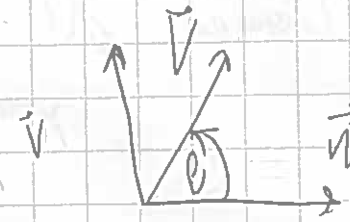
Torque

• dados dos vectores $\vec{V}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, el producto cruz de ambos

$$\vec{W} \times \vec{V}$$



→ es perpendicular a ambos

→ $\|\vec{W} \times \vec{V}\| = \|\vec{V}\| \, \|\vec{W}\| \operatorname{sen} \theta$

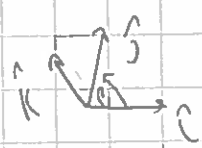
→ sentido se define según orientación elegida

(+) ⟷ mano derecha   (+) ⟷ mano izquierda

→ $\times$ distribuye c/r a $+$

→ $\hat{\theta}$ se define empezando de $\vec{W}$, siguiendo la orientación positiva hasta $\vec{V}$

★ $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$



$\theta = \pi/2 < \pi$ $\theta = \frac{3\pi}{2} > \pi$

→ Notación: tomar $\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \equiv (x_1, x_2)$

→ $\hat{i} \equiv \hat{x}$, $\hat{j} \equiv \hat{y}$, $\hat{k} = \hat{z}$ son vectores unitarios, $\|\hat{i}\| = 1$
nos hablan de dirección.

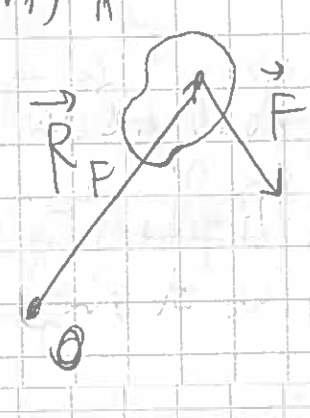
→ Todo vector en $\mathbb{R}^n$ puede ser descompuesto en n componentes en n direcciones distintas

→ dados $\vec{V}$ y $\vec{W}$, se tiene que

$$\vec{V} \times \vec{W} = (V_1 \hat{i} + V_2 \hat{j}) \times (W_1 \hat{i} + W_2 \hat{j}) = V_1 W_1 \underbrace{\hat{i} \times \hat{i}}_{0} + V_1 W_2 \underbrace{\hat{i} \times \hat{j}}_{\hat{k}} + V_2 W_1 \underbrace{\hat{j} \times \hat{i}}_{-\hat{k}} + V_2 W_2 \underbrace{\hat{j} \times \hat{j}}_{0} = (V_1 W_2 - V_2 W_1)\, \hat{k}$$

→ Si $\vec{V} \perp \vec{W}$, $\|\vec{V} \times \vec{W}\| = \|\vec{V}\| \, \|\vec{W}\|$

→ torque: $\vec{\tau} = \vec{R}_F \times \vec{F}$



estática

- Condiciones de estática

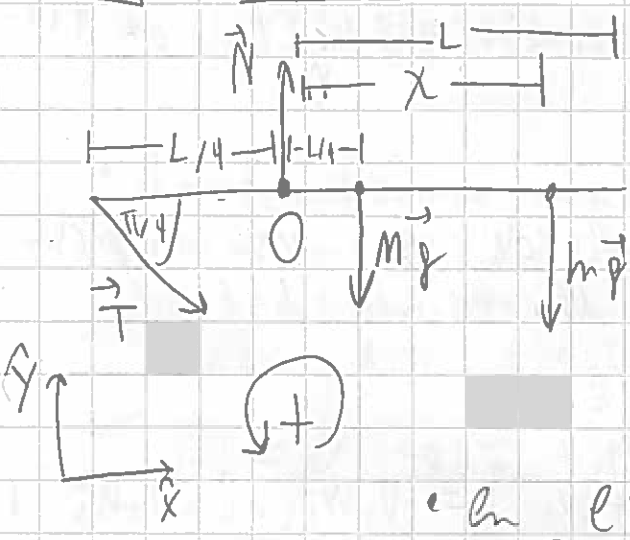
$$\sum_{\text{exterior}} \vec{F} = 0 \;\wedge\; \sum_{\text{exterior}} \vec{\tau}_0 = 0$$

