Auxilar 2

Métodos Numéricos y Sistemas Extendidos

Profesor: Vicente Salinas
Auxiliares: César Aguilar Carolina Gutiérrez Miguel Sepúlveda

P1.- La ecuación de movimiento para un péndulo con roce es la siguiente:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} sin\phi - \gamma\dot{\phi}$$

donde g es la aceleración de gravedad, l es el largo del péndulo, ϕ es el angulo del péndulo con la horizontal, y γ el coeficiente de roce. Si se suelta el péndulo desde un angulo inicial ϕ_0, el roce disipará energía por lo que los máximos ángulos que alcanza el péndulo en cada oscilación son cada vez menores. Se busca resolver numéricamente la dinámica del sistema para obtener como disminuyen estos máximos. Para esto:

1. A partir de la ecuación de movimiento, utilice el método de Verlet para calcular el angulo ϕ_i en función de un tiempo t_i para una discretización temporal Δt.
2. Considerando $g = 9{,}8\ \frac{m}{s}$, $l = 0{,}5\ m$, $\gamma = 2\ \frac{kg}{s}$ y $\phi_0 = \frac{\pi}{3}\ rad$, realice 5 iteraciones de la formula previamente obtenida.
3. Determine el criterio numérico que permita obtener los instantes en los que el péndulo alcanza estos máximos y los valores de los mismos.
4. Escriba en pseudo-código una función en `Matlab` que realice esta tarea.

sol

Recordemos que para discretizar alguna derivada, se puede hacer hacia delante, hacia atrás, o de manera centrada:

$$\dot{\phi} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta t} \text{ (Hacia delante)}$$
$$\dot{\phi} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta t} \text{ (Hacia atrás)}$$
$$\dot{\phi} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta t} \text{ (Centrada)}$$

De esta manera, también se puede obtener una expresión discreta para la segunda derivada:

$$\ddot{\phi} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Así, en este caso, reemplazando y tomando la derivada hacia atrás para $\dot{\phi}$

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta t^2} = -\frac{g}{l}\sin\phi_i - \gamma\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta t}$$
$$\Rightarrow \phi_{i+1} = 2\phi_i - \phi_{i-1} - \frac{g}{l}\sin\phi_i\Delta t^2 - \gamma(\phi_i - \phi_{i-1})\Delta t$$

Considerando los datos del problema, y tomando $\Delta t = 0{,}1$, hay que pensar en como inicializar el algoritmo, pues ϕ_{i+1} está definido recursivamente, por lo que necesitamos encontrar ϕ_1 de otra manera. En este caso, las condiciones iniciales son $\phi_1 = \phi_0 = \frac{\pi}{3}\ rad$ y $\omega_1 = 0$, la velocidad angular, pues se empieza del reposo(Le llamamos ϕ_1 y ω_1 a las condiciones iniciales pues los arreglos en matlab empiezan en 1, así evitamos confusiones). Con estos dos datos, podemos obtener ϕ_2 en función de ϕ_1 y $omega_1$ al despreciar por esta iteración el efecto de las fuerzas externas, y así se podrá comenzar a usar la definición recursiva de ϕ_{i+1}

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = 1{,}047\ rad\\
&\phi_2 = \phi_1 + \omega_1\Delta t = 1{,}047\ rad\\
&\phi_3 = 2\phi_2 - \phi_1 - \frac{g}{l}\sin\phi_2\Delta t^2 - \gamma(\phi_2 - \phi_1)\Delta t = 1{,}043\ rad\\
&\phi_4 = 2\phi_3 - \phi_2 - \frac{g}{l}\sin\phi_3\Delta t^2 - \gamma(\phi_3 - \phi_2)\Delta t = 1{,}036\ rad\\
&\phi_5 = 2\phi_4 - \phi_3 - \frac{g}{l}\sin\phi_4\Delta t^2 - \gamma(\phi_4 - \phi_3)\Delta t = 1{,}027\ rad\\
&\phi_6 = 2\phi_4 - \phi_3 - \frac{g}{l}\sin\phi_4\Delta t^2 - \gamma(\phi_4 - \phi_3)\Delta t = 1{,}016\ rad\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Una buena manera de encontrar un máximo es mirar como cambia la derivada de la variable en cuestión, ya que si la derivada hacia adelante es negativa y hacia atrás es negativa, entonces se está en un máximo. Así, se estará en un máximo si

```
(phi(i+1)-phi(i)) <= 0 & ((phi(i) - phi(i-1)) >= 0
```

