Auxliar 4

Energía mecánica sólido rígido

Profesora: María Luisa Cordero
Auxiliares: Luna Alarcón, Christofer Cid, Javier Smith

Teorema de Steiner:

$$I_{o'} = I_o + Md^2 \qquad d\text{: distancia entre los ejes } o' \text{ y } o \tag{1}$$

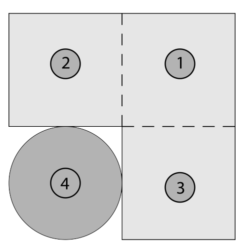
Teorema de los ejes perpendiculares:

$$I_z = I_x + I_y \qquad I_i\text{: momento de inercia alrededor del eje i} \tag{2}$$

Energía de un sistema rotatorio

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{Componente cinética}} + \underbrace{MgY_{cm}}_{\text{Componente potencial}} \tag{3}$$

P1.- Gracias al principio de superposición, podemos separar en cuatro subproblemas más simples, como lo indica la figurita.



1.- Como conocemos el momento de inercia de una placa de lados a y b con respecto a su centro ($\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$), el cálculo es directo (frase típica *dim* y que suele ser mentira).

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{12}M((\frac{L}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2) \\ &= \frac{M}{24}L^2 \end{aligned}$$

2.- La distancia desde el centro de 2 y el eje que queremos hacer rotar el objeto es $d_2 = \frac{L}{2}$, con esta información, ocupamos el teorema de Steiner, ya que en la primera parte calculamos el momento de inercia del cuadrado pequeño con respecto a su centro:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{12}M((\frac{L}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2) + Md_2^2 \\ &= \frac{M}{24}L^2 + M(\frac{L}{2})^2 \\ &= \frac{7}{24}ML^2 \end{aligned}$$

3.- La distancia desde el centro de 3 y el eje requerido, es idéntica que en la parte anterior, es decir, $d_3 = d_2 = \frac{L}{2}$, así, por el teorema de Steiner tenemos el mismo resultado:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{12}M((\frac{L}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2) + Md_3^2 \\ &= \frac{M}{24}L^2 + M(\frac{L}{2})^2 \\ &= \frac{7}{24}ML^2 \end{aligned}$$

4.- Sabemos que al girar un disco, de masa m y radio R, con respecto a su centro el momento de inercia es:

$$I_c = \frac{1}{2}mR^2$$

Por otra parte, la distancia entre el centro del disco y el eje es

$$d_3 = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Entonces, ocupamos el teorema de Steiner:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2}2M((\frac{L}{4})^2) + 2Md_4^2 \\ &= \frac{ML^2}{16} + 2M(\frac{L}{\sqrt{2}})^2 \\ &= \frac{17}{16}ML^2 \end{aligned}$$

Volviendo a la pregunta original, el momento de inercia de la figura con respecto al punto, es la suma de todos los momentos de inercia.

$$\begin{aligned} I_f &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ &= \frac{1}{24}ML^2 + \frac{7}{24}ML^2 + \frac{7}{24}ML^2 + \frac{17}{16}ML^2 \\ &= \frac{27}{16}ML^2 \end{aligned}$$

P2.- i) En esta parte, suponemos que no conocemos el momento de inercia de un disco con respecto a su centro, por lo que debemos usar la información del enunciado. En primer lugar, calculamos la masa:

$$M = \pi r^2 \delta$$

Luego, notamos que como el disco es simétrico; un eje que pasa diametralmente por el disco, puede estar en cualquier parte, y si disponemos dos ejes de forma perpendicular, entonces podremos obtener el momento de inercia con respecto al eje que sale del disco. Es decir $I_x = Iy$:

Por esta razón, usamos el teorema de ejes perpendiculares, para calcular el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro.

$$\begin{aligned} I_z &= I_x + I_y \\ &= 2\frac{Mr^2}{4} \\ &= \frac{Mr^2}{2} \end{aligned}$$

Vemos que nos entrega el resultado que conocíamos. Ahora como conocemos I_{cm}, y la distancia hacia el eje que queremos calcular, es decir, d. Ocupamos directamente el teorema de Steiner.

$$\begin{aligned} I_o &= I_{cm} + Md^2 \\ &= \frac{Mr^2}{2} + Md^2 \end{aligned}$$

ii) Usando conservación de la energía, con $U = 0$ la altura del eje o:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \frac{1}{2} I_o \omega_i^2 + MgY_{cm} &= \frac{1}{2} I_o \omega_f^2 + MgY_{cm} \\ 0 - Mgd\cos\theta_0 &= \frac{1}{2} I \omega_f^2 - Mgd\cos\theta \\ \implies \omega_f &= \sqrt{\frac{2Mgd(\cos\theta - \cos\theta_0)}{I_o}} \end{aligned}$$

Para encontrar el máximo, derivamos ω e igualamos a 0:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\omega_f &\overset{!}{=} 0 \\ -\frac{\frac{Mgd}{I_o}\sin\theta}{\sqrt{\frac{2Mgd(\cos\theta - \cos\theta_0)}{I_o}}} &= 0 \\ \iff \sin\theta &= 0 \\ \iff \theta &= 0 \end{aligned}$$

Otra forma de encontrar el máximo, es ver analíticamente que el máximo de coseno es 1, lo que ocurre en $\theta = 0$.