$$\text{“} \vec{V} = 0 \text{”} \;\wedge\; \text{“} \vec{W} = 0 \text{”}$$

Con O un origen "arbitrario",

- Herramientas:
  - → Leyes de la estática, $\vec{F}_{neta} = \vec{\tau}_0^{\,neta} = 0$
  - → DCL!!
  - → Geometría
  - → ORDEN!

P1 DCL de barra



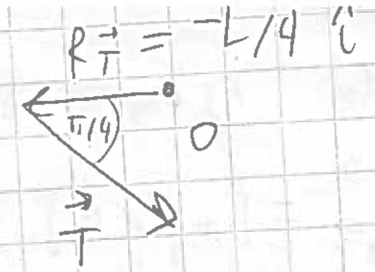
1. definir origen, s.st. de coordenadas y orientación.
2. hay absoluta libertad, elegir la que faciliten los cálculos

- En este caso, $\vec{N}$ no nos importa, como vemos que se puede hacer el problema con torques, ponemos $\vec{O}$ en el pivote, así, $\vec{\tau}^{\,0}_{\vec{N}} = 0$.

- estática → $\sum_{ext} \vec{\tau}_0 = 0$

→ $\vec{\tau}^{\,0}_{\vec{T}} + \underbrace{\vec{\tau}^{\,0}_{\vec{N}}}_{0} + \vec{\tau}^{\,0}_{m\vec{g}} + \vec{\tau}^{\,0}_{m\vec{g}} = 0 \quad (1)$

• $\vec{\tau}^{\,O}_{\vec T} = \vec R_{\vec T} \times \vec T$ (Vector Forma)



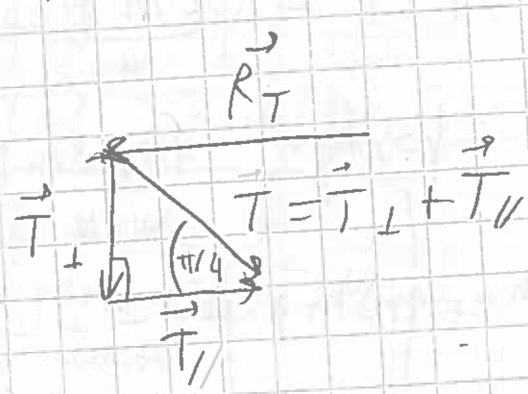
I → $\vec R_T \times \vec T = -L/4\,\hat i \times (T_1 \hat i + T_2 \hat j)$

$= -L/4\,\hat i \times (T \cos \pi/4\,\hat i - T \sin \pi/4\,\hat j)$

$= -TL/4 \cdot \frac{\sqrt2}{2}\,\hat i \times (\hat i - \hat j) \underset{\hat i \times \hat i = 0}{=} +\frac{\sqrt2\, TL}{8}\,\hat i \times \hat j = +\frac{\sqrt2\, TL}{8}\,\hat k$

• Chequeo de signo: Si $\vec T$ hace "rotar" ~~positivamente a~~ $\vec R_T$, $\vec R_{\vec T} \times \vec T$ sale de la hoja

II → descomponemos $\vec T$ en $\vec T_{//}$ y $\vec T_\perp$, componentes // y ⊥ de $\vec T$ en $\vec R_T$.



