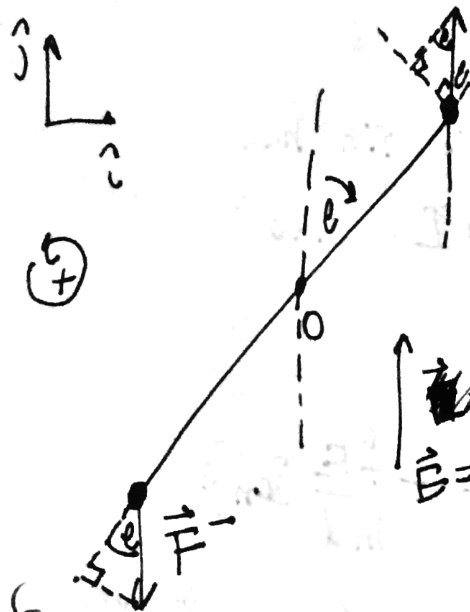
P1 | Hacemos el DCL del dipolo



→ por enunciado, $\vec{F}^+ = +qE\hat{k}$

$\vec{F}^- = -qE\hat{k}$

$\vec{E} = E\hat{k}$ → notamos que $\sum \vec{F} = qE\hat{k} - qE\hat{k} = 0$

→ no hay movimiento traslacional ¡SOLO Rotacional!

→ ¿Cual es la posición de eq?

- Con $\theta = 0$, no hay ninguna fuerza haciendo torque, por lo que el sistema queda estático
- Si $\theta \neq 0$, entonces $\vec{F}^+$ y $\vec{F}^-$ hacen torque tal que el sistema se devuelve a su posición de equilibrio.

→ esto es exactamente un oscilador armónico, donde la "variable importante" es θ.

→ es Importante identificar la "variable importante" (la que provoca la presencia de una "fuerza" restitutiva), y el equilibrio

→ en este caso, la "fuerza" restitutiva es el torque hecho por las fuerzas, como no hay roce

esperamos entonces, algo como $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ (*)

Hagamos entonces la ecuación de torque en el centro de masas O.

$$-I\ddot{\theta} = qEd\,\text{Sen}\,\theta + qEd\,\text{Sen}\,\theta. \quad \text{barra sin masa}$$

$$\rightarrow I = 2md^2$$

θ está definido como (2), pero la orientación del espacio en (1)

$$\rightarrow -2md^2\ddot{\theta} = 2qEd\,\text{Sen}\,\theta$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2qEd}{2md^2}\,\text{Sen}\,\theta = -\frac{qE}{md}\,\text{Sen}\,\theta.$$

Como esperamos algo de la forma (4), tiramos todo a un lado

$$\ddot{\theta} + \frac{qE}{md}\,\text{Sen}\,\theta = 0, \text{ y pequeñas oscilaciones} \rightarrow \text{Sen}\,\theta \sim \theta$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{qE}{md}\,\theta = 0$$

→ Una vez tenemos la ecuación identificamos los parámetros del sistema, y el tipo de oscilación.

→ En este caso, tenemos un oscilador libre, con una frecuencia de oscilación $w_0^2 = \frac{qE}{md}$

→ La solución es conocida, y es

$$\theta(t) = A\,\text{Cos}(w_0 t) + B\,\text{Sen}(w_0 t)$$

¡Las constantes A y B dependen de las condiciones iniciales!

C.i. $\rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}\theta(0) &= \pi/6 \\ \dot{\theta}(0) &= 0\end{aligned}}$, evaluamos

$$\theta(0) = A \rightarrow \frac{\pi}{6} = A$$

$$\dot{\theta}(t) = A w_0 \sin(w_0 t) + B w_0 \cos(w_0 t)$$

$$\rightarrow \dot{\theta}(0) = B w_0 \rightarrow 0 = B w_0 \underset{w_0 > 0}{\rightarrow} B = 0$$

así, la solución es finalmente

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{6} \cos\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{fE}{md}}}_{w_0}\, t\Big)}$$

