Auxiliar #7- Rodadura

Sistemas Newtonianos FI1002-5 - Primavera 2017

Profesor: Raúl Muñoz - Auxiliares: Erick Pérez, Álvaro Ramírez y Manuel Torres[1]

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

Conceptos importantes de "Sólidos rígidos":

Motivación:
El movimiento de un objeto extendido, como una rueda que gira en torno a su eje, no se puede explicar al representar el objeto como una partícula: en cualquier momento diferentes partes del objeto tienen distintas velocidades y aceleraciones lineales. Sin embargo, el movimiento de un objeto extendido se analiza al representarlo como un conjunto de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración lineales.

Al tratar con un objeto en rotación, la explicación se simplifica mucho al suponer que el objeto es rígido. Un objeto rígido no es deformable; es decir, las ubicaciones relativas de todas las partículas de que está compuesto permanecen constantes. Todos los objetos reales son deformables en cierta medida; no obstante, el modelo de objeto rígido es útil en muchas situaciones en que la deformación es despreciable.

Comenzaremos extendiendo algunos conceptos del curso FI1001, donde se entendía el objeto como algo puntual, pero ahora serán vistos como un sistema compuesto, aunque es posible notar que gracias al concepto de çentro de masas", las nociones adquiridas para algunos conceptos seguirán actuando de igual o de forma análoga a lo ya acostumbrado:

Definición 1. *Centro de masas:*
La masa es una propiedad inherente a cada cuerpo, y es aditiva, para hacer un análisis de un sistema de partículas se utiliza el centro de masas (como por ejemplo para calcular el torque que realiza su peso), la idea del centro de masas es dividir el cuerpo en n celdas, donde cada celda tiene una masa m y una posición r, donde M es la masa total del cuerpo. entonces su centro de masas será:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

Esto lo podemos generalizar y podemos verlo desde un punto de vista macroscópico, donde el centro de masas entre dos cuerpos se puede obtener a partir de sus centros de masa.[2]

$$\vec{R}_{neto} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{R}_{cmi}$$

Observación 1. *Sobre el centro de masas*
Notamos que la definición anterior es independiente si la densidad del cuerpo es uniforme o no, aunque en este curso, por simplicidad se estudian cuerpos con densidad uniforme.

Definición 2. *Momentum lineal en un cuerpo:*
El momentum lineal en un sistema de n partícular se obtiene como la suma del momentum lineal de cada una por separado, o lo que es equivalente al producto de la masa total M y la velocidad V en el centro de masas R.

$$\vec{P}_{total} = \sum \vec{p}_i = M_{total}\vec{V}_{cm}$$

Definición 3. *Energía potencial gravitatoria en un cuerpo:*
La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m se puede obtener a partir de la posición del centro de masas del mismo:

$$U = gM_{total}R_{cm}$$

---

[1] Dudas y sugerencias al correo: manuel.torres@ug.uchile.cl

[2] Generalmente esta ecuación nos permite descomponer cuerpos complejos en elementos menores, lo que permite calcular un centro de masa fácil para cada elemento y luego componiéndolo se obtiene el centro de masa neto (ver problema 1 aux extra nro. 1)

Definición 4. *Momento de inercia:*
El momento de inercia refleja la distribución de la masa de un cuerpo en rotación y representa la oposición de un cuerpo a cambiar su estado de rotación, el momento de inercia SÓLO depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro, y se escribe de la siguiente forma:

$$I_o = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 \partial m = \int \rho r^2 \partial V$$

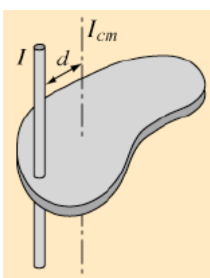
Donde m es la masa i-ésima y r la posición i-ésima de la masa, además se presentan generalizaciones de esta ecuación (integrales) las cuales permiten calcular la inercia de un cuerpo parametrizando, pero en éste curso las inercias serán de casos particulares por lo que serán conocidas.
Algunos momentos de inercia (Objetos de masa M)[3]

objeto	eje	momento de inercia I
masa puntual	a distancia d	Md^2
aro radio R	en su centro	MR^2
disco radio R	en su centro	$\frac{1}{2}MR^2$
cascarón esférico radio R	en su centro	$\frac{2}{3}MR^2$
esfera radio R	en su centro	$\frac{2}{5}MR^2$
barra largo L	en su extremo	$\frac{1}{3}ML^2$
placa lados a y b	en su centro	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$

Ahora veremos dos teoremas necesarios para poder calcular la inercia bajo ciertas condiciones:

