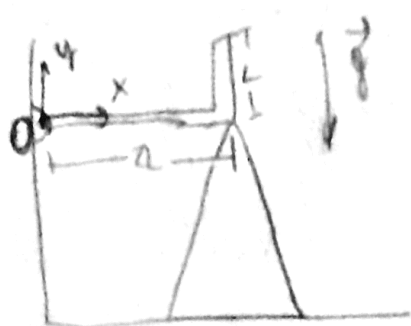


P2

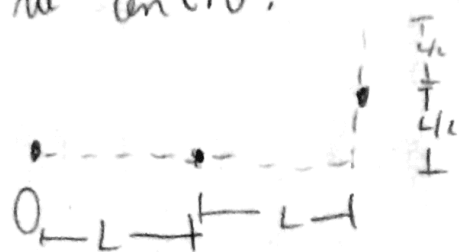


• Centro de masas:

→ pongamos el origen en el plate, coordenada cartesianas

→ Como su densidad ρ es uniforme,

entonces el C.M. de cada parte de la L esté en su centro.

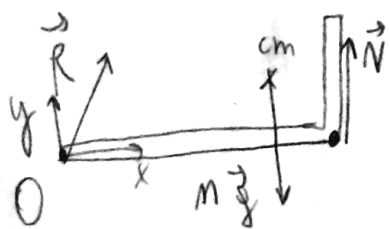


→ Recordar: el C.M. de un sistema es la ponderación de los C.M. de sus sub-sistemas ponderados por sus masas.

→ C.M. de la de longitud $2L$ es $\begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$, y del de L longitud L es $\begin{bmatrix} 2L \\ L/2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \vec{X}_{cm} = \frac{\begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot 2L + \begin{bmatrix} 2L \\ L/2 \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot L}{\rho \cdot 2L + \rho \cdot L} = \frac{\begin{bmatrix} 2L + 2L \\ L/2 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} 4L/3 \\ L/6 \end{bmatrix}$$

• DCL barra estática → Cuáles solo hacen fuerza verticales.



→ el peso se ejerce sobre el centro de masas.

estática: $\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{\tau} = 0$

⊕

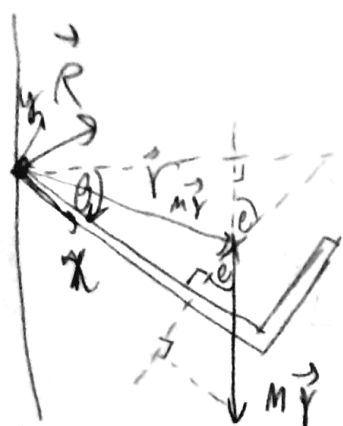
$$\rightarrow \vec{\tau}_R = 0, \vec{\tau}_{mg} = -mg \cdot \frac{4L}{3} \hat{k}, \vec{\tau}_N = +N \cdot 2L \hat{k}$$

X de C.M.

$$\rightarrow -\frac{4mgL}{3} \hat{k} + 2LN \hat{k} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{N} = \frac{2mg}{3} \hat{k}}$$

c) DCL barra en mov.

$$\vec{r}_R = 0, \quad \vec{r}_{Mg} = \underbrace{\vec{r}_{cm}}_{\text{com}} \times \vec{Mg}$$



$$= \left(\frac{4L}{3} \hat{i} + \frac{L}{6} \hat{j} \right) \times (Mg \sin \theta \hat{i} - Mg \cos \theta \hat{j})$$

$$= -\frac{4L}{3} Mg \cos \theta (\hat{i} \times \hat{j}) + \frac{L}{6} Mg \sin \theta \hat{j} \times \hat{i}$$

$$= \frac{4L}{3} Mg \cos \theta \hat{k} + \frac{L}{6} Mg \sin \theta \hat{k}$$

$$= LMg \left(\frac{4 \cos \theta}{3} + \frac{\sin \theta}{6} \right) \hat{k}$$

(+)

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$



Para sist.
invertido

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}_{neto} \rightarrow I_0 \alpha \hat{k} = LMg \left(\frac{4 \cos \theta}{3} + \frac{\sin \theta}{6} \right) \hat{k}$$

$\dot{\vec{L}}$ apunta hacia fuera de la hoja debido a la orientación elegida

→ Busquemos I_0 , tenemos 2 barras, sabemos que el momento de una barra de masa m y largo R en torno a un extremo es $\frac{mR^2}{3}$, y a su centro de masa es $\frac{mR^2}{12}$.