$\vec R_T \times \vec T = \vec R_T \times (\vec T_{//} + \vec T_\perp)$

$= \underbrace{\vec R_T \times \vec T_{//}}_{0} + \vec R_T \times \vec T_\perp$

$= \vec R_T \times \vec T_\perp$ "Resultado general"

• $\vec \tau^{\,O}_{\vec T}$ sale de la hoja por regla de la mano derecha

• $\vec R_T \perp \vec T_\perp \to \|\vec R_T \times \vec T_\perp\| = \|\vec R_T\| \|\vec T_\perp\| = \frac{L}{4} \cdot T_\perp$

$\therefore \tau^{\,O}_{\vec T} = +\frac{\sqrt2\, LT}{8}\,\hat k$ (2)

• alternativamente, $\vec R_T \times \vec T_\perp = (-\frac{L}{4}\,\hat i) \times (-T \sin(\frac{\pi}{4})\,\hat j)$

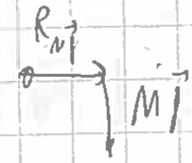
$= \frac{\sqrt2\, TL}{8}\,\hat i \times \hat j = \frac{\sqrt2\, TL}{8}\,\hat k$

III. usar determinante

$$\begin{array}{l} \\ \vec R_T \to \\ \vec T \to \end{array} \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ -L/4 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt2 T}{2} & -\frac{\sqrt2 T}{2} & 0 \end{vmatrix} = \vec R_T$$

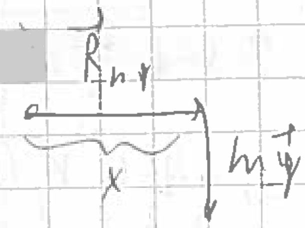
• Todos están en equilibrio [hay más]

en 1, $\vec{\tau}^{\,O}_{M\vec{g}} = \vec{R}_{M\vec{g}} \times M\vec{g} = -\frac{LMg}{4}\hat{k}$ (3)



$\vec{\tau}^{\,O}_{m\vec{g}} = \vec{R}_{m\vec{g}} \times m\vec{g}$

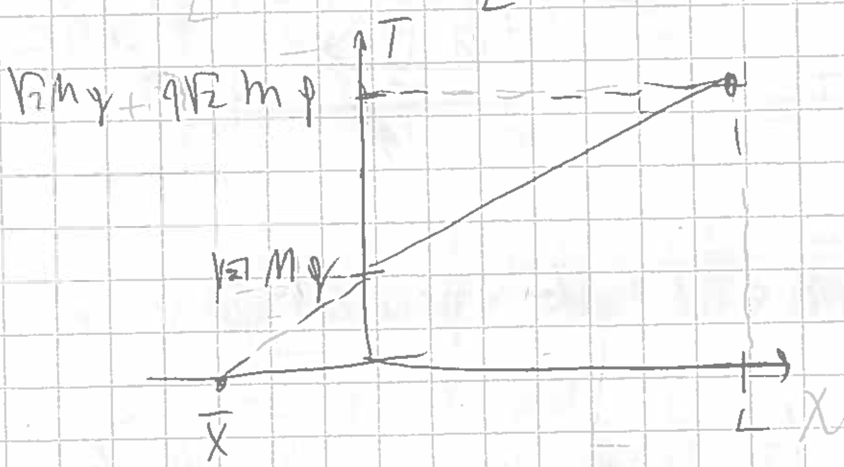
$= -x m g \hat{k}$ (4)



(1), (2), (3) y (4) → $\frac{\sqrt{2} L T}{8}\cancel{\hat{k}} - \frac{LMg}{4}\cancel{\hat{k}} - x m g \cancel{\hat{k}} = 0$

→ $T = \left(\frac{LMg}{4} + x m g\right) \cdot \frac{8}{\sqrt{2} L} = \frac{Mg \cdot 2}{\sqrt{2} L} + \frac{8 x m g}{\sqrt{2} L}$

