FI2001 Mecánica
Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Isidora Araya y Joaquín Medina

Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Auxiliar 1

4 de agosto de 2017

P1. Demuestre la fórmula de Lagrange:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los siguientes vectores:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Calculamos entonces la parte izquierda de la fórmula de Lagrange:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \vec{a} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_3c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 \\ a_3b_3c_2 + a_1b_1c_2 \\ a_1b_1c_3 + a_2b_3c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 \\ a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 \\ a_3b_3c_3 + a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 \\ a_2b_2c_2 + a_3b_3c_2 + a_1b_1c_2 \\ a_3b_3c_3 + a_1b_1c_3 + a_2b_3c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

P2. *a*) Estudiar si el movimiento es plano o tri–dimensional (intuir y después demostrar).

Por enunciado se tiene que $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{\Omega}$, sabiendo que $\vec{a} = \frac{dv}{dt}$, luego tenemos

$$\frac{dv}{dt} = \vec{v} \times \vec{\Omega}$$

Así, multiplicando por Ω a ambos lados obtenemos

$$\frac{dv}{dt} \cdot \vec{\Omega} = \vec{v} \times \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}$$

Ahora, como $\vec{v} \times \vec{\Omega}$ es perpendicular a $\vec{\Omega}$ se tiene que $\vec{v} \times \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} = 0$, sigue que:

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{\Omega})}{dt} = 0$$

Recordar que $\vec{\Omega}$ es constante, por lo que puede entrar y salir de las derivadas. Como esa derivada es igual a cero, integrando obtenemos:

$$\vec{v} \cdot \vec{\Omega} = cte = \vec{v_0} \cdot \vec{\Omega} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$$

Que es la ecuación de un plano con $\vec{\Omega}$ vector normal a $\vec{r}$.

b) Demostrar que la rapidez de la partícula se mantiene constante durante el movimiento. Sabemos que $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Luego, solo debemos demostrar que $\vec{v} \cdot \vec{v}$ es constante para tener lo pedido. Veamos entonces su derivada temporal:

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

por enunciado

c) Calcular la proyección de la velocidad sobre el vector posición. En particular,analice si es posible una elección del origen O con respecto al punto P (magnitud de $\vec{r_0}$) para que la proyección siempre sea nula durante el movimiento. Determine el valor de r_0 para que esto sea posible.

c) De la relación inicial se cumple que:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} \times \vec{\Omega}$$

Integrando a ambos lados obtenemos:

$$\vec{v} - \vec{v_0} = \vec{r} \times \vec{\Omega} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{r} \times \vec{\Omega} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega}$$

Para calcular la proyección de la velocidad sobre la posición, se debe hacer el producto punto entre $\vec{v} \cdot \vec{r}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = (\vec{v_0} + \vec{r} \times \vec{\Omega} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{v_0} \cdot \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\Omega} \cdot \vec{r} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega} \cdot \vec{r}$$

Pero $\vec{r} \times \vec{\Omega} \cdot \vec{r} = 0$, ya que $\vec{r} \times \vec{\Omega}$ es perpendicular a $\vec{r}$. Así,

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{v_0} \cdot \vec{r} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega} \cdot \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot (\vec{v_0} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega})$$

Para que la proyección sea cero se debe cumplir que $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$:

$$\vec{v_0} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega} = 0$$

$$\vec{v_0} = \vec{r_0} \times \vec{\Omega}$$

Hacemos producto cruz con $\vec{\Omega}$ a ambos lados:

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{v_0} = \vec{\Omega} \times \vec{r_0} \times \vec{\Omega}$$

Usando la identidad del doble producto vectorial demostrada en la pregunta obtenemos:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v_0} = \vec{r_0}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}) - \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r_0})$$

Como $\vec{\Omega} \cdot \vec{r_0} = 0$ Se tiene que la condicióón de r_0 está dada por:

$$\vec{r_0} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{v_0}}{\Omega^2}$$

d) Calcular la velocidad angular con respecto al punto O. Considere la condición de r_0 de la parte *c*).

Sabemos que la velocidad angular se calcula como $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$, por lo que calculamos $\vec{r} \times \vec{v}$

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{v_0} + \vec{r} \times \vec{\Omega} - \vec{r_0} \times \vec{\Omega})$$

De la parte *c*) tenemos que $\vec{v_0} = \vec{r_0} \times \vec{\Omega}$ reemplazando:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{r} \times \vec{\Omega}$$

Usando de nuevo la identidad del producto cruz demostrada e la pregunta 1 queda:

$$\vec{r} \times \vec{v} = -r^2\vec{\Omega}$$

Luego,

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} = \frac{-r^2\vec{\Omega}}{r^2} = -\vec{\Omega}$$

Luego de analizar cada parte, vemos que el movimiento es plano, con rapidez constante, donde $\vec{v}$ y $\vec{r}$ son siempre perpendiculares, es decir, es de tipo circular uniforme.