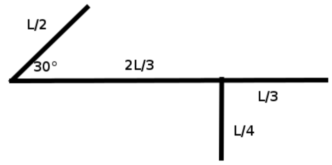
A continuación se presenta el código que utiliza este criterio y grafica la solución:

```
% Sistemas Newtonianos
% Métodos Numéricos
% Problema 5 Auxiliar 1 Fl1002-7 semestre 2013-2

% Se introducen los valores dados
dt=0.1;
gamma=0.2;
g=9.8;
L=0.5;
N=1000; % Se quieren 1000 iteraciones
phi0=pi/3; % Condiciones iniciales
omega0=0;

t=linspace(1,dt,dt*N);       % Almacenará todos los t(i)
phi=zeros(1,length(t));     % Almacenará phi(t(i))

% Inicializar Verlet
phi(1)=phi0;
```

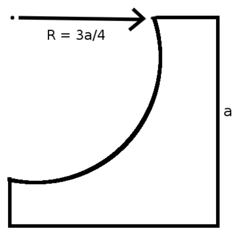
```
phi(2)=phi0+dt*omega0;

% Iteración (Verlet)
for i=2:length(phi)-1
    phi(i+1)=-g*sin(phi(i))*dt*dt/L+2*phi(i)-gamma*dt*(phi(i)-phi(i-1))-phi(i-1);
end;

% Gráfico
plot(t, phi,'-'); hold on; xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Posición [rad]');
title('Gráfico de angulo v/s tiempo con máximos marcados');

% Criterio para encontrar los máximos
max=zeros(N,2);    % Guardará en su primera columna los máximos, y el lugar
            % en que ocurren en la segunda
j=0;               % Contador de máximos

if(omega0==0 & phi0>0) % Se evalúa si la función
                  %comienza en un máximo
    j=1;
    max(1,1)=phi0; max(1,2)=t(1);
end;

for i=2:length(phi)-1    % Iteramos sobre el resto de los tiempos
    if((phi(i)-phi(i-1))>0 & (phi(i)-phi(i+1)>=0)) % Criterio
        j=j+1;
        max(j,1)=phi(i);      % Guardamos los valores en max
        max(j,2)=t(i);
    end;end;

% Generamos una matriz p que contenga lo que contiene max, pero sin ceros al
% final

p=zeros(j,2);
for i=1:j
    p(i,:)=max(i,:);
end;

% Como p contiene los máximos, los graficamos con círculos
plot(p(:,2),p(:,1),' o');
display('Máximos [rad]:')
disp(p(:,1));                 % Se muestran todos los máximos

% Para graficar la evolución de máximos, plot(p(:,2),p(:,1))
```

P2.- Calcule el centro de masas de los siguientes dos sólidos:

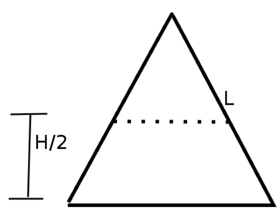
1. Sistema de barras con densidad constante.



2. Cuadrado al que se le quitó una semicircunferencia centrada en una de sus esquinas.



3. Triangulo equilátero de lado L y altura $H = \frac{\sqrt{3}L}{2}$ con densidad no constante. La parte superior tiene densidad ρ_1 y la inferior una densidad ρ_2.



