Recordemos la ecuación de onda

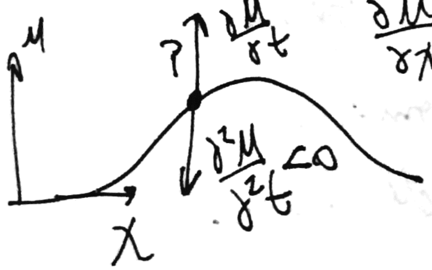
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

→ u no solo representa la deformación de una cuerda, sino que cualquier tipo de perturbación con una fuerza restitutiva.

* Cuerda → Tensión y altura

$\text{Varilla} \longrightarrow \underbrace{\text{Torsión}}_{F \text{ restitutiva}}$ y $\underbrace{\text{ángulo}}_{u(x,t)}$

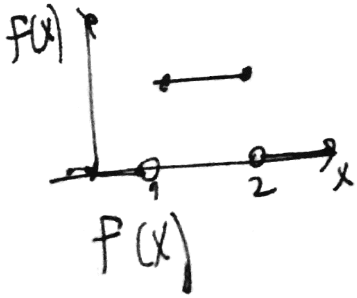
→ interpretación: la "aceleración" de la deformación es proporcional al grado de concavidad del objeto en estudio, No confundir con la velocidad/aceleración de la onda en sí



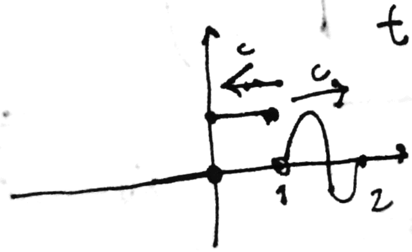
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$ → cuando es cóncava hacia abajo, la fuerza restitutiva hace que u disminuya

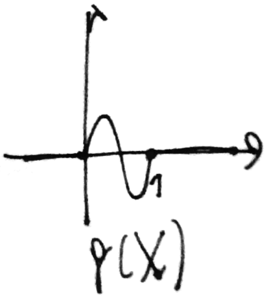
→ es como si p fuera un oscilador, y la cuerda muchos osciladores acoplados

→ la solución de la ecuación se presenta en dos "formas", que viajan a la misma velocidad pero en sentido contrario



$t = \frac{1}{c}$





$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

P1 $\qquad f(x) = e^{-(x+x_0)^2} \;;\; g(x) = e^{-(x-x_0)^2}$

→ Tensión T y densidad μ en una cuerda → $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, válido siempre en las cuerdas.

↑ Velocidad

• Nota: $h(x-x_0)$ es $h(x)$ trasladado en x_0 a la derecha.
Importante

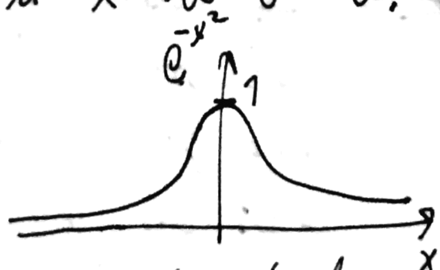
Como $f(x)$ va a la derecha, y g hacia la izquierda, tenemos que

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$= e^{-(x+x_0-ct)^2} + e^{-(x-x_0+ct)^2}$$

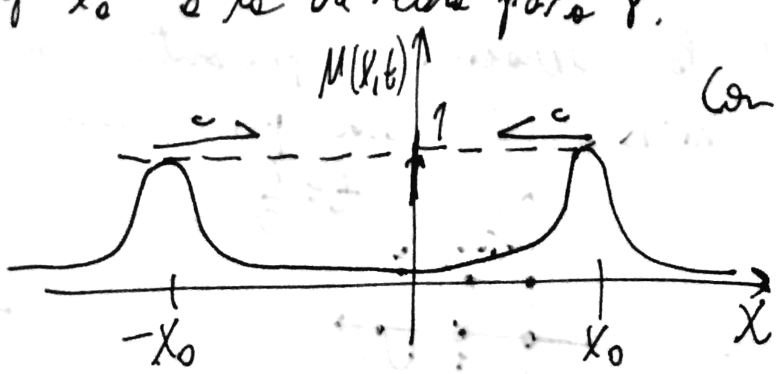
• Describe altura del punto x en tiempo t