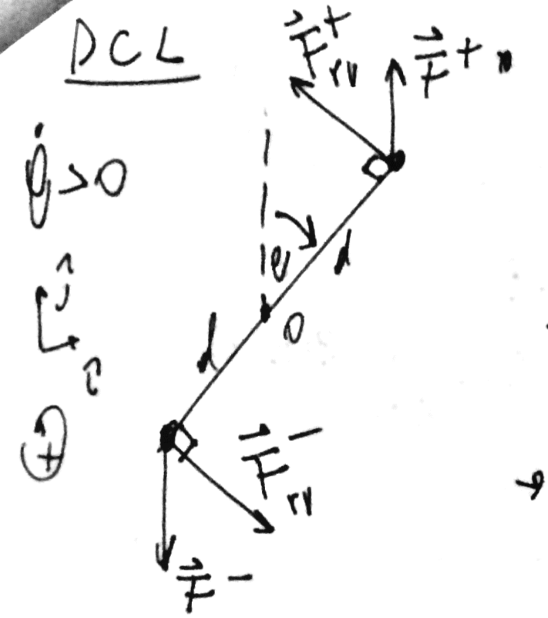
- Con amortiguamiento, esperamos una ecuación de la forma

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{\tau}\dot{\theta} + w_0^2 \theta = 0$$

Sabemos que la fuerza de roce viscoso $\vec{F}_{rv}$ es contraria a la velocidad del objeto, y su magnitud es $\beta \|\vec{v}\|$ donde $\|\vec{v}\|$ es la magnitud de la velocidad.

Truco: Para saber la dirección de $\vec{F}_{rv}$, podríamos tener problemas con signos pues la dirección depende de la velocidad de movimiento. Para solucionar esto, se hace el DCL con la "variable importante" aumentando (i.e. $\dot{\theta} > 0$). Todo saldrá OK!

DCL



Observación: la velocidad de las masas es netamente tangencial, pues $\sum \vec F = 0$, el centro de masas no se mueve.

→ Como $\vec F_{rv} \parallel \vec v$, $\vec F_{rv}$ es tangencial también.

→ denotamos $\vec F^+_{rv}$ la fuerza de roce viscoso en la carga positiva, y $\vec F^-_{rv}$ en la negativa.

Hagamos torque sobre O:

$$-I\ddot\theta = \underbrace{2qEd\sin\theta}_{\text{torque de } \vec F^+ \text{ y } \vec F^-} + \underbrace{\Gamma\dot\theta d\cdot d}_{\tau(\vec F^+_{rv})} + \Gamma\overbrace{\dot\theta d}^{\text{velocidad de la carga}}\cdot d$$

→ $2md^2\ddot\theta = 2qEd\sin\theta + 2\Gamma\dot\theta d^2$

$I = 2md^2$

$$\rightarrow \ddot\theta = -\frac{2qEd\sin\theta}{2md^2} - \frac{2\Gamma d^2\dot\theta}{2md^2} = -\frac{qE}{md}\sin\theta - \frac{\Gamma}{m}\dot\theta$$

$$\sin\theta \approx \theta \longrightarrow \ddot\theta + \frac{\Gamma}{m}\dot\theta + \frac{qE}{md}\theta = 0$$

identificamos los parámetros del oscilador amortiguado, γ y w_0 → $\frac{1}{\gamma} = \frac{\Gamma}{m}$, y $w_0^2 = \frac{qE}{md}$

La solución (con solido) es entonces: frecuencia del sistema.

$$\theta(t) = A e^{-\frac{t}{2\tau}} \operatorname{Sen}(\Omega t + \varphi),$$

con $\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 = \frac{qE}{md} - \frac{\gamma^2}{4m^2}$, y A y φ son determinados por las condiciones iniciales.

Para encontrar las constantes, es mas facil usar esta forma: (equivalente)

$$\theta(t) = e^{-t/2\tau}\left(A \operatorname{Sen}(\Omega t) + B \operatorname{Cos}(\Omega t)\right)$$

Las condiciones iniciales son $\theta(0) = \pi/6$, y $\dot\theta(0) = 0$

- $\theta(0) = \pi/6 \rightarrow \quad B = \pi/6$

$$\dot\theta(t) = -\frac{1}{2\tau} e^{-t/2\tau}\left(A \operatorname{Sen}(\Omega t) + \overset{\pi/6}{B} \operatorname{Cos}(\Omega t)\right) + e^{-t/2\tau}\left(A\Omega \operatorname{Cos}(\Omega t)\right.$$
$$\left. - \overset{\pi/6}{B}\,\Omega \operatorname{Sen}(\Omega t)\right)$$