→ I es una propiedad aditiva: el fijar el eje y considerar varios sistemas, el momento neto es la suma de los momentos.

→ busquemos I para cada parte de la L .

→ el I de la barra de largo $2L$ es $I_1 = \frac{\rho \cdot 2L \cdot (2L)^3}{12}$

→ el I de la barra de largo L es I_2 es, por Steiner, $I_2 = I_{2cm} + \rho \cdot L \cdot d^2$

inercia I a centro de masa = $\frac{\rho L \cdot L^3}{12}$



→ $d^2 = \left\| \begin{bmatrix} 2L \\ L/2 \end{bmatrix} \right\|^2 = 4L^2 + \frac{L^2}{4} = \frac{17L^2}{4}$

→ $I_2 = \frac{\rho L^3}{12} + \rho L \cdot \frac{17L^2}{4} = \rho L^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{17}{4} \right) = \rho L^3 \frac{52}{12} = \frac{13\rho L^3}{3}$

así, $I_0 = I_1 + I_2 = \frac{8\rho L^3}{3} + \frac{13\rho L^3}{3} = \frac{21\rho L^3}{3} = 7\rho L^3$

∴ $7\rho L^3 \alpha = k \cdot 3\rho k \cdot r \left(\frac{9\cos\theta}{3} - \frac{\cos\theta}{6} \right)$

→ $\alpha = \frac{38}{7L} \left(\frac{9\cos\theta}{3} - \frac{\cos\theta}{6} \right) = \frac{1}{7L} \left(9\cos\theta + \frac{8\cos\theta}{2} \right)$

• necesitamos información sobre $\vec{R}$, hacer otra ecuación de torque C/R e otro punto claramente no sirve. Usamos la ec. de movimiento lineal.

→ Para hacer más fácil el trabajo, descomponemos $\vec{R}$ en sus componentes: $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$

o/ $\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}_{cm}$ + Nunca olvidar la presencia de la aceleración tangencial y centrípeta.

→ o/ $a_{cent} = \omega^2 \|\vec{x}_{cm}\| = \omega^2 d$, y $a_{tan} = \|\dot{\vec{x}}_{cm}\| \cdot d = d\dot{\omega}$

→ $\vec{a}_T = a_T \sin \ell \hat{i} - a_T \cos \ell \hat{j}$

$\vec{a}_c = -a_c \cos \ell \hat{i} - a_c \sin \ell \hat{j}$

→ $\vec{a}_{cm} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$

∴ $\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M g \sin \ell \\ -M g \cos \ell \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} d\dot{\omega} \sin \ell - \omega^2 d \cos \ell \\ -d\dot{\omega} \cos \ell - \omega^2 d \sin \ell \end{bmatrix}$

→ $R_x = M d \dot{\omega} \sin \ell - M \omega^2 d \cos \ell - M g \sin \ell$

→ $R_y = -M d \dot{\omega} \cos \ell - M \omega^2 d \sin \ell + M g \cos \ell$

pero $\sin \ell = \frac{\vec{x}_{cm} \cdot \hat{j}}{\|\vec{x}_{cm}\|} \xrightarrow{\text{comp. vert. col.}} \frac{L/b}{d}$

$\cos \ell = \frac{\vec{x}_{cm} \cdot \hat{i}}{\|\vec{x}_{cm}\|} = \frac{qL}{3 \cdot d} \quad / \quad M = 3PL$