Para dibujar, pensemos en e^{-x^2}. Su derivada se anula en $x=0$, y $e^{-x^2} \to 0$ si $x \to \infty$ o $-\infty$. Así, tenemos



Campana de Gauss

→ Con $t=0$, basta con trasladar en x_0 a la izquierda para f, y x_0 a la derecha para g:



Con $t=0$

• Como V_i a Van a velocidad c, y se encuentran en su punto medio $x=0$, y empiezan en $-x_0$ y x_0 resp., tenemos que

$x_0 = c\bar{t}$ ← tiempo de encuentro

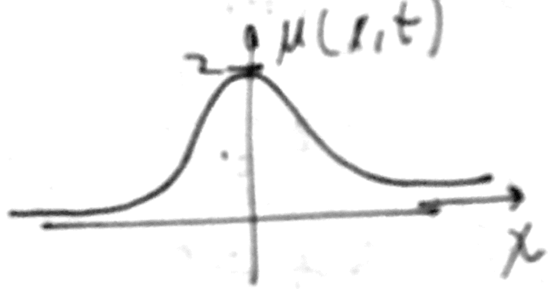
↖ distancia a recorrer

$\rightarrow \bar{t} = \frac{x_0}{c}$

reemplazando

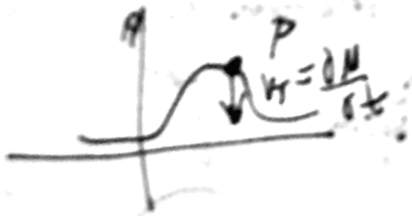
$$u(x,\bar{t}) = e^{-\left(x+x_0-c\frac{x_0}{c}\right)^2} + e^{-\left(x-x_0+c\frac{x_0}{c}\right)^2}$$

$$= e^{-x^2} + e^{-x^2} = 2e^{-x^2}$$



• La velocidad transversal de un punto dado es el cambio de la altura de la cuerda

$$V_T = \frac{\partial u}{\partial t}$$



entonces, $$V_T(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -2(x+x_0-ct)\cdot(-c)\, e^{-(x+x_0-ct)^2} - 2(x-x_0+ct)\cdot c\, e^{-(x-x_0+ct)^2}$$

$$= 2c\left[(x+x_0-ct)\, e^{-(x+x_0-ct)^2} - (x-x_0+ct)\, e^{-(x-x_0+ct)^2}\right.$$

con $t=0$

$$V_T(x,0) = 2c\left[(x+x_0)e^{-(x+x_0)^2} - (x-x_0)e^{-(x-x_0)^2}\right]$$

Sabemos que $(x+x_0)e^{-(x+x_0)^2}$ es xe^{-x^2} trasladado x_0 a la izquierda. estudiamos la segunda:

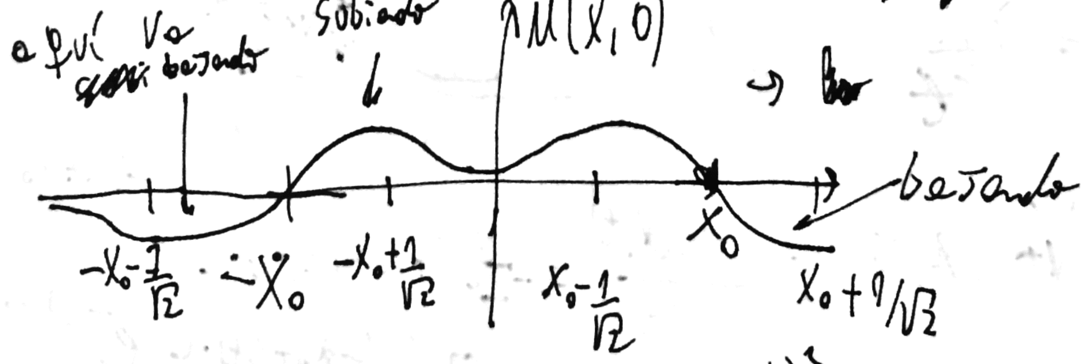
→ derivada: $e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$. Se anula en $1=2x^2 \to x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

→ 2da derivada: $(e^{-x^2}(1-2x^2))' = -4x\cdot e^{-x^2} + (-2x)(1-2x^2)e^{-x^2}$