sol

Primero recordemos una de las propiedades más importantes del centro de masa: la superposición. La superposición nos dice que el centro de masas de un conjunto de sistemas es la suma vectorial de los centros de masas de los sistemas ponderada por la fracción de la masa total que tiene el sistema. Es decir, que para N sistemas con centros de masa $\vec{X}_i$ y masas M_i, se tiene que:

$$\vec{X}_{cm} = \frac{\Sigma_{i=1}^{N} \vec{X}_i M_i}{\Sigma_{i=1}^{N} M_i}$$

1. Fijemos el origen en el extremo izquierdo del sistema, y observemos que, como las barras son homogeneas, sus centros de masa deben estar en su punto medio. Con esta observación, se obtiene que el centro de masas de la barra inclinada se ubica en $\vec{X}_1 = \frac{L}{4}(\cos(30), \sin(30)) = \frac{L}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{L}{8}(\sqrt{3}, 1)$, el centro de masas de la barra horizontal está en $\vec{X}_2 = \frac{L}{2}(1, 0)$, mientras que el de la barra vertical se encuentra en $\vec{X}_3 = L(\frac{2}{3}, -\frac{1}{8})$. Por superposición se tiene que:

$$\vec{X}_{cm} = \frac{M_1\vec{X}_1 + M_2\vec{X}_2 + M_3\vec{X}_3}{M_1 + M_2 + M_3}$$

Como el sistema es de densidad lineal constante ρ, entonces $M_i = L_i\rho$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\vec{X}_{cm} &= \frac{\rho L_1\vec{X}_1 + \rho L_2\vec{X}_2 + \rho L_3\vec{X}_3}{\rho(L_1+L_2+L_3)} \\
\vec{X}_{cm} &= \frac{\frac{L}{2}\frac{L}{8}(\sqrt{3},1) + L\frac{L}{2}(1,0) + \frac{L}{4}L(\frac{2}{3},-\frac{1}{8})}{\frac{L}{2}+L+\frac{L}{4}} \\
&= L^2\frac{(\frac{\sqrt{3}}{16},\frac{1}{16}) + (\frac{1}{2},0) + (\frac{1}{6},-\frac{1}{32})}{\frac{7L}{4}} \\
&= L\frac{4}{7}(\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{2}{3},\frac{1}{32}) \\
&\approx L(0{,}442; 0{,}031)
\end{aligned}$$

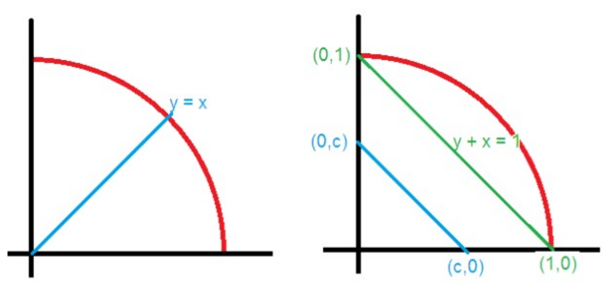
2. Usemos nuevamente el principio de superposición, tomando $\vec{C}$ como el centro de masas de el cuadrado completo, $\vec{S}$, M_s como la posición del centro de masas y la masa del sistema, y $\vec{I}$, M_I como el centro de masas y la masa de el cuarto de circunferencia que le falta al cuadrado, entonces:

$$\vec{C} = \frac{M_s\vec{S} + M_I\vec{I}}{M_s + M_I}$$

Sea ρ la densidad, $A_c = a^2$ el area de el cuadrado, $A_I = \frac{\pi(\frac{3a}{4})^2}{4} = \frac{9\pi a^2}{64}$ es el area del cuarto de circunferencia. Entonces

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \frac{\rho A_s\vec{S} + \rho A_I\vec{I}}{\rho(A_s + A_I)} \\
A_s + A_I = A_c \Rightarrow A_c\vec{C} &= A_s\vec{S} + A_I\vec{I} \\
\Rightarrow \vec{S} &= \frac{A_c\vec{C} - A_I\vec{I}}{A_s} \\
A_s = A_c - A_I \Rightarrow \vec{S} &= \frac{A_c\vec{C} - A_I\vec{I}}{A_c - A_I}
\end{aligned}$$

