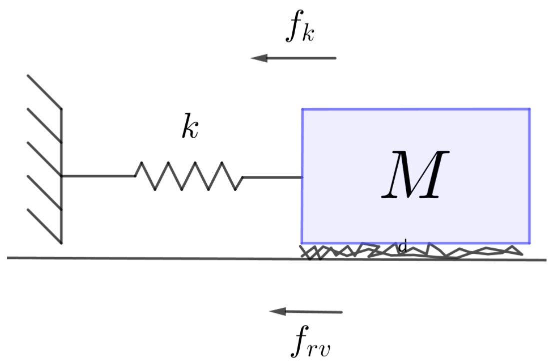
P1) Para resolver el problema lo primero es escribir el DCL del sistema



a) Para encontrar la frecuencia natural w_0 escribimos el DCL del sistema

$$\begin{aligned} Ma &= -f_k - f_{rv} \\ M\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + w_0^2 x &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

por lo tanto la frecuencia natural es

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{5} = 2{,}24 \;\; rad/s$$

b) La solución mas general a la ecuación (1) es

$$x(t) = A_0 e^{-t/2\tau}\cos(\Omega t + \phi)$$

Al desplazar inicialmente el cuerpo una distancia de 15 cm respecto de su punto de equilibrio obtenemos

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0{,}15 \\ &= A_0\cos(\Omega \cdot 0) \\ &\Rightarrow A_0 = 0{,}15 \;\; m \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que la amplitud (Definida como $A(t) = A_0 e^{-t/2\tau}$.) a $t = 3$ (A_3) es 7 cm, por lo tanto

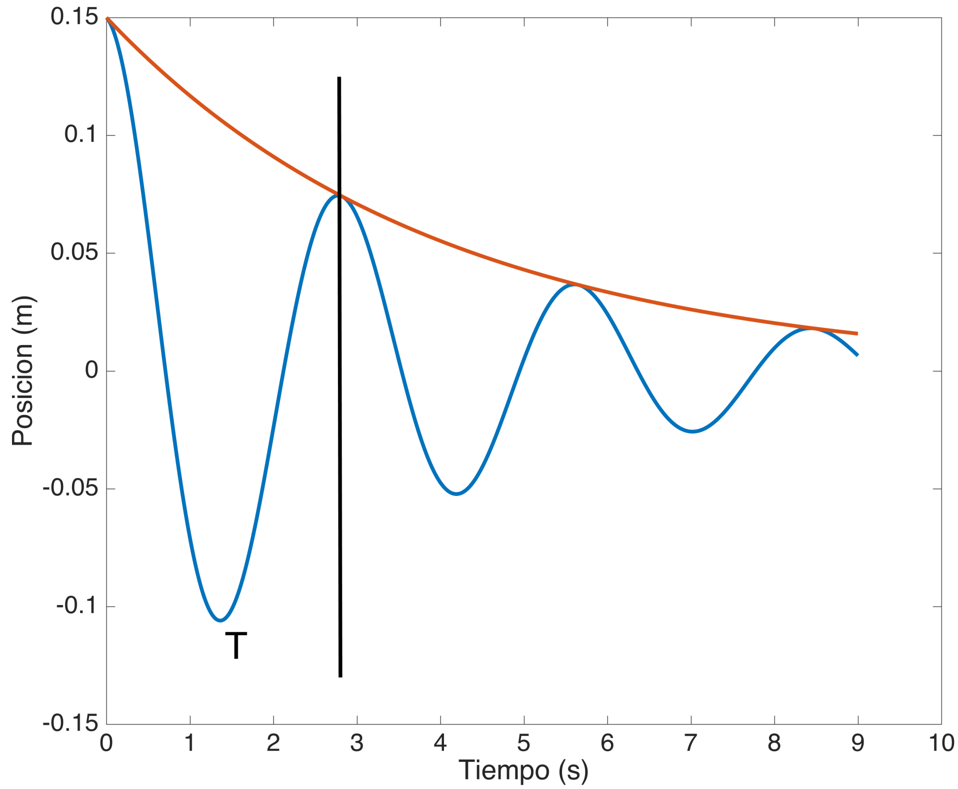
$$\begin{aligned} A(t=3) &= A_0 e^{-3/2\tau} = A_3 \\ -\frac{3b}{2m} &= \ln(A_3/A_0) \\ &\Rightarrow b = 0{,}25 \;\; kg/s \end{aligned}$$