- $\dot\theta(0) = 0 \rightarrow \quad \frac{1}{-2\tau} \cdot \frac{\pi}{6} + A\Omega = 0$

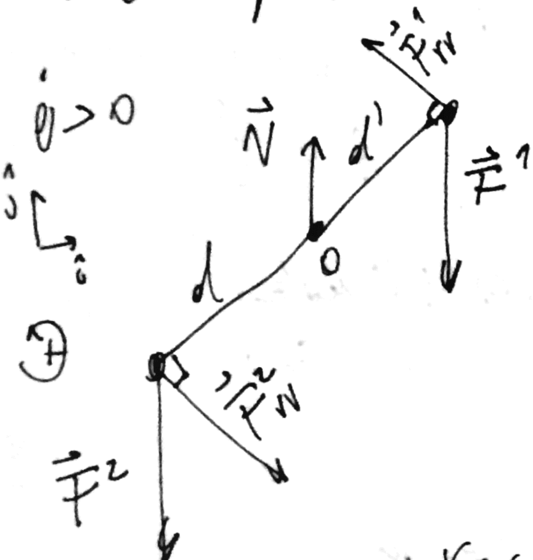
$$\rightarrow A = \frac{\pi}{12\tau\Omega}$$

así, la solución es

$$\theta(t) = e^{-t/2\tau}\left(\frac{\pi}{12\tau\Omega} \operatorname{Sen}(\Omega t) + \frac{\pi}{6} \operatorname{Cos}(\Omega t)\right)$$

notamos que todo lo del DCL es para encontrar ω_0, Ω, y τ.

• hagamos el mismo DCL que antes, pero con los nuevos parametros.



hagamos la ecuación de torque en el pivote O:

$$-I\ddot\theta = qEd\,\mathrm{sen}\,\theta - qEd'\,\mathrm{sen}\,\theta + \underbrace{\gamma d\dot\theta \cdot d}_{\text{torque de } \vec{F}^2_{rv}} + \underbrace{\gamma d'\dot\theta\, d'}_{\text{torque de } \vec{F}^1_{rv}}$$

: recordar que $d\dot\theta$ es la velocidad de la masa de abajo, y $d'\dot\theta$ la de la de arriba.

$$I = md^2 + md'^2 \longrightarrow -(md^2+md'^2)\ddot\theta = qE\,\mathrm{sen}\,\theta\,(d-d') + \gamma\dot\theta\,(d^2+d'^2)$$

$$\to \ddot\theta = -\frac{qE(d-d')}{m(d^2+d'^2)}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\gamma\,\cancel{(d^2+d'^2)}}{m\,\cancel{(d^2+d'^2)}}\,\dot\theta$$

$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta \to$ $$\boxed{\ddot\theta + \frac{\gamma}{m}\dot\theta + \frac{qE}{m}\frac{(d-d')}{(d^2+d'^2)}\theta = 0}$$

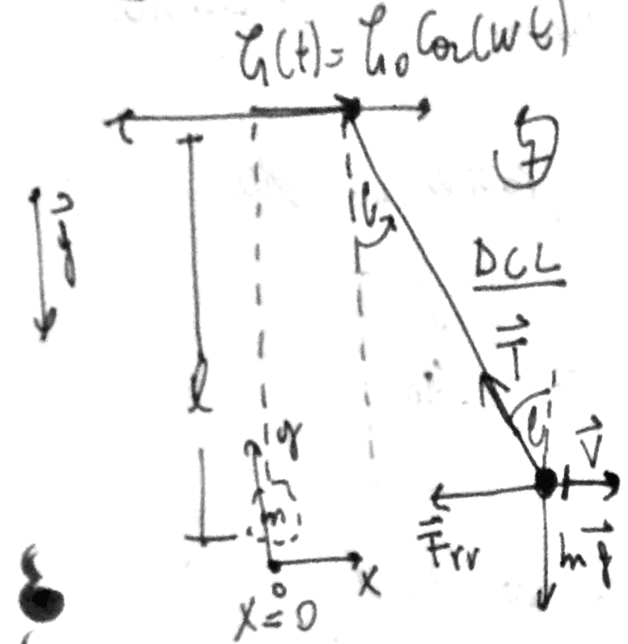
Todo salió OK.