Colocando el origen en la esquina superior izquierda con un sistema de coordenadas reflejado en el eje x, se tendrá que, por simetria, $\vec{C} = (\frac{a}{2},\frac{a}{2}) = \frac{\sqrt{A_c}}{2}(1,1)$. Para encontrar $\vec{I}$, usaremos la siguiente serie de argumentos de simetria:



El centro de masas debe encontrarse, en el dibujo, en la recta $y = x$ pues de caso contrario se tendría una asimetria en la masa. Además, también debe encontrarse en alguna recta $x+y = c$ tal que divide a la figura en dos trozos iguales. Como el area total es A_I entonces la recta $y + x = c$ debe dividir al cuarto de circunferencia en trozos de area $\frac{A_I}{2}$. Se tiene que el area bajo la recta $\frac{c^2}{2}$ debe ser $\frac{A_I}{2}$, por lo anterior. Entonces $c = \frac{\sqrt{A_I}}{2}$ Finalmente, la intersección de estas dos rectas nos dice que el centro está en $\frac{\sqrt{A_I}}{4}(1, 1)$. [1]

Volviendo a nuestro problema principal, por lo anterior se tendrá que $\vec{I} = \frac{\sqrt{A_I}}{4}(1, 1)$. Utilizando entonces la expresión para $\vec{S}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{A_c\vec{C} - A_I\vec{I}}{A_c - A_I} \\
&= \frac{\frac{A_c\sqrt{A_c}}{2}(1,1) - \frac{A_I\sqrt{A_I}}{4}(1,1)}{A_c - A_I} \\
&= \frac{2A_c^{\frac{3}{2}} - A_I^{\frac{3}{2}}}{4(A_c - A_I)}(1,1) \\
&= \frac{2(a^2)^{\frac{3}{2}} - (\frac{\pi}{4}(\frac{3a}{9})^2)^{\frac{3}{2}}}{4(a^2 - \frac{\pi}{4}(\frac{3a}{9})^2)}(1,1) \\
&\approx 0{,}83a(1,1)
\end{aligned}$$

3. Fijemos nuestro origen en la mitad del lado inferior del triangulo. Sea $\vec{S}$ el centro de masas de la mitad superior, $\vec{I}$ el la inferior y $\vec{X}$ el del sistema completo (Lo que buscamos), entonces por superposición:

$$\vec{X} = \frac{A_s\rho_1\vec{S} + A_I\rho_2\vec{I}}{\rho_1 A_S + \rho_2 A_I}$$

Para encontrar $\vec{S}$, hay que recordar que el centro de masas de un triangulo rectángulo de catetos a y b es $\frac{1}{3}(a, b)$ (en un sistemas de referencias fijo en la esquina opuesta a la hipotenusa), y notar que el triangulo equilatero de lado $\frac{L}{2}$ y $\frac{H}{2}$ se puede dividir en dos triángulos rectángulos de catetos $\frac{L}{4}$ y $\frac{H}{2}$. Así:

$$\rho_1 A_s\vec{S} = \overbrace{\rho_1\frac{A_s}{2}\left((0, \frac{H}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{L}{2}, \frac{H}{2})\right)}^{\text{Lado derecho}} + \underbrace{\rho_1\frac{A_s}{2}\left((0, \frac{H}{2}) + \frac{1}{3}(-\frac{L}{2}, \frac{H}{2})\right)}_{\text{Lado izquierdo}}$$

$$\rightarrow \vec{S} = (\frac{L}{12}, \frac{H}{3}) + (-\frac{L}{12}, \frac{H}{3}) = \frac{2H}{3}(0,1)$$

En el caso de $\vec{I}$, se debe notar que la figura está hecha de un rectángulo de lado horizontal $\frac{L}{2}$