→ $R_x = (3PL) \cdot d \cdot \left(\frac{L}{3d}\right) - (3PL) \cdot \omega^2 \cdot d \cdot \left(\frac{qL}{3d}\right) - 3PL g \sin \ell$
 $= \frac{PL^2}{2} - 4PL^2 \omega^2 - 3PL g \sin \ell$

radio
de g.15

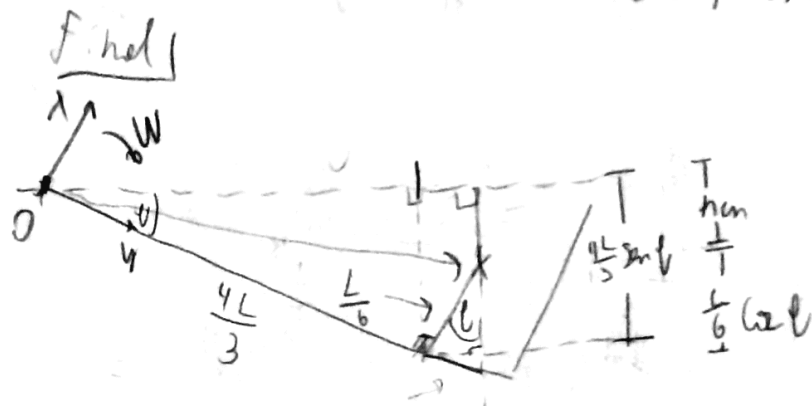
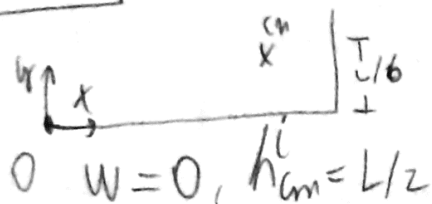


$$\rightarrow R_y = -(PL) \frac{d}{dx} \left(\frac{yL}{3d} \right) - (PL) \cdot \omega^2 d \left(\frac{L}{6d} \right) + M_y \cos \theta$$

$$= -PL^2 \frac{d}{dx} - \frac{\omega^2 PL^2}{2} + 3PL \sin \theta$$

→ Conocer todo sobre ω . Sobre $\omega(\theta)$ en todo punto de tiempo, con una d variable. Usar entonces ENERGIA

→ momento cuando desaparece el pivote V/S momento cualquier inicial



$$E_i = Mgh_{cm} = PL \sin \theta \cdot \frac{L}{6}$$

$$= \frac{PL^2 \sin \theta}{2}$$

$$E_f = Mgh_{cm} + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$= 3PL \sin \theta \left(-\frac{L}{3} \sin \theta + \frac{L}{6} \cos \theta \right) + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

Conservación $\rightarrow \frac{PL^2 \sin \theta}{2} = 3PL \sin \theta \left(-\frac{L}{3} \sin \theta + \frac{L}{6} \cos \theta \right) + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

$$\rightarrow PL \sin \theta \left(\frac{L}{2} - 3 \left(\frac{L}{3} \sin \theta + \frac{L}{6} \cos \theta \right) \right) = \omega^2$$

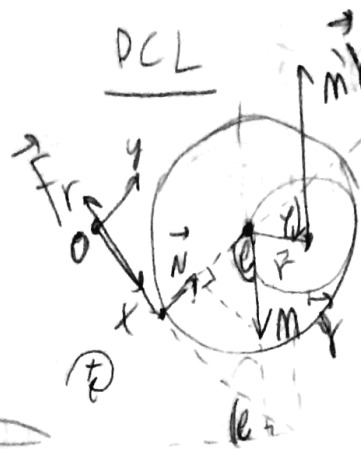
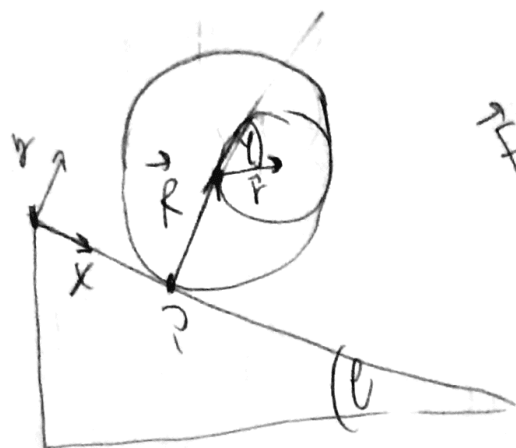
$$\frac{1}{2} I_0 \leftarrow 7PL \sin \theta$$