$= \sqrt{2} M g + \frac{4\sqrt{2}\, x m g}{L}$



$T(\bar{x}) = 0$

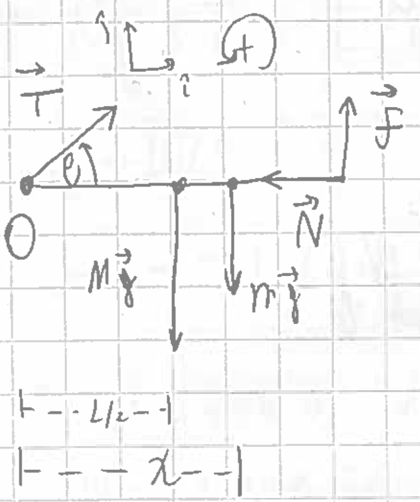
→ $\sqrt{2} M g + \frac{4\sqrt{2}\, \bar{x}\, m g}{L} = 0$

→ $\bar{x} = -\frac{\sqrt{2}\, M \cancel{g} \cdot L}{4\sqrt{2}\, m \cancel{g}}$

→ $\bar{x} = -\frac{ML}{4m}$

• Si $M > m$, no existe ese punto en la barra.

P2| DCL puente



• Primero pongamos el origen en el extremo izquierdo, sist. de coord. usual y orientación positiva.

estática $\to \vec{\tau}_O = 0$

$$\to \tau^{O}_{M\vec g} + \tau^{O}_{m\vec g} + \underbrace{\tau^{O}_{\vec N}}_{0} + \tau^{O}_{\vec F} + \underbrace{\tau^{O}_{\vec T}}_{0} = 0$$

$$= \underbrace{\vec R^{O}_{M\vec g}}_{\frac{L}{2}\hat i} \times \underbrace{M\vec g}_{-Mg\hat j} + \underbrace{\vec R^{O}_{m\vec g}}_{x\hat i} \times \underbrace{m\vec g}_{-mg\hat j} + \underbrace{\vec R^{O}_{\vec F}}_{L\hat i} \times \underbrace{\vec F}_{F\hat j} = 0$$

$$-\frac{LMg}{2}\,\hat i\times\hat j - xmg\,\hat i\times\hat j + LF\,\hat i\times\hat j$$

$$\left(-\frac{LMg}{2} - xmg + LF\right)\hat k = 0$$

• $M\vec g$ y $m\vec g$ hacen, en torno a O, la barra quiera rotar negativamente $\to$ su torque es negativo
• $\vec F$ hace que quiera rotar positivamente en torno a O

$\therefore$ Signos están bien, y $F = Mg/2 + mg\frac{x}{L}$ (1)

• Ahora queremos extraer información sobre N. Si pongo un origen O' en cualquier punto de la barra, el torque de $\vec N$ será 0. Esto evidencia que conviene usar nuestra otra herramienta.

$$\sum_{ext} \vec F = 0 \to \vec T + M\vec g + m\vec g + \vec F + \vec N = 0$$

$$\to \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N \\ 0 \end{bmatrix} = \vec 0$$

$T_x = T\cos\theta$ $\qquad N = T\cos\theta$ ← pero queremos $N(x)$!

$T_y = T\sin\theta$ $\to$ $\qquad T\sin\theta - Mg - mg + F = 0$ (2)