$\boxed{\text{Con } d-d'>0 \text{, es un oscilador}}$

es un oscilador amortiguado con $\omega_0^2 = \frac{qE}{m}\left(\frac{d-d'}{d^2+d'^2}\right)$, y $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}$. La frecuencia de oscilación entonces es

$$\Omega^2 = \underbrace{\frac{qE}{m}\left(\frac{d-d'}{d^2+d'^2}\right)}_{\omega_0^2} - \underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2}}_{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2},$$

P1



→ Consideraciones usadas:

- $\theta \ll 1$
  - → $\cos\theta \sim 1$ → no hay aceleración vertical
  - → $\sin\theta \sim \theta$
  - → $\vec V$ es horizontal
    - → $\vec F_{rv} = -\gamma \vec V$ es horizontal

ec. de movimiento:

y] $T\cos\theta - mg = 0$

→ $T = mg$

$\cos\theta \sim 1$

x] $-T\sin\theta - \gamma\dot x = m\ddot x$

→ es importante reconocer la posición de equilibrio

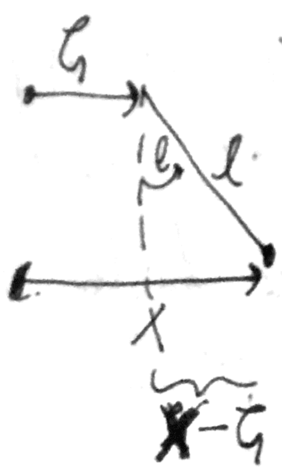
→ esta es otra manera de derivar la ecuación. es más útil usar la ecuación de torque

$T = mg$ →

$$\boxed{\ddot x + \frac{\gamma}{m}\dot x + g\sin\theta = 0}$$

¿dónde está el forzamiento?

¡En el sen θ! $\sin\theta = \frac{x-\zeta}{l}$



$$\to \ddot x + \frac{\gamma}{m}\dot x + \frac{g}{l}x - \frac{\zeta g}{l} = 0$$

$$\boxed{\to \ddot x + \frac{\gamma}{m}\dot x + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}\zeta(t) = \frac{g}{l}\zeta_0\cos(\omega t)}$$

~~[illegible]~~

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{\frac{1}{\tau}}\dot{x} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2}\xi_0 \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow x(t) = \overbrace{A e^{-t/2\tau}\cos(\Omega_0 t + \varphi_0)}^{X_T} + \overbrace{B(\omega)\cos(\omega t + \delta)}^{X_e}$$

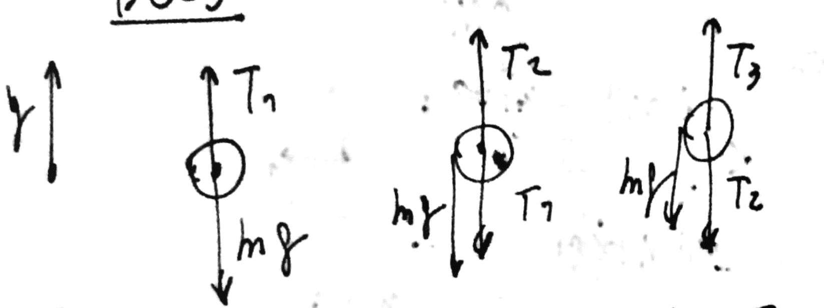
$$B(\omega) = \frac{\xi_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}, \quad \delta = tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)$$

→ IMPORTANTE: X_T depende de las condiciones iniciales

X_e NO

P3| Asumimos T constante en cada cuerda. Sabemos que $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, con ρ la densidad de la cuerda. así, nuestra tarea es encontrar la tensión de cada cuerda. hagamos el DCL de cada masa