$$\omega^2 = \frac{8 \left(\frac{1}{2} + 9 \sin \theta - \frac{\cos \theta}{2} \right)}{\frac{1}{2} \cdot 7L} = \frac{8(1 + 8 \sin \theta - \cos \theta)}{7L}$$

$$\therefore R_x = \frac{1}{14} PL (3 \cos \theta - 16 \sin \theta - 7)$$

$$R_y = \frac{1}{28} PL (12 \cos \theta - 12 \sin \theta - 16)$$

P3



Como la fuerza neta es aditiva vectorialmente, se puede ver la fuerza que ejerce el C.M. como la fuerza

del C.M. del cil. grande menos la del cilindro chico,

→ M es la masa del cil. grande, y M' la del cilindro chico (lo que tendrías si no fuera un hoyo)

→ tenemos que $M = \underbrace{\pi R^2 \cdot L}_{\text{área transversal}} \cdot \underbrace{P}_{\text{longitud}},$ y $M' = \pi (R/2)^2 \cdot L \cdot P.$

→ tenemos que $\vec{g} = \begin{bmatrix} g \sin \theta \\ -g \cos \theta \end{bmatrix}$

→ $\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} g \sin \theta \\ \frac{R}{2} g \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$

→ Para la ecuación de rot. necesitamos I_p

→ buscar el torque de cada fuerza

$$\rightarrow \vec{\tau}_0 = \vec{\tau}_0 = 0$$

$$\rightarrow \vec{\tau}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m' g \sin \theta \\ -m' g \cos \theta \end{bmatrix} = +R m' g \sin \theta \hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{\tau}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R}{2} \sin \theta \\ \frac{R}{2} \cos \theta + R \end{bmatrix}}_{\vec{R} + \vec{r}} \times \begin{bmatrix} m' g \sin \theta \\ -m' g \cos \theta \end{bmatrix} = -R m' g \begin{vmatrix} \frac{\sin \theta}{2} & \frac{\cos \theta + 1}{2} & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

por orientación

$$= -R m' g \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} + \sin \theta \right) \hat{k} = -R m' g \left(\frac{\sin(\theta + \theta)}{2} + \sin \theta \right) \hat{k}$$

or, para que el cilindro este quieto, $\vec{\tau}_p = 0$

$$\rightarrow \vec{\tau}_p = 0 \rightarrow R m' g \sin \theta - R m' g \left(\frac{\sin(\theta + \theta)}{2} + \sin \theta \right) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow \sin \theta - \frac{m'}{n} \left(\frac{\sin(\theta + \theta)}{2} + \sin \theta \right) = 0$$

$$\frac{m'}{n} = \frac{\pi R^2 \cdot L \cdot \rho}{\pi R^2 \cdot L \cdot \rho} = \frac{1}{4} \rightarrow \sin \theta - \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(\theta + \theta)}{2} + \sin \theta \right) = 0 \quad / \cdot 8$$

$$\rightarrow 8 \sin \theta - \sin(\theta + \theta) - 2 \sin \theta = 0 \rightarrow \sin(\theta + \theta) = 6 \sin \theta.$$

entonces, para que exista el θ que buscamos, $6 \sin \theta = \sin(\theta + \theta) \leq 1$

$$\rightarrow \sin \theta \leq 1/6 \rightarrow \boxed{\theta_{\text{crit}} \approx 1/6}$$

$$\rightarrow I_p = I_p^M - I_p^{M'} \leftarrow \text{momento de } M', \text{ el hoyo}$$

← momento de M, sin hoyo

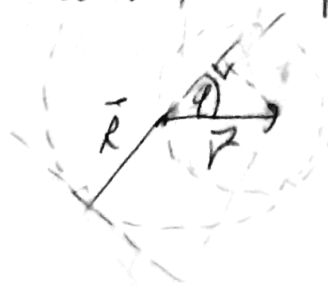
$$I_p = I_{cm}^M + R^2 M + I_{cm}^{M'} + M \|\vec{r} + \vec{R}\|^2$$

← distancia del centro del hoyo a p.