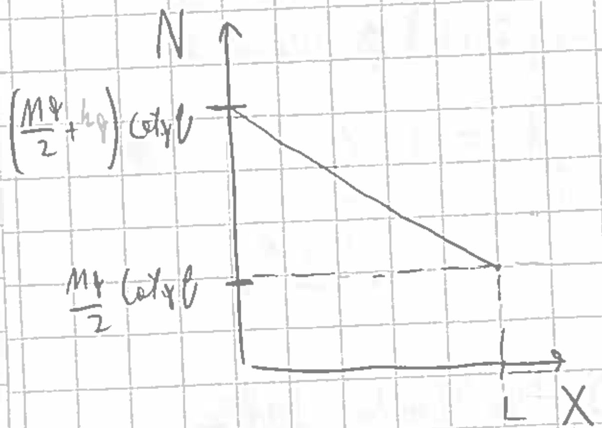
↖ buscamos $T(x)$ aquí

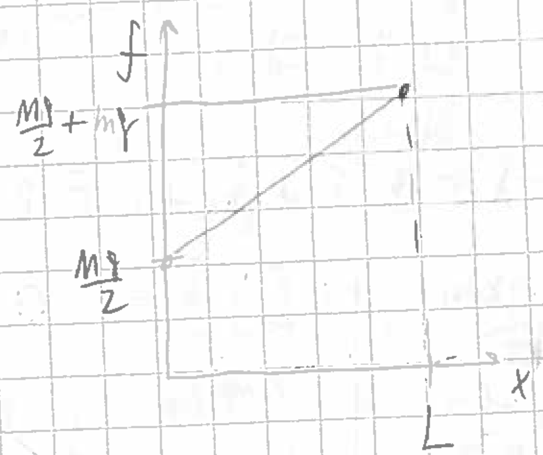
(2) → $T = \frac{Mg + mg - F}{\sin\theta} \overset{(1)}{=} \frac{Mg + mg - \frac{Mg}{2} - mg\frac{X}{L}}{\sin\theta}$

$$T(X) = \frac{Mg/2 + mg\left(1 - X/L\right)}{\sin\theta} \quad (3)$$

(3) y (2) → $N(X) = \left(\frac{Mg/2 + mg\left(1 - X/L\right)}{\sin\theta}\right)\cos\theta$

$$= \left(\frac{Mg}{2} + mg\left(1 - X/L\right)\right)\cot\theta \quad (4)$$



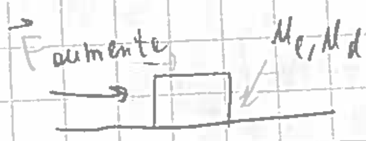


• Pregunta: ¿No era $\|\vec f\| = \|\vec N\|\mu$?

→ esto es verdad para el roce dinámico

→ el roce estático cumple las leyes de la estática (así se obtiene). Pero si ocurre que $\|\vec f\| > \|\vec N\|\mu_e$, se resbala y empieza a valer el dinámico.

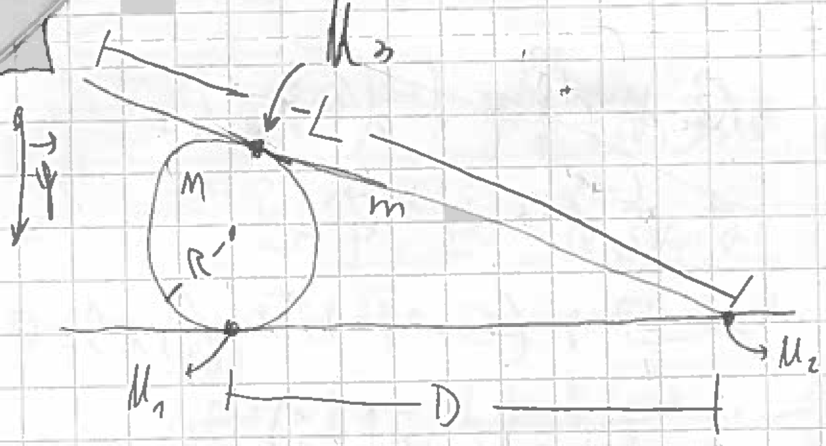
Generalmente, $\mu_{\text{estático}} > \mu_{\text{dinámico}}$

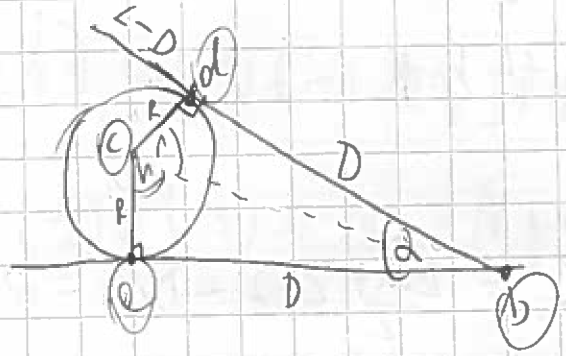


• En este caso, $f(L) = N(L)\mu_e$

→ $Mg/2 + mg\, L/L = \mu_e \cdot \cot\theta \left(\frac{Mg}{2} + \cancel{mg\left(1 - L/L\right)}^{0}\right)$