P3.-

i) Para calcular el momento de inercia I total de sistema, calculamos el momento de inercia de cada una de las figuras por separado y luego, por principio de superposición, solo los sumamos. Para el momento de inercia de la barra, suponemos que conocemos el momento de inercia con respecto al centro de la barra, así, ocupamos Teorema de Steiner para mover el eje al extremo:

$$\begin{aligned} I_{barra} &= I_{CM} + md^2 \\ &= \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 \\ &= \frac{1}{3}ML^2 \end{aligned}$$

Para el momento de inercia del disco, lo calculamos al igual que en la pregunta 2.

$$\begin{aligned} I_{disco} &= I_{CM} + md^2 \\ &= \frac{1}{2}(2M)R^2 + (2M)(\frac{L}{4})^2 \\ &= MR^2 + \frac{1}{8}ML^2 \end{aligned}$$

Para la placa, utilizamos nuevamente teorema de Steiner, conociendo el momento de inercia de una placa de lados a y b, con respecto a su centro.

$$\begin{aligned} I_{placa} &= I_{CM} + md^2 \\ &= \frac{1}{12}M(a^2+b^2) + M(\frac{3L}{4})^2 \\ &= \frac{1}{12}M(a^2+b^2) + \frac{9}{16}ML^2 \end{aligned}$$

Así el momento de inercia final es la suma de los anteriores:

$$\begin{aligned} I_{sistema} = I_s &= I_{barra} + I_{disco} + I_{placa} \\ &= \frac{1}{3}ML^2 + MR^2 + \frac{1}{8}ML^2 + \frac{1}{12}M(a^2+b^2) + \frac{9}{16}ML^2 \\ &= \frac{49}{48}ML^2 + MR^2 + \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{aligned}$$

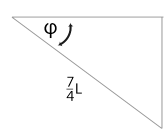
ii)Para encontrar la función de la velocidad usaremos conservación de la energía, con $U = 0$ la horizontal desde donde cae.

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\frac{1}{2} I_s \omega_i^2 + MgY_{cm} &= \frac{1}{2} I_s \omega_f^2 + MgY_{cm} \\
0 + 0 &= \frac{1}{2} I_o \omega_f^2 - MgY_{cm}
\end{aligned}
$$

De aquí, en primer lugar, cambiamos el signo de a segunda expresión potencial, pues sabemos que está bajo el potencial 0, es decir, bajo la horizontal, por otra parte, no conocemos *a priori* la posición del centro de masa, por lo que debemos calcularlo.
Para el cálculo de la posición del centro de masa, utilizaremos cuando la barra está horizontal, para no complicar el cálculo utilizando más de una componente:

$$
\begin{aligned}
\vec{r_{cm}} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\
&= \frac{\overbrace{\frac{L}{2}M}^{\text{barra}} + \overbrace{\frac{L}{4}2M}^{\text{disco}} + \overbrace{\frac{3L}{4}M}^{\text{placa}}}{M + 2M + M} \\
&= \frac{7}{4}L
\end{aligned}
$$

Luego para posición Y_{cm}, lo calculamos por trigonometría, con un triángulo de hipotenusa $\frac{7}{4}L$.



$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
0 + 0 &= \frac{1}{2} I_o \omega_f^2 - M_{total} g Y_{cm} \\
0 &= \frac{1}{2} I_s \omega_f^2 - 4Mg(\frac{7}{4} L \sin\phi) \\
0 &= \frac{1}{2} I_s \omega_f^2 - 7MgL \sin\phi \\
\implies \omega_f &= \sqrt{\frac{14MgL\sin\phi}{I_s}}
\end{aligned}
$$

iii) Sabemos que $\omega \cdot R = V$, por lo que solo resta reemplazar en la ecuación de energía, considerando que en este caso el ángulo inicial no es 0 sino $\frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\frac{1}{2}I_s\omega_i^2 + MgY_{cm} &= \frac{1}{2}I_s\omega_f^2 + MgY_{cm} \\
\frac{1}{2}I_s(\frac{v_0}{L})^2 - 7MgL\sin\frac{\pi}{2} &= \frac{1}{2}I_s\omega_f^2 - 7MgL\sin\phi \\
\implies \omega &= \sqrt{\frac{I_s(\frac{v_0}{L})^2 + 14MgL(\sin\phi - 1)}{I_s}}
\end{aligned}
$$

Ahora, la forma mínima de llegar a la horizontal es que la velocidad angular final sea 0. Utilizamos una de las expresiones anteriores, pero con $\phi_f = 0$

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\frac{1}{2}I_s\omega_i^2 + MgY_{cm} &= \frac{1}{2}I_s\omega_f^2 + MgY_{cm} \\
\frac{1}{2}I_s(\frac{v_0}{L})^2 - 7MgL\sin\frac{\pi}{2} &= 0 - 7MgL\sin 0 \\
\frac{1}{2}I_s(\frac{v_0}{L})^2 &= 7MgL \\
\implies v_0 &= \sqrt{\frac{14MgL^3}{I_s}}
\end{aligned}
$$