$= e^{-x^2}(-4x-2x(1-2x^2)) = e^{-x^2}(-6x+4x^3)$

$= 2xe^{-x^2}(2x^2-3)$. Con $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, es $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-1/4}(\frac{2}{2}-3)<0$,
y con $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, es $-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-1/2}(\frac{2}{2}-3)>0$

→ xe^{-x^2} se anula en $x=0$. así, el dibujo a todo pero desplazado x_0 a la izquierda,



→ el dibujo de $-(x-x_0)e^{-(x-x_0)^2}$ es lo mismo pero en x_0 a la derecha e invertido.

Con $t=\bar{t}$, tenemos que

$$V_T(x,\bar{t}) = 2c\left[xe^{-x^2} - xe^{-x^2}\right] = 0$$

→ Por lo que es 0 en todos los puntos.

→ Se alcanza un máximo local en todos los puntos.

P2) • Como ambos pulsos viajan en la misma cuerda, sabemos que deben viajar a la misma velocidad, y cumplen que

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \underset{\text{Velocidad}}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

así, podemos obtener c derivando

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -ak^2 \operatorname{sen}(lx+kt), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -al^2 \operatorname{sen}(lx+kt)$$

ec. de onda → $+\cancel{a}k^2 \cancel{\operatorname{sen}(lx+kt)} = +c^2\cancel{a}l^2 \cancel{\operatorname{sen}(lx+kt)}$

$$\rightarrow c^2 = \left(\frac{k}{l}\right)^2 \rightarrow \boxed{c = \frac{k}{l}}$$

• Para que una onda $\text{Sen}(\ell_1)$ no cambie su forma, se debe sumar 2π a su argumento;

$$\text{Sen}(\ell_1) = \text{Sen}(2\pi + \ell_1)$$

así, el periodo es cuanto debe cambiar t para que el argumento del seno sea 2π mayor que con el tiempo inicial t.

i.e. : $\cancel{t = t}$ $\quad \cancel{t = t + T}$

$\cancel{A(x) = a\,\text{Sen}(lx + kt)}$, $\quad \cancel{A(x) = a\,\text{Sen}(lx + k(t+T) + 2\pi)}$

$$a\,\text{Sen}(lx + kt + 2\pi) = a\,\text{Sen}(lx + k(t+T)) = A(x, t+T)$$

→ Sumar T a t debe ser equivalente con sumar 2π al argumento (así, seno no cambia)

$$\rightarrow T = 2\pi/k$$

y de forma similar, $\lambda = 2\pi/l$

Se tiene que $c = \dfrac{k}{l} = \dfrac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \boxed{\dfrac{\lambda}{T}}$

Cambiando las l y k's por $\frac{2\pi}{\lambda}$ y $\frac{2\pi}{T}$, obtenemos

$$u(x,t) = a\,\text{Sen}\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right) + b\,\text{Sin}\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

si $a = b$, entonces

$$u(x,t) = a\left(\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \operatorname{Sen}\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)\right)$$

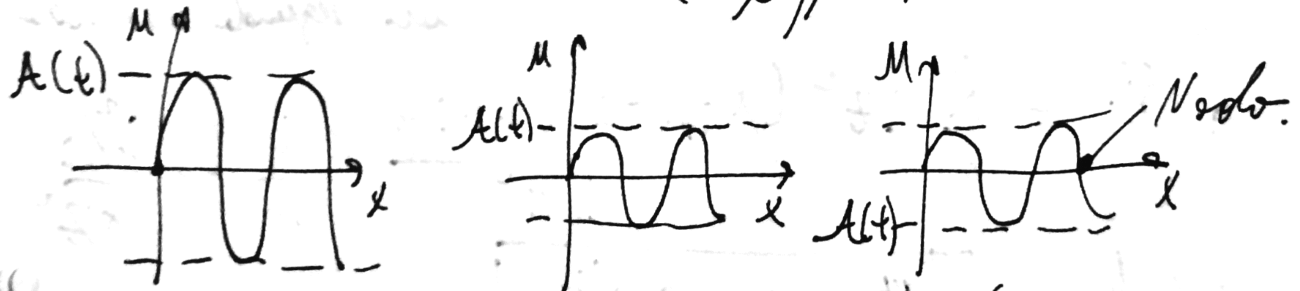
en $x = 0$,

$$u(0,t) = a\left(\operatorname{Sen}\left(\frac{t}{T}\right) - \operatorname{Sen}\frac{t}{T}\right) = 0$$, se cancelan