$Mg/2 + mg = \mu_e \cot\theta \cdot \frac{Mg}{2}$ → $\left(1 + 2\frac{m}{M}\right)\tan\theta = \mu_e$





¡Primero, veamos lo que podemos de la geometría del problema!

- $\measuredangle\, cbd = \alpha/2$

pero

$\tan(\measuredangle\, cdb) = R/D$

$\rightarrow \tan(\alpha/2) = R/D$

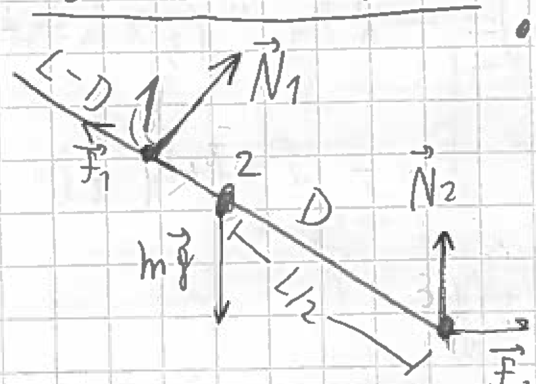
→ α es una variable auxiliar que determinamos lo más pronto posible.

$\boxed{\text{¡ÚTIL! ayuda con álgebra / geometría y con ver cosas}}$

→ Ahora haremos los DCL de cada subsistema

→ Combinaciones posibles: Tabla, cilindro, tabla y cilindro

1/ DCL tabla



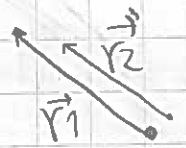
- Sistema de coords
- fuerzas:
  - → peso: $m\vec g = -mg\hat\jmath$
  - → Normal: $\vec N_1 = ?$, $\vec N_2 = ?$
  - → roce: $\vec f_1 = ?$, $\vec f_2 = ?$

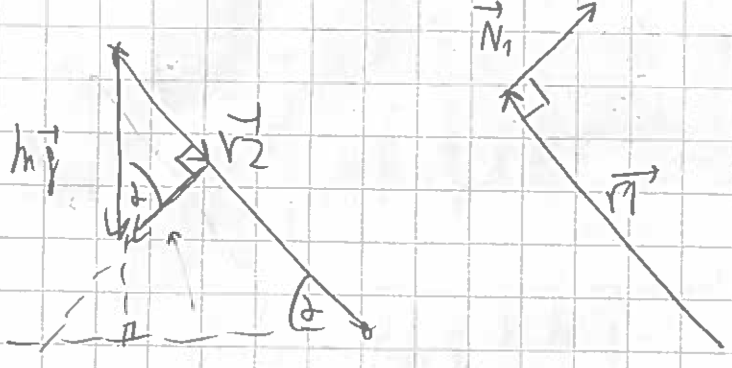
- estática: $\vec\tau_0 = 0$

- $\vec\tau_0 = \cancel{(\vec 0 \times \vec N_2)}^{0} + \cancel{(\vec 0 \times \vec f_2)}^{0} + (\vec r_2 \times m\vec g) + (\vec r_1 \times \vec N_1) + \cancel{(\vec r_1 \times \vec f_1)}^{0}$

$\vec r_1 \parallel \vec f_1$

- elegimos O tal que sea fácil calcular torque





$\bullet\ \vec{r_2} \times m\vec{g} = \left(-\frac{L}{2}\cos\alpha\ \hat{i} + \frac{L}{2}\sin\alpha\ \hat{j}\right) \times (-mg\ \hat{j})$