Steiner

$$\vec{r} = \frac{R}{2} \sin \varphi \hat{i} + \frac{R}{2} \cos \varphi \hat{j}$$

$$\vec{R} = R \hat{j}$$



$$\text{entonces } \|\vec{r} + \vec{R}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \sin \varphi \\ \frac{R}{2} \cos \varphi + R \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{R^2}{4} \sin^2 \varphi + \frac{R^2}{4} \cos^2 \varphi + R^2 \cos \varphi + R^2$$

$$= \frac{R^2}{4} + R^2 \cos \varphi + R^2 = R^2 \left(\frac{5}{4} + \cos \varphi \right)$$

$$\rightarrow I_p = \frac{MR^2}{2} + MR^2 + \frac{M'(R/2)^2}{2} + MR^2 \left(\frac{5}{4} + \cos \varphi \right)$$

$$= MR^2 \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{M'}{M} \frac{1}{8} + \frac{5}{4} + \cos \varphi \right) = MR^2 \left(\frac{11}{4} + \frac{M'}{M} \frac{1}{8} + \cos \varphi \right)$$

$$\frac{M'}{M} = \frac{\pi R^2/4 \rho}{\pi R^2 \rho} = \frac{1}{4} \rightarrow I_p = MR^2 \left(\frac{11}{4} + \frac{1}{32} + \cos \varphi \right) = MR^2 \left(\frac{89}{32} + \cos \varphi \right)$$

→ ahora hay que usar la ec. de torques, $\vec{\tau} = I_p \cdot \vec{\alpha}$

$$\rightarrow \dot{\vec{L}} = \dot{I}_p \vec{\omega} + I_p \dot{\vec{\omega}} = R M g \sin \theta \hat{k} - R M' g \left(\frac{\sin(\varphi + \theta)}{2} + \sin \theta \right) \hat{k} = \tau_{\text{neto}}$$

$$\dot{I}_p = -MR^2 \sin \varphi \dot{\varphi} \rightarrow -MR^2 \sin \varphi \dot{\varphi} + MR^2 \left(\frac{89}{32} + \cos \varphi \right) = R M g \sin \theta - R M' g \left(\frac{\sin(\varphi + \theta)}{2} + \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{M}$$

$$\rightarrow \frac{89}{32} + \cos \varphi - R \omega^2 \sin \varphi = \frac{8 \sin \theta}{M} - \frac{M'}{M} g \left(\frac{\sin(\varphi + \theta)}{2} + \sin \theta \right)$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \frac{R\omega^2 \sin \ell + g \sin \ell - \frac{g}{4} \left(\frac{\sin(\ell + \ell)}{2} + \sin \ell \right)}{R \left(\frac{8g}{32} + \cos \ell \right)}$$

→ Discretizar en tomar un intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ en N subdivisiones (de tamaño $dt \equiv \frac{t_f - t_0}{N}$).

→ así se define $\ell_i \equiv \ell(t_i)$, con $t_i \equiv t_0 + i dt$, el i -ésimo tiempo.

→ Recordar que $\dot{\ell} = \omega$, y $\ddot{\ell} = a$, es decir, en la ecuación tengo $\ddot{\ell}(\dot{\ell}, \ell)$. así, puedo aplicar Verlet: la información de la ecuación me permite obtener ℓ_{i+1} en función de ℓ_i y ℓ_{i-1} . Veremos cómo

→ Usar aproximaciones para $\dot{\ell}$ y $\ddot{\ell}$

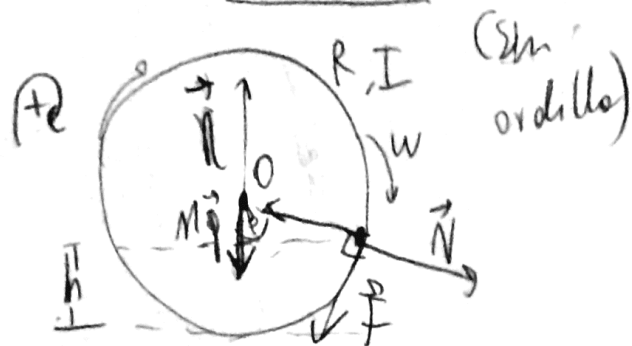
$$\dot{\ell}_i \approx \frac{\ell_i - \ell_{i-1}}{dt}, \quad \ddot{\ell}_i \approx \frac{\ell_{i+1} - 2\ell_i + \ell_{i-1}}{dt^2}$$