[1] Estos problemas suelen requerir cálculo integral, pero debido a la simetria de esta figura, un razonamiento asi es posible

y lado vertical $\frac{H}{2}$, y dos triángulos rectángulos de catetos $\frac{L}{4}$ y $\frac{H}{2}$. Por lo tanto:

$$\rho_2 A_I \vec{I} = \underbrace{\rho_2 \frac{LH}{4}(0, \frac{H}{4})}_{\text{Rectangulo}} + \overbrace{\rho_2 \frac{LH}{16}\Big((\frac{L}{2}, 0) + \frac{1}{3}(\frac{L}{4}, \frac{H}{2})\Big)}^{\text{Triangulo derecho}} + \underbrace{\rho_2 \frac{LH}{16}\Big((-\frac{L}{2}, 0) + \frac{1}{3}(-\frac{L}{4}, \frac{H}{2})\Big)}_{\text{Triangulo izquierdo}}$$

Notando que $A_I = 2\frac{LH}{16} + \frac{LH}{4} = \frac{3LH}{8}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8}\vec{I} &= \frac{1}{4}(0, \frac{H}{4}) + \frac{1}{16}\frac{1}{3}(\frac{L}{4}, \frac{H}{2}) + \frac{1}{16}\frac{1}{3}(-\frac{L}{4}, \frac{H}{2}) \\
\Rightarrow \vec{I} &= \frac{1}{3}(0, \frac{H}{2}) + \frac{1}{18}(0, \frac{H}{2}) + \frac{1}{18}(0, \frac{H}{2}) \\
&= \frac{2H}{9}(0, 1)
\end{aligned}$$

Otra alternativa para encontrar $\vec{I}$, que después de que se me acercara un alumno a sugerirmela, la encontré mucho mas humana que el método que puse acá. Se puede aprovechar el hecho de que el triángulo equilatero se puede dividir en 4 triángulos equilateros mas pequeños uniendo los puntos medios de sus lados. Así el problema se reduce a recordar que el centro de masas de un triángulo esta a un tercio de lado de distancia de su base, y encontrar el CM de cada sub triangulo para luego usar la propiedad y encontrar el CM del sistema.

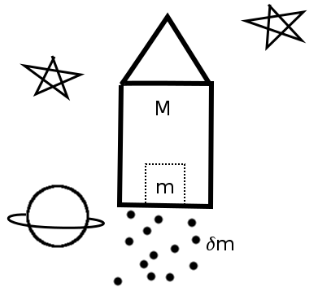
Como $A_s = \frac{LH}{8}$, se tiene finalmente que

$$\begin{aligned}
\vec{X} &= \frac{\rho_1 \frac{LH}{8}\frac{2H}{3}(0, 1) + \rho_2 \frac{3LH}{8}\frac{2H}{9}(0, 1)}{\rho_1 \frac{LH}{8} + \rho_2 \frac{3LH}{8}} \\
&= \frac{2H}{3}\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 + 3\rho_2}(0, 1)
\end{aligned}$$

P3.-

Un cohete interestelar de masa M con una masa m de combustible en él (de manera que la masa total es $M + m$) se encuentra flotando en el espacio. De pronto, para iniciar su viaje, empieza a despedir N partículas de masa δm por segundo, a una velocidad v. Fijando un sistema de referencia inercial en la posición inicial del cohete:

1. Encuentre una expresión para la velocidad del cohete en un tiempo t dado. Exprese la velocidad del cohete al acabarse el combustible.
2. Encuentre la fuerza ejercida sobre el cohete antes de que se acabe el combustible. *Recuerde que* $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$
3. Utilizando una discretización temporal Δt, encuentre una expresión para la distancia del cohete de su posición original en un tiempo t_i.
4. Escriba un programa en Matlab que grafique esta distancia en función del tiempo, tomando $M = 1000\ kg$, $m = 100\ kg$, $\delta m = 0{,}01\ kg$, $N = 100$, $v = 100\frac{m}{s}$.



sol

Como no hay fuerzas externas $\vec{p}_{sistema} = 0$, y como el momento del sistema es igual a la suma de los momentos de sus particulas, se tiene que

$$\vec{p}_{cohete} + \vec{p}_{particulas} = 0$$

.