$= -\frac{L}{2}mg\left(-\cos\alpha\ \hat{i} + \sin\alpha\ \hat{j}\right) \times \hat{j}$ $\quad \hat{j}\times\hat{j}=0$

$= -\frac{L}{2}mg\cos\alpha\ (-\hat{i}\times\hat{j})$

$= +\frac{L}{2}mg\cos\alpha$

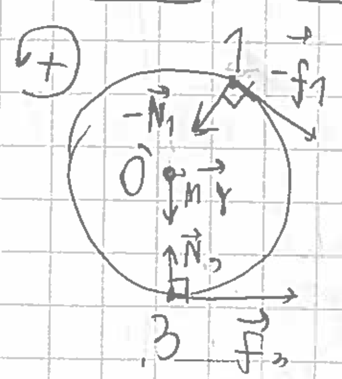
sen $+$

$\bullet\ \vec{r}_1 \times \vec{N}_1 = -\|\vec{r}_1\|\|\vec{N}_1\|$

$= -DN_1 \quad \rightarrow \vec{\tau}_0 = \frac{Lmg}{2}\cos\alpha - DN_1 = 0$

$\rightarrow N_1 = \boxed{\frac{Lmg\cos\alpha}{2D}} \quad (1)$

2/ DLC cilindro fuerza: $-\vec{N}_1, -\vec{f}_1, M\vec{g}, \vec{N}_3 ?, \vec{f}_3 ?$



• Ponemos origen en el centro, orientación positiva y ejes cartesianos

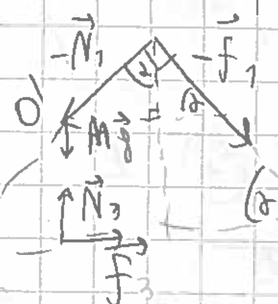
$\bullet\ \vec{\tau}_0 = 0 \rightarrow \cancel{(\vec{r}_1 \times (-\vec{N}_1))}^{0} + (\vec{r}_1 \times (-\vec{f}_1))$

$+ \cancel{(\vec{r}_3 \times \vec{N}_3)}^{0} + (\vec{r}_3 \times \vec{f}_3) = 0$

$\vec{r}_1 \perp (-\vec{f}_1)$ ^ $\vec{r}_3 \perp \vec{f}_3 \rightarrow \vec{r}_1 \times (-\vec{f}_1) = -Rf_1$ ^ $\vec{r}_3 \times \vec{f}_3 = +Rf_3$

$\rightarrow \vec{\tau}_0 = Rf_3 - Rf_1 = 0 \rightarrow \boxed{f_3 = f_1} \quad (2)$

$\bullet\ \sum \vec{F} = 0 \rightarrow M\vec{g} + \vec{N}_3 + \vec{f}_3 - \vec{N}_1 - \vec{f}_1 = 0$



$\leftrightarrow -Mg\ \hat{j} + N_3\ \hat{j} + f_3\ \hat{i} + (-N_1\cos\alpha\ \hat{j} - N_1\sin\alpha\ \hat{i})$

$+ (f_1\cos\alpha\ \hat{i} - f_1\sin\alpha\ \hat{j}) = 0$

$\hat{j}: \rightarrow -Mg + N_3 - N_1\cos\alpha - f_1\sin\alpha = \boxed{0} \quad (3)$

$\hat{i}: \rightarrow f_3 - N_1\sin\alpha + f_1\cos\alpha = \boxed{0} \quad (4)$

(2) y (4) $\rightarrow f_1 - N_1 \sin\alpha + f_1 \cos\alpha = 0$

$$\rightarrow f_1 = \frac{N_1 \sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\xrightarrow{(1)} f_1 = \frac{L\,m g \cos\alpha}{2D} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = F_3 \quad (5)$$