c) La frecuencia con que oscila el cuerpo es $\Omega = 2{,}22$ rad/s

d) El tiempo necesario para que la amplitud decaiga a 1.5 cm (A^*) se obtiene de

$$\begin{aligned} A(t=t^*) &= A^* = A_0 e^{-t^*/2\tau} \\ \frac{A^*}{A_0} &= e^{-t^*/2\tau} \\ &\Rightarrow t^* = 9{,}21 \;\; s \end{aligned}$$

e) El periodo de oscilacion esta dado por $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = 2{,}83$ s



Pauta Control 2 Pregunta 2

P3: La figura muestra un disco, de radio R y masa M homogeneamente distribuida, que rueda sin resbalar sobre una superficie rugosa. El disco esta unido por su centro al extremo de un resorte de constante elástica k y largo natural l_0. El otro extremo del resorte esta unido a un pistón que realiza un movimiento oscilatorio, dado por $x_p(t) = A\sin[(\omega t)$. El sistema se encuentra sumergido en un fluido viscoso, de manera que el disco siente una fuerza de roce viscoso dado por $\vec{F}_{rv} = -b\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de su centro de masa con respecto a la superficie.

1. (3 pts.) Encuentre la ecuación de movimiento del disco.
2. (1.5 pts.) Escriba la expresion de la trayectoria del centro de masa del disco para tiempos largos.
3. (1.5 pts.) Bosqueje la amplitud de las oscilaciones del centro de masa del disco en funcióon de ω. Explique cualitativamente su bosquejo.

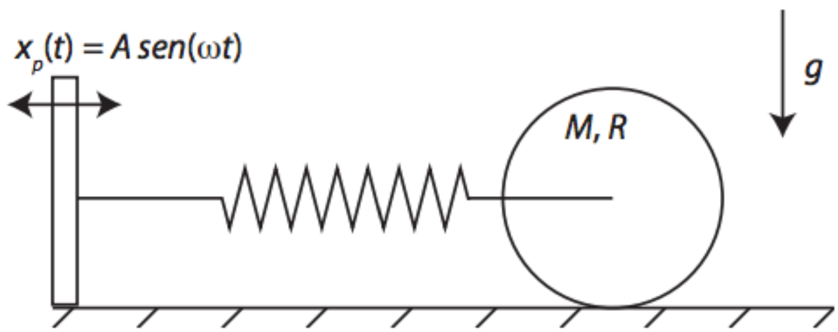


FIG. 1: Figura Problema 2 Control 2

Solución:

1.- La ecuación de movimiento del disco se puede encontrar planteando la ecuación de movimiento del centro de masa y de rotación con respecto al CIR (Centro instantáneo de rotación) que llamaremos $\mathcal{O}$. Tomando como referencia la posición de la pared en reposo (cuando $A = 0$), la ecuación que describe como se mueve el centro de masa $y(t)$ es

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -k(y(t) - x_p(t) - l_0) - b\frac{dy(t)}{dt} + f_r(t) \tag{1}$$

donde $f_r(t)$ es la fuerza de roce estático que permite que el disco ruede sin resbalar. La ecuación de torque con respecto a $\mathcal{O}$ es

$$\frac{I_{\mathcal{O}}}{R}\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -k(y(t) - x_p(t) - l_0)R - b\frac{dy(t)}{dt})R \tag{2}$$

donde hemos usado la condición geométrica $dy(t) = Rd\phi(t)$ con $\phi(t)$ el ángulo que describe el disco al girar. Sabiendo que el momento de inercia con respecto a $\mathcal{O}$ de un disco, usando Steiner es $I_{\mathcal{O}} = MR^2 + MR^2/2 = 3MR^2/2$, la ecuación para el centro de masa del disco es

