siguientes ecuaciones:

- $\hat{\theta}$: $0 = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$
- $\hat{z}$: $N\sin\alpha = ma_z = m\ddot{z}$
- $\hat{r}$: $-N\cos\alpha = m(\ddot{r} - r\dot{theta}^2)$

Se trabajarán a continuación cada una de las ecuaciones escalares, comenzando por $\hat{\theta}$.

$$0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\frac{\dot{r}}{r}$$

$$\frac{\frac{d\dot{\theta}}{dt}}{\dot{\theta}} = -2\frac{\frac{dr}{dt}}{r}$$

$$\int \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\int \frac{dr}{r}$$

$$ln(\dot{\theta}/\dot{\theta}_0) = ln(r/r_0)^{-2}$$
$$\dot{\theta}/\dot{\theta}_0 = (r/r_0)^{-2}$$
$$\dot{\theta}r^2 = \dot{\theta}_0 r_0^2$$

Al multiplicar nuevamente por la masa se obtiene:

$$m\dot{\theta}r^2 = cte$$

Es decir, al no existir fuerzas en $\hat{\theta}$ se concluye que el momentum angular se conserva. Como en el inicio solo existe velocidad en $\hat{\theta}$ se tiene $v_0 = \theta_0 l_o \sin\alpha$. Con esto se obtiene:

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 l_0 \sin\alpha}{r^2} \tag{1}$$

Por otro lado, en $\hat{z}$ se tiene lo siguiente:

$$N\sin\alpha = m\ddot{z}$$

donde $\tan(\alpha) = r/z$ y así $\ddot{z} = \ddot{r}\cot\alpha$. Luego,

$$N\sin\alpha = m\ddot{r}\cot\alpha$$
$$N = m\ddot{r}\frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \tag{2}$$

Por último, de $\hat{r}$ se obtiene:

$$-N\cos\alpha = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

Reemplazando N obtenido en (2):

$$-m\ddot{r}\frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\ddot{r}(1 + \cot^2(\alpha)) - r\dot{\theta}^2 = 0$$

Aquí se utiliza la conservación del momentum y se reemplaza $\dot{\theta} = \frac{v_0 l_0 \sin\alpha}{r^2}$ obtenido en (1):

$$\ddot{r}(1 + \cot^2(\alpha)) - \frac{v_0^2 l_0^2 \sin^2\alpha}{r^3} = 0 \tag{3}$$

Esta expresión consiste en la ecuación de movimiento de la partícula.

(b) Determine la fuerza que ejerce la superficie cónica sobre la partícula cuando esta se ha alejado una distancia $l = 2l_0$ del vértice del cono y la rapidez de la partícula en ese momento.

Para determinar la fuerza que ejerce la superficie cónica, se debe determinar la Normal en el momento indicado. Para realizar esto, se toma la expresión calculada en (2) y se reemplaza $\ddot{r}$ de (3) evaluado en $r_l = 2l_0 \sin\alpha$:

$$N_l = m\frac{v_0^2 l_0^2}{1 + \cot^2(\alpha)}\frac{\cos(\alpha)}{r_l^3}$$

Así, la fuerza que ejerce la superficie sobre la partícula será:

$$N_l = m\frac{v_0^2}{1+\cot^2(\alpha)}\frac{\cos(\alpha)}{8l_0\sin^3\alpha} \tag{4}$$

Por otro lado, la rapidez de la partícula en $l = 2l_0$ se determinará a partir de (3).

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{v_0^2 l_0^2 \sin^2\alpha}{r^3(1+\cot^2(\alpha))}$$

$$\frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{v_0^2 l_0^2 \sin^2\alpha}{r^3(1+\cot^2(\alpha))}$$

$$\frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = \frac{v_0^2 l_0^2 \sin^2\alpha}{r^3(1+\cot^2(\alpha))}$$

$$\int \dot{r}d\dot{r} = \int \frac{v_0^2 l_0^2 \sin^2\alpha}{r^3(1+\cot^2(\alpha))}dr$$

$$\dot{r}^2 - \dot{r_0}^2 = -\frac{v_0^2 l_0^2 \sin^2\alpha}{1+\cot^2(\alpha)}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2})$$

Donde $\dot{r_0} = 0$ y $r_0 = l_0\sin(\alpha)$. Luego, para $l = 2l_0$:

$$\dot{r_l}^2 = -\frac{v_0^2 l_0^2 \sin^2\alpha}{1+\cot^2(\alpha)}(\frac{1}{4l_0^2\sin^2\alpha} - \frac{1}{l_0^2\sin^2(\alpha)})$$

$$\dot{r_l}^2 = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{1+\cot^2(\alpha)} \tag{5}$$

Como $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$, $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$.
Finalmente de (5), (1) y la relación trigonométrica entre r y z, se tiene que la rapidez indicada corresponde a:

$$v = \frac{v_0}{2} \tag{6}$$