DCLs



en estática, la fuerza neta es nula para cada masa

$T_1 - mg = 0$ $\quad T_2 - mg - T_1 = 0$ $\quad T_3 - T_2 - mg = 0$

$\to T_1 = mg$ $\quad \to T_2 = mg + T_1 = 2mg$ $\quad \to T_3 = T_2 + mg = 3mg$

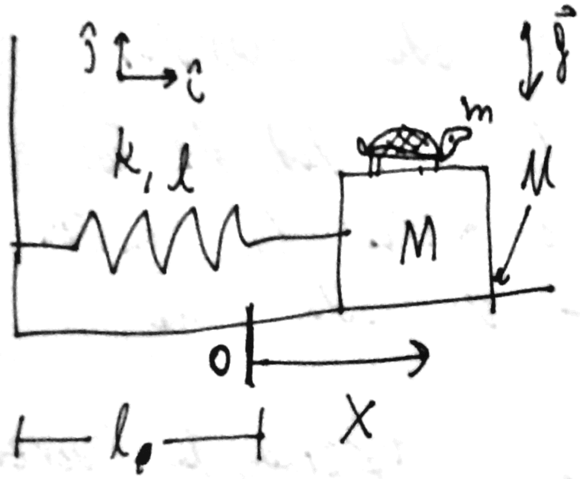
así, el tiempo de viaje es

$$t_v = \frac{L}{c_1} + \frac{L}{c_2} + \frac{L}{c_3} = L\left(\sqrt{\frac{\rho}{T_1}} + \sqrt{\frac{\rho}{T_2}} + \sqrt{\frac{\rho}{T_3}}\right)$$

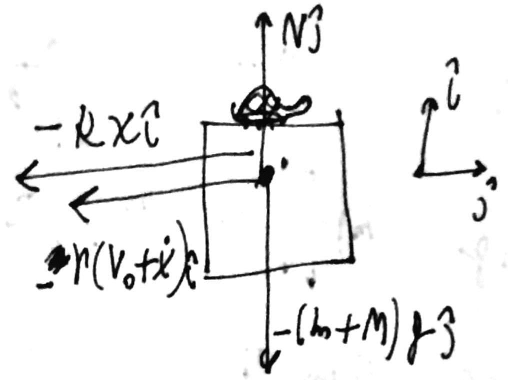
$$= L\sqrt{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{mg}} + \frac{1}{\sqrt{2mg}} + \frac{1}{\sqrt{3mg}}\right) = L\sqrt{\frac{\rho}{mg}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

P4| La fuerza de roce viscoso depende de la velocidad del sistema respecto al aire. Si el aire corre a velocidad V_0 a la izquierda, y el sistema se mueve a velocidad $\dot{x}$ a la derecha, entonces la velocidad del sistema respecto al aire es $\dot{x} - (-V_0) = \dot{x} + V_0$

$\to \vec{F}_{rv} = -\gamma(\dot{x} + V_0)\hat{i}$ (ver dibujo)



- Como la tortuga y la masa se mueven juntas, entonces hagamos el dcl de tortuga y bloque: (con $\dot{x}>0$) (y $x>0$)



Y) $N\hat{j} - (m+M)g\hat{j} = 0$

$\to N = (m+M)g$

X) $-kx\hat{i} - \gamma(V_0+\dot{x})\hat{i} = (m+M)\ddot{x}\,\hat{i}$

$$\to \ddot{x} = -\frac{k}{M+m}x - \frac{\gamma(V_0+\dot{x})}{M+m} = -\frac{k}{M+m}x - \frac{\gamma V_0}{M+m} - \frac{\gamma}{M+m}\dot{x}$$

me sobra, dejando cuadradito

$$\to \boxed{\ddot{x} + \frac{\gamma}{M+m}\dot{x} + \frac{k}{M+m}x = \frac{-\gamma V_0}{M+m}} \quad (R)$$

en equilibrio, $\ddot{x}_{eq} = \dot{x}_{eq} = 0 \to x_{eq}\cdot\frac{k}{M+m} = \frac{-\gamma V_0}{M+m} \to \boxed{x_{eq} = \frac{-\gamma V_0}{k}}$

→ encontramos el nuevo equilibrio. Como el sistema es un oscilador, este oscilará entorno a x_{eq}. Conviene entonces hacer un cambio de variables que mide la desviación de este equilibrio: definimos

$$\bar{x} = +x - x_{eq} \to \quad \dot{\bar{x}} = \dot{x}, \quad \ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$$

haciendo el cambio de variables en (R)

$$\ddot{\bar{X}} + \frac{\Gamma}{m+M}\dot{\bar{X}} + \frac{K}{M+m}\left(\bar{X} + X_{ef}\right) = -\frac{\Gamma V_0}{m+M}$$

$$\to \ddot{\bar{X}} + \frac{\Gamma}{M+m}\dot{\bar{X}} + \frac{K}{M+m}\bar{X} + \cancel{\frac{K}{M+m}\underbrace{\left(-\frac{\Gamma V_0}{K}\right)}_{X_{ef}}} = \cancel{\left(-\frac{\Gamma V_0}{m+M}\right)}$$

$$\boxed{\to \ddot{\bar{X}} + \frac{\Gamma}{M+m}\dot{\bar{X}} + \frac{K}{M+m}\bar{X} = 0}$$

ecuación de un oscilador amortiguado (esto siempre funciona para eliminar constantes!)