Para encontrar la velocidad del cohete, podemos buscar primero el momento del cohete, el cual es determinado por el de todas las particulas que ha despedido hasta el momento. El total de particulas despedidas en un tiempo t es Nt, mientras que el momento de cada una es $-\delta mv$ (Se toma la convención de que la dirección de movimiento del cohete es positiva). Entonces:

$$\begin{aligned}
p(\vec{t})_{cohete} &= -\vec{p}(t)_{particulas} \\
&= -Nt\vec{p}_{particula} \\
p(t)_{cohete} &= Nt\delta(-mv) \\
&= Nt\delta mv
\end{aligned}$$

En este caso, **La masa del cohete cambia con el tiempo**, por lo que $p(\vec{t})_{cohete} = (M + (m - tN\delta m))v_{cohete}$, pues despues de un tiempo t, ha despedido $tN\delta m$ particulas. Igualando estas dos expresiones para el momento, se obtiene

$$v(t)_{cohete} = \frac{Nt\delta mv}{M + (m - Nt\delta m)}$$

Con $t < t_0$, el instante en el que se acaba el combustible. Se puede ver que t_0 es tal que $m - Nt_0\delta m = 0 \ \rightarrow t_0 = \frac{m}{N\delta m}$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
v(t > t_0)_{cohete} &= \frac{N(\frac{m}{N\delta m})\delta mv}{M - 0} \\
&= \frac{m}{M}v
\end{aligned}$$

Como era de esperarse, se cumple que $p_{cohete} + p_{particulas} = Mv_{cohete} + (-mv) = 0$

Utilizando la indicación, se tiene que:

$$\begin{aligned} F &= \frac{d\vec{p}(t)_{cohete}}{dt} \\ &= \frac{d(M+m-Nt\delta m)v_{cohete}}{dt} \\ &= \frac{d(Nt\delta mv)}{dt} && = \delta mNv \end{aligned}$$

Lo cual es consistente con el hecho de que $\frac{d\vec{p}(t)_{cohete}}{dt} = -\frac{d\vec{p}(t)_{particulas}}{dt} = -\frac{Nt(-\delta mv)}{dt} = \delta mNv$. Notese, a pesar de que la fuerza es constante, esta tiene un efecto distinto en el cohete a cada instante debido a su masa variable. Por esto, nos conviene discretizar v_{cohete}:

$$\begin{aligned} v_{cohete} &= \frac{Nt\delta mv}{M+(m-Nt\delta m)} \\ \rightarrow \frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t} &\approx \frac{Nt_i\delta mv}{M+(m-Nt_i\delta m)} \\ \rightarrow x_{i+1} &= x_i + \Delta t\frac{Nt_i\delta mv}{M+(m-Nt_i\delta m)} \end{aligned}$$

Esto es válido cuando aún no se acaba el combustible. Con $t > t_0$, se tiene la siguiente discretización:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\frac{m}{M}v$$

La condición inicial del algoritmo es $x_1 = 0$, así, el código para hacer lo pedido es el siguiente:

```
%P4 auxiliar 2 F11002-9 semestre 2017-2
M = 1000;
m = 100;
dm = 0.01;
v = 100;
N = 100; %Parametros del problema
t0 = m/(dm*N);
dt = 0.1; % Tomamos dt pequenos
tf = 200; % Cuantos segundos queremos que corra
t = 0:dt:tf; % vector de tiempos
x = zeros(1, length(t)); % Reservamos espacio para el vector de posición (ahorra tiempo)
x(1)=0; % Condición inicial
V(1) = 0;
%Se integra numéricamente
for i = 1:length(t)-1
    if(t(i) < t0) %Si aun no se acaba el combustible
         x(i+1) = x(i) + dt*(N*dm*t(i)*v)/(M+m-N*dm*t(i));
    else % Si ya se acabo
         x(i+1) = x(i) + dt * v * m/M;
    end
    V(i+1) = (x(i+1)- x(i)) / dt; %Obtener velocidad
end
hold on %Ejemplo de grafico bien hecho
plot(t,x,'b-'); % Graficar posición obtenida v/s tiempo
line([t0, t0], [0, 1500], 'color', 'r');
```

```
title('Distancia recorrida por el cohete en función del tiempo');
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('Posición [m]');
hold off % Grafica con titulo y labels correctos

```