Auxiliar Extra C2

uwu

Profesora: María Luisa Cordero
Auxiliares: Luna Alarcón, Christofer Cid, Javier Smith

P1.-

a) Utilizaremos segunda ley de newton y la condición de equilibrio, que indica que la suma de las fuerzas es 0. Así:
Primero analizaremos las fuerzas presentes en la plataforma sin masa, las cueles son la fuerza elástica y la normal ejercida por el bloque.

$$\sum F_p = 0$$
$$\implies N + k(y - l_o) = 0$$
$$\implies N = -k(y - l_o)$$

Con la normal determinada, podemos calcular las fuerzas presentes en el bloque, es decir, la Normal ejercida por la plataforma y el peso del bloque.

$$\sum F_m = m\ddot{y}$$
$$\implies N - mg = m\ddot{y}$$
$$\iff -k(y - l_o) - mg = m\ddot{y}$$

Sabemos que en el equilibrio, la aceleración de la masa será nula, de esta forma:

$$\sum F_m = 0$$
$$\implies -k(y_{eq} - l_o) - mg = 0$$
$$\iff y_{eq} = -\frac{mg}{k} + l_o$$

b) Conocemos que una masa sujeta de un resorte tiene $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$, por lo que buscamos una expresión similar o equivalente.
A partir de la ecuación de fuerzas, tenemos:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -k(y - l_o) - mg \\ &= -k(y - l_o + \frac{mg}{k}) \\ &= -k(y - y_{eq}) \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable: $\bar{y} = y - y_{eq} \implies \ddot{\bar{y}} = \ddot{y}$

$$\begin{aligned}
&\implies m\ddot{\bar{y}} = -k\bar{y} \\
&\implies \ddot{\bar{y}} + \frac{k}{m}\bar{y} = 0 \qquad \text{Ecuación conocida} \\
&\implies \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

c) Utilizamos la solución conocida para esta ecuación:

$$\bar{y}(t) = A\cos(\omega_o t + \phi_0), \quad \phi_0 = 0 \quad \text{(Se suelta desde el reposo)}$$

$$\implies y(t) = \bar{y}(t) + y_{eq} = A\cos(\omega_o t) + l_o - \frac{mg}{k}$$

Buscamos el estiramiento, es decir: $y - l_o$

$$y - l_o = A\cos(\omega_o t) - \frac{mg}{k}) \qquad (*)$$

$$\implies x_o = A - \frac{mg}{k} \qquad \text{(uwu)}$$

Por otra parte, tenemos la expresión para la normal:

$$\begin{aligned}
N &= -k(y - l_o) \quad \text{Utilizamos (*)} \\
&= -k(A\cos(\omega_o t) - \frac{mg}{k}) \\
&= mg - kA\cos(\omega_o t)
\end{aligned}$$

Deseamnos que $N > 0$

$$\begin{aligned}
&N > 0 \\
&mg > kA\cos(\omega_o t) \\
\implies &mg > kA \qquad \text{Pues el valor máximo de coseno es 1} \\
\implies &A < \frac{mg}{k} \\
\implies &x_o + \frac{mg}{k} < \frac{mg}{k} \quad \text{Utilizamos (uwu)} \\
\implies &x_0 < 0
\end{aligned}$$

Esto significa que el resorte no puede ser soltado por sobre su largo natural.
d) Se suelta desde el reposo:

$$\bar{y}(t=0) = \frac{mg}{k} - \varepsilon = \bar{y} \quad \text{Un poco más abajo que en c)}$$

Ahora, como estamos en presencia de roce, utilizamos la solución de oscilaciones amortiguadas:

$$\bar{y} = Ae^{(\frac{-t}{2\tau})}\cos(\Omega t + \phi_0), \quad \bar{y}(0) = \bar{y}_1 = A\cos(\phi_0)$$

Luego, derivamos para encontrar la velocidad, y usamos la condición inicial, que debe ser igual a 0.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}} = -\frac{A}{2\tau}e^{\left(\frac{-t}{2\tau}\right)}\cos(\Omega t+\phi_0) - A\Omega e^{\left(\frac{-t}{2\tau}\right)}\sin(\Omega t+\phi_0) = 0\\ \implies -A\left(\frac{\cos(\phi_0)}{2\tau}+\sin(\phi_0)\Omega\right) = 0\\ \implies \tan(\phi_0) = -\frac{1}{2\tau\Omega}, \quad A = \frac{\bar{y}_1}{\cos(\phi_0)}\end{aligned}$$

Por otra parte, la posición mas baja se alcanza cuando ha pasado $t^* = \frac{\pi}{\omega}$, evaluando:

$$\begin{aligned}&\bar{y}^* = \bar{y}(t^*)\\ \implies &\bar{y}^* = Ae^{\left(\frac{-\pi}{2\tau\Omega}\right)}\cos(\pi+\phi_o)\\ &= -\frac{\bar{y}_1}{\cos(\phi_0)}e^{\left(\frac{-\pi}{2\tau\Omega}\right)}\cos(\phi_o)\\ &= \bar{y}_1 e^{\left(\frac{-\pi}{2\tau\Omega}\right)} \quad \text{Y con respecto al suelo:}\\ \implies &y^* = \bar{y}^* + y_{eq} = \bar{y}_1 e^{\left(\frac{-\pi}{2\tau\Omega}\right)} + l_o - \frac{mg}{k}\end{aligned}$$