~~la solución a esto es~~ ~~con $\omega_0^2 = K/(M+m)$, $\frac{1}{\tau} = \frac{\Gamma}{m+M}$, $\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$~~

$\cancel{\bar{X}(t)} =$

identificamos los parámetros: $\omega_0^2 = K/(M+m)$, $\frac{1}{\tau} = \frac{\Gamma}{m+M}$

el sistema oscilará con frecuencia Ω, con $\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$

$= \frac{K}{M+m} - \frac{\Gamma^2}{4(m+M)^2} = \frac{4K(M+m) - \Gamma^2}{4(m+M)^2}$. este resultado solo tiene sentido

si $4(m+M)K - \Gamma^2 > 0$, esto tiene sentido. de caso contrario, tenemos que $\Gamma^2 \geq 4(m+M)K$, es decir, el sistema está demasiado amortiguado; este no alcanzará a oscilar.

- Si ahora la velocidad es $V(t) = V_0\left(1 + \sin(\omega t)/10\right)$, reemplazamos V_0 por $V(t)$ en (∗):

$$\ddot{x} + \frac{\Gamma}{m+M}\dot{x} + \frac{K}{M+m}x = -\frac{\Gamma}{M+m}\overbrace{V_0\left(1 + \sin(\omega t)/10\right)}^{V(t)}$$

$$= -\frac{\Gamma}{M+m}V_0 - \frac{\Gamma V_0}{M+m}\sin(\omega t)/10$$

+ tenemos con $-\frac{rV_0}{m+M}$ molestando. el mismo cambio que antes debe funcionar:

$$\bar{X} = X - X_{ef} \rightarrow \boxed{\ddot{\bar{X}} + \frac{r}{M+m}\dot{\bar{X}} + \frac{K}{M+m}\bar{X} = \frac{pV_0 \operatorname{Sen}(wt)}{M+m}}$$ Oscilador forzado y amortiguado

La solución es conocida:

$$\bar{X}(t) = e^{\frac{-t}{2\tau}}\left(A \operatorname{Cos}(\Omega t) + D \operatorname{Sen}(\Omega t)\right) + B(w)\operatorname{Sen}(wt + \delta)$$

con $\Omega^2 = w_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$, $w_0^2 = \frac{K}{M+m}$, $\frac{1}{\tau} = \frac{r}{M+m}$, $B(w_0) = \frac{F_0}{\sqrt{(w^2-w_0^2)^2 + \left(\frac{w}{\tau}\right)^2}}$,

y $F_0 = \frac{-V_0 r}{M+m}$, y $\delta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{w}{\tau(w_0^2 - w^2)}\right)$. como $\bar{X} = X - X_{ef}$,

$$X(t) = e^{-t/2\tau}\left(A \operatorname{Cos}(\Omega t) + D \operatorname{Sen}(\Omega t)\right) + B(w)\operatorname{Sen}(wt+\delta) \underbrace{- \frac{rV_0}{M+m}}_{X_{ef}}$$

Condiciones iniciales: $\boxed{\begin{array}{l} X(0) = 0 \\ \dot{X}(0) = 0 \end{array}}$

$X(0) = 0 \rightarrow X(0) = A + B(w)\operatorname{Sen}(\delta)$ $\cancel{A - B(w)\operatorname{Sen}(\delta)}$

$$-\frac{rV_0}{M+m} = 0 \rightarrow A = -B(w)\operatorname{Sen}(\delta) + \frac{rV_0}{M+m}$$