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2b}{3M}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{2k}{3M}y(t) = \frac{2k}{3M}A\sin(\omega t) - \frac{2k}{3M}l_0 \tag{3}$$

Además encontramos que la fuerza de roce $f_r(t) = -\frac{M}{2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}$

2.- Para tiempos largos, luego de dejar pasar el transiente encontramos primero que la posición de equilibrio de $y(t)$ es l_0 (lo que es esperable ya que ese es el largo natural del resorte). Sobre esta posición de equilibrio se encuentra

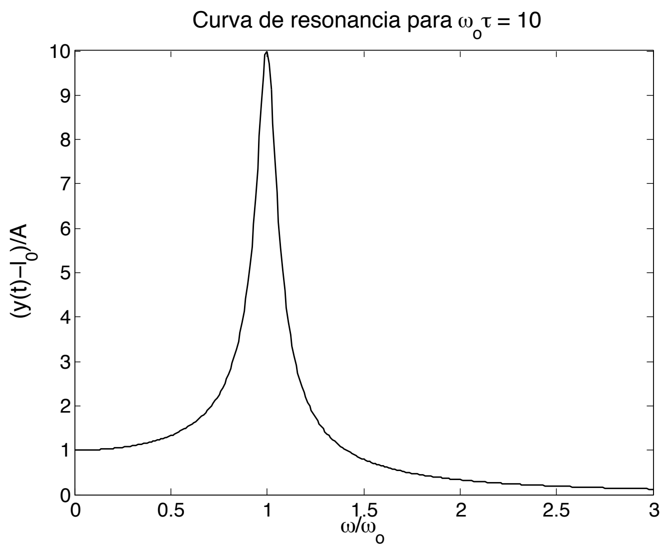
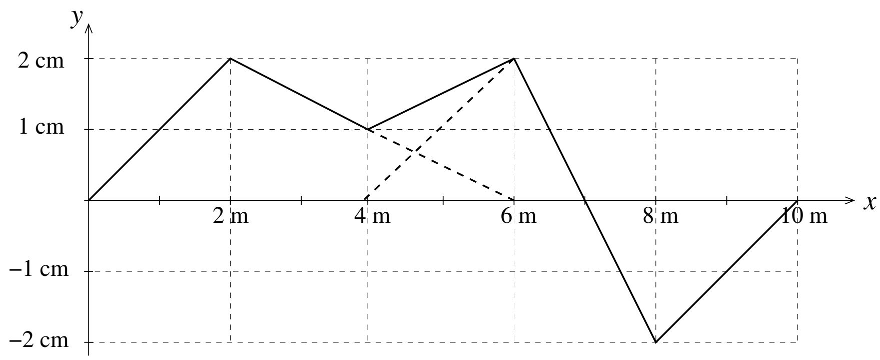


FIG. 2: Curva de resonancia

la oscilación a tiempos largos. De la ecuación (3) notamos que $\tau = \frac{3M}{2b}$, $\omega_o = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$ y $f_o = A\omega_o^2$.

3.- La curva de resonancia tiene la forma mostrada en la Figura 2. Utilizamos las variables normalizadas ω/ω_o y $(y(t) - l_0)/A$ por simplicidad. Así la curva tiene un máximo en 1 y su valor es $\omega_o\tau$.

a)



Para la asignacion de puntajes se debe considerar:
– La forma triangular de los pulsos. No son curvos
– La forma correcta de cada uno de los pulsos, tomando en cuenta los signos y las longitudes
– La superposicion de los dos pulsos en la region [4m,6m]

b)