Suma de senos: $\operatorname{Sen}\alpha + \operatorname{Sen}\beta = 2\operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

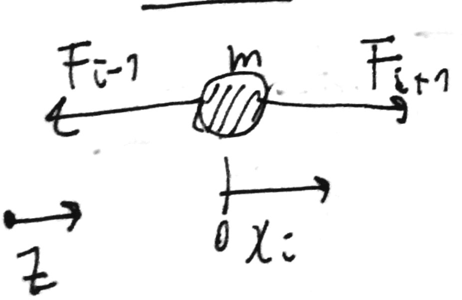
así, obtenemos $u(x,t) = \underbrace{2a\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}_{\text{llamemosla } A(t)}\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

tenemos que $A(t)$ es la amplitud de $u(x,t)$, solamente modula $\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, este no se traslada



→ esto es una onda estacionaria

P3) DCL



→ Truco general: estudiemos F_{i+1}

→ si x_i aumenta, el resorte se comprime [x_i contribuye a la compresión]

→ si x_{i+1} aumenta, el resorte se descomprime [x_{i+1} contribuye a la de descompresión]

→ así, la ~~compresión~~ del resorte es $X_i - X_{i+1}$..
ahora, si el resorte está comprimido, entonces la masa m será empujada en dirección negativa

• así, $\vec{F}_{i+1} = -k(X_i - X_{i+1})\hat{i}$

la compresión empuja hacia atrás

de igual manera, obtenemos

$$\vec{F}_{i-1} = k(X_{i-1} - X_i)\hat{i}$$

así, tenemos que $m\ddot{X}_i = k(X_{i-1} - X_i) - k(X_i - X_{i+1})$

$$= k(\underbrace{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}_{\text{casi segunda derivada}})$$

$$\to \ddot{X}_i = \frac{k}{m}\Delta z^2 \frac{(X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1})}{\Delta z^2} \cong \frac{k}{m}\Delta z^2 \frac{\partial^2 X_i}{\partial z^2}$$

X_j es la deformación, al igual que u → $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{m}\Delta z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$

P4| ~~tenemos que $Nk = \frac{K}{}$, $\Delta z = \frac{L}{N}$, y $m = \frac{M_T}{N}$~~

→ ~~$\frac{\partial u^2}{\partial z^2} = \frac{kN \cdot \frac{L^2}{N^2}}{M_T/N}$~~

[P4] tenemos que $k = NK$, $m = \frac{M_T}{N}$, $\Delta z = \frac{L}{N}$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{(NK)\left(\frac{L}{N}\right)^2}{\frac{M_T}{N}} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M_T} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

ahora, como $k = M\frac{A}{L}$, tenemos que

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{MAL}{M_T} \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} \qquad \rho = \frac{M_T}{AL \leftarrow \text{Volumen}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{M}{\rho} \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}}$$

tenemos que $c = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \rightarrow C_{Grava} = \sqrt{\frac{M}{\rho_G}}$, y $C_{Arena} = \sqrt{\frac{M}{\rho_A}}$

así, tenemos que $\bar{x} = C_G \cdot t_1$ y $X_0 - \bar{X} = C_A \cdot t_2$, donde el tiempo de viaje es $t_1 + t_2 = t_V$

$$\rightarrow t_V = \bar{X}\sqrt{\frac{\rho_G}{M}} + (X_0 - \bar{X})\sqrt{\frac{\rho_A}{M}} = \frac{1}{\sqrt{M}}\left(\bar{X}\sqrt{\rho_G} + (X - \bar{X})\sqrt{\rho_A}\right)$$

tenemos que $\rho_G > \rho_A \rightarrow C_G < C_A$. Siempre se ha dicho que mientras nos demos en un terreno, más rapido viaja
$\rightarrow$ Nuestro error se debe a asumir M constante. La arena es significativamente menos rigida que otros materiales
$\rightarrow$ Para el aire y el ~~[illegible]~~ helio, este modelo sería correcto ($M_A \sim M_H$)