reemplazando

$$\frac{\ell_{i+1} - 2\ell_i + \ell_{i-1}}{dt^2} = \frac{R \cdot \left(\frac{\ell_i - \ell_{i-1}}{dt} \right) \sin \ell_i + g \sin \ell_i - \frac{g}{4} \left(\frac{\sin(\ell_i + \ell_i)}{2} + \sin \ell_i \right)}{R \left(\frac{8g}{32} + \cos \ell_i \right)}$$

$$\rightarrow \ell_{i+1} = \frac{dt^2 \left(R \left(\frac{\ell_i - \ell_{i-1}}{dt} \right) \sin \ell_i + g \sin \ell_i - \frac{g}{4} \left(\frac{\sin(\ell_i + \ell_i)}{2} + \sin \ell_i \right) \right)}{R \left(\frac{8g}{32} + \cos \ell_i \right)} + 2\ell_i - \ell_{i-1}$$

P4] DCL rueda



$$\text{Sen } \beta = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$$

$$\sum \vec{\tau}_O = +\vec{R} \times \vec{F} = +R F \sin \beta = I_O \alpha$$

$$\rightarrow +R m g \text{ Sen } \beta = I_O \alpha$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{+R m g \text{ Sen } \beta}{I_O} = \frac{+R m g \text{ Sen } \beta}{m R^2} = \left(\frac{m}{m}\right) \frac{g \text{ Sen } \beta}{R}$$

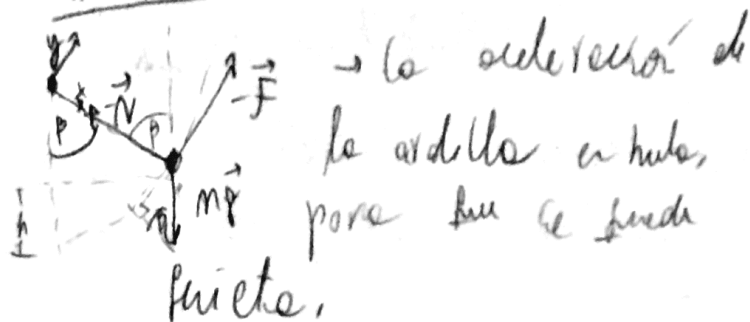
- Cuando la rodillo desea de correr, esta forma choca parte de la rueda, esto lleva a una discontinuidad en ω , pero en este intervalo $\vec{L}$ se debe conservar (no hay fuerzas externas).

$\vec{L}_i = I \omega_i + m R^2 \times \omega_{\text{rodillo}} = I \omega_o$, pero esto es el instante justo antes de que la rodillo se pegue.

$$\vec{L}_f = \underbrace{(I + m R^2)}_{\text{momento del sistema}} \omega_f, \text{ conservación} \rightarrow I \omega_o = (I + m R^2) \omega_f$$

$$\rightarrow \omega_f = \frac{\omega_o I}{I + m R^2} = \frac{\omega_o}{1 + \frac{m R^2}{I}} = \frac{\omega_o}{1 + \left(\frac{m}{m}\right)}$$

DCL rodillo



$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m g \cos \beta \\ -m g \text{ Sen } \beta \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\rightarrow F = m g \text{ Sen } \beta$$

• para encontrar H , usaremos energía.

$$E_i = mgh + \frac{1}{2}(I + mR^2) \omega_f^2$$

↑
Justo después
de salir



$E_f = mgh$. $\omega = 0$ por estar en un máximo

$$\text{Conservación} \rightarrow mgh = mgh + \frac{1}{2}(MR^2 + mR^2) \omega_f^2$$

$$\rightarrow H = h + \frac{1}{2g} \left(\frac{M}{m} + 1 \right) R^2 \cdot \omega_f^2$$

$$= h + \frac{R^2}{2g} \left(\frac{M}{m} + 1 \right) \cdot \frac{\omega_0}{1 + \frac{m}{M}} = h + \frac{R^2 \omega_0}{2g} \cdot \frac{M+m}{m} \cdot \frac{M}{M+m}$$

$$H = h + \frac{R^2 \omega_0}{2g} \left(\frac{M}{m} \right)$$