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{2\tau}e^{-t/2\tau}\left(A \operatorname{Cos}(\Omega t) + D \operatorname{Sen}(\Omega t)\right) + e^{-t/2\tau}\left(-A\Omega \operatorname{Sen}(\Omega t) + D\Omega \operatorname{Cos}(\Omega t)\right)$$

$$+ B(w)\cdot w \operatorname{Cos}(wt + \delta),$$ evaluando en $t = 0$,

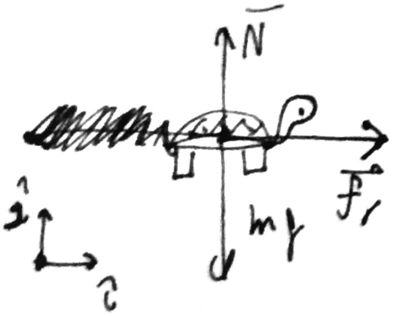
$$\dot{X}(0) = -\frac{1}{2\tau}\cdot A + D\Omega + B(w)w\operatorname{Cos}(\delta) = 0$$

$$\rightarrow D = \left(\frac{A}{2\tau} - B(w)w\operatorname{Cos}(\delta)\right)\Big/\Omega = \frac{\left[\frac{rV_0}{m+M} - B(w)\operatorname{Sen}(\delta)\right]}{2\tau\Omega} - \frac{B(w)w\operatorname{Cos}(\delta)}{\Omega}$$

w/ la solución es

$$x(t) = e^{-t/2T}\left(\left(\frac{\Gamma V_0}{m+M} - B(W)\operatorname{Sen}\delta\right)\cos(\Omega t) + \frac{B(W)}{\Omega}\left(\frac{\Gamma V_0}{(m+M)B(W)} - \operatorname{Sen}(\delta) - W\cos(\delta)\right)\operatorname{Sen}(\Omega t)\right) + B(W)\operatorname{Sen}(Wt+\delta) + \frac{\Gamma V_0}{M+m}$$

- Sabemos que la fuerza de roce que hace el bloque sobre la tortuga no puede superar $\mu \bar{N}$, con $\bar{N}$ la normal sobre la tortuga. Hagamos el DCL de la tortuga: (con $x, \dot{x} > 0$). Supondremos a la tortuga como un objeto perfectamente aerodinámico (coef. de roce viscoso nulo) (debí haber puesto esto en el enunciado)



→ F_r hace que la tortuga se mueva con el bloque:

$\hat{j}] \to N = mg$ $\qquad$ $\hat{x}] \to f_r = ma$

Como la tortuga se mueve con el bloque, $a = \ddot{x}$

- Despreciamos la fase transiente de $x(t)$ (también lo debo poner en el enunciado). En resonancia, $W = W_0$

→ $B(W_0) = \dfrac{F_0}{\sqrt{(W_0^2 - W_0^2)^2 + \frac{W_0^2}{T^2}}} = \dfrac{F_0 T}{W_0} = -\dfrac{V_0\Gamma}{m+M}\cdot\dfrac{m+M}{\Gamma}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = -V_0\sqrt{\dfrac{m+M}{K}}$

→ $\delta = \tan^{-1}\left(\dfrac{W}{T(W_0^2 - W^2)}\right)$, δ "$=$" "$\tan^{-1}(\infty)$" $\to \delta = \pi/2$

$$\rightarrow x(t) = -V_0\sqrt{\frac{m+M}{K}}\,\text{Sen}\left(w_0 t + \pi/2\right) = -V_0\sqrt{\frac{m+M}{K}}\,\text{Cos}\left(w_0 t\right)$$

(hicimos esto para encontrar $\ddot{x}$)

$$\rightarrow \ddot{x}(t) = V_0\sqrt{\frac{m+M}{K}}\,w_0^2\,\text{Cos}(w_0 t) = V_0\sqrt{\frac{m+M}{K}}\frac{K}{m+M}\,\text{Cos}\left(\sqrt{\frac{K}{m+M}}\,t\right) = V_0\sqrt{\frac{K}{m+M}}\,\text{Cos}\left(\sqrt{\frac{K}{m+M}}\,t\right)$$

$$\rightarrow f_r = m\ddot{x} = mV_0\sqrt{\frac{K}{m+M}}\,\text{Cos}\left(\sqrt{\frac{K}{m+M}}\,t\right) \leq \mu N = \mu m g$$

roce estático

Como es para todo t, pedimos

$$mV_0\sqrt{\frac{K}{m+M}} \leq \mu m g \rightarrow V_0 \leq \frac{\mu m g}{m}\cdot\sqrt{\frac{m+M}{K}} = \mu g\sqrt{\frac{m+M}{K}}$$