(3) $\rightarrow N_3 = Mg + N_1 \cos\alpha + f_1 \sin\alpha$

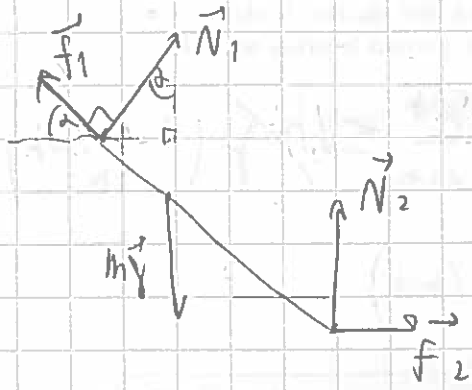
(5) y (1) $\rightarrow N_3 = Mg + \frac{L m g \cos^2\alpha}{2D} + \frac{L m g \cos\alpha \sin^2\alpha}{2D(1+\cos\alpha)}$

$$= Mg + \frac{Lmg}{2D}\left(\frac{\cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$$

$$= Mg + \frac{Lmg}{2D}\left(\frac{\cos^2\alpha + \cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$$

$$N_3 = Mg + \frac{Lmg}{2D}\cos\alpha \quad (6)$$

- $\sum \vec{F} = 0$ en barra (Volviendo a la barra)



$$\rightarrow \vec f_1 + \vec N_1 + m\vec g + \vec N_2 + \vec f_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -f_1\cos\alpha \\ +f_1 \sin\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \sin\alpha \\ N_1\cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -f_1\cos\alpha + N_1 \sin\alpha + f_2 \\ f_1 \sin\alpha + N_1 \cos\alpha - mg + N_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$\rightarrow f_2 = f_1 \cos\alpha - N_1 \sin\alpha \underset{(5)}{=} \frac{N_1 \sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha} - N_1 \sin\alpha$$

$$= N_1 \sin\alpha \left(\frac{\cos\alpha - (1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}\right) = -\frac{N_1 \sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$f_2 \underset{(1)}{=} -\frac{Lmg}{2D}\,\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \quad (8)$$

$$(7) \rightarrow N_2 = mg - f_1\operatorname{sen}\alpha - N_1\cos\alpha$$

$$(5)\ y\ (1) \rightarrow N_2 = mg - \frac{Lmg\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{2D(1+\cos\alpha)}\operatorname{sen}\alpha - \frac{Lmg\cos\alpha}{2D}\cdot\cos\alpha$$

$$= mg - \frac{Lmg}{2D}\left(\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}\right)$$

$$= mg - \frac{Lmg}{2D}\left(\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha}{1+\cos\alpha}\right).$$

$$= mg - \frac{Lmg\cos\alpha}{2D\cancel{(1+\cos\alpha)}}\left(\underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + \cos\alpha\right)$$

$$N_2 = mg - \frac{Lmg}{2D}\cos\alpha = mg\left(1 - \frac{L}{2D}\cos\alpha\right) \quad (9)$$

· $\vec{f}_2$ y $\vec{f}_3$ son roce estático

→ Se debe cumplir que $f_2 \le N_2\,\mu_2$ y que $|f_3| \le |N_3|\,\mu_1$

$$(5)\ y\ (1),\ (8)\ y\ (9) \rightarrow +\frac{L\cancel{mg}}{2D}\,\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \le \mu_2\cancel{mg}\left(1 - \frac{L}{2D}\cos\alpha\right)$$

$$\wedge\ \frac{Lm\cancel{g}}{2D}\,\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \le \mu_1\left(M\cancel{g} + \frac{Lm\cancel{g}}{2D}\cos\alpha\right)$$

$$\rightarrow \mu_2 \ge \frac{L}{\cancel{2D}}\,\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cancel{2D}}{2D - L\cos\alpha} \ \wedge\ \mu_1 \ge \frac{Lm}{\cancel{2D}}\,\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cancel{2D}}{2DM + Lm\cos\alpha}$$

$$\mu_2 \ge \frac{L\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)(2D - L\cos\alpha)},\quad \mu_1 \ge \frac{Lm\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)(2DM + Lm\cos\alpha)}$$