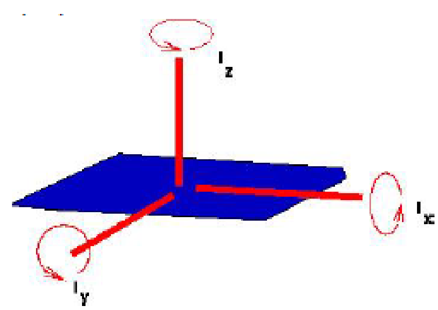
Teorema 1. *Ejes paralelos o "Steiner":*
Podemos obtener el momento de inercia de un cuerpo para cualquier eje de rotación paralelo al eje de giro a partir de I_{cm}, realizando un "desplazamiento"donde d es la distancia entre el centro de masas y el eje de giro.

$$I_o = I_{cm} + Md^2$$



Teorema 2. *Ejes perpendiculares:*
Para un cuerpo plano, si I_x e I_y son los momentos de inercia con respecto a ejes en el plano e I_z con respecto a un eje perpendicular, entonces:

$$I_z = I_x + I_y$$



Observación 2. *Masa inercial v/s Momento de inercia*
Existe una gran diferencia entre masa y momento de inercia. La masa es una propiedad inherente de un objeto, mientras que el momento de inercia de un objeto depende de su elección del eje de rotación.
Por lo tanto, no hay un solo valor del momento de inercia para un objeto. Existe un valor mínimo del momento de inercia, que es el calculado en torno a un eje que pasa a través del centro de masa del objeto.

Definición 5. *Energía cinética de rotación:*
Podemos escribir la energía cinética en un movimiento rotacional cuando hay una velocidad angular $\overrightarrow{w}(t)$ en un eje fijo de la siguiente forma:

$$K = \frac{I_o w^2}{2}$$

[3] Inercias utilizadas en el curso (recomendable memorizar)

Definición 6. *Momento angular:*[4]
El momentum angular se define como:

$$\vec{L}_{neto} = \sum \vec{l}\, i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) m_i$$

Definición 7. *Torque:*
El torque respecto a un punto O se define como:

$$\vec{T}_o = \sum \vec{t}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = I_o \alpha$$

Donde $\vec{r}_i$ es el radio desde el punto O hasta donde se aplica la fuerza $\vec{f}_i$, y α es la aceleración angular del cuerpo

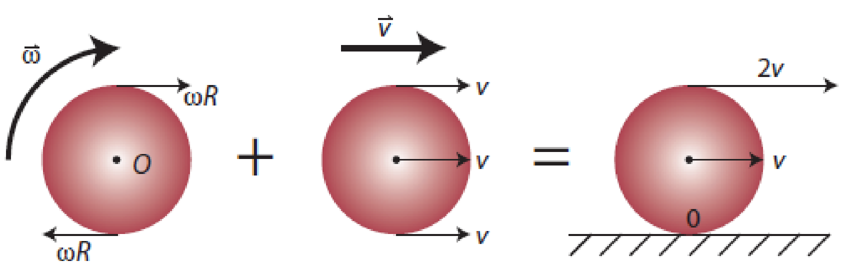
Observación 3. *Algunos comentarios sobre el torque:*
a)Debemos darnos cuenta que con lo visto hasta ahora, podríamos entender el torque como un concepto análogo a la fuerza pero en rotaciones.
b)Además así como la fuerza es la derivada temporal del momentum lineal, análogamente el torque es la derivada temporal del momentum angular.

Definición 8. *Condición de equilibrio (Estática):*
Entenderemos a equilibrio estático como la condición en la cual un cuerpo que está sometido esta inmóvil y esta condición no se altera en el tiempo.

$$\sum \vec{T} = 0 \wedge \sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{V}_{cm} = 0 \wedge \vec{w} = 0$$

Definición 9. *Condición de rodadura perfecta:*[5]
La rodadura perfecta es la composición de dos movimientos por separado, la traslación pura con velocidad V_{cm} y la rotación puta con velocidad angular w, esto da como resultado un movimiento en el que no hay deslizamientos (osea el cuerpo no fricciona con la superficie).



Observación 4. *Conservación de la energía en la rodadura:*
Podemos decir que la energía se conserva a que al tener rodadura (no hay deslizamientos) no tenemos fricción, por lo que ántes se perdía de energía por el roce, ahora pasa a ser energía cinética rotacional.
En el eje fijo O (sobre el centro de masas) se tenía que la energía cinética es $K = \frac{I_{cm} w^2}{2}$, pero esta expresión cambia cuando el eje instantáneo de rotación se mueve, teniendo $K = \frac{I_p w^2}{2}$, oséa ahora se utiliza la inercia en el eje fijo P.

$$K = \frac{I_{cm} w^2}{2} + \frac{m V_{cm}^2}{2} = \frac{I_p w^2}{2}$$

Demostración 1. *Energía cinética bajo condición de rodadura:*[6]
Queremos corroborar que:

$$K = \frac{I_{cm} w^2}{2} + \frac{m V_{cm}^2}{2} = \frac{I_p w^2}{2}$$

[4] Ver la demostración en la pauta del control de lectura 5
[5] Se explicará con detalle en la clase auxiliar del día Lunes 2 de Octubre.
[6] El siguiente desarrollo es MUY importante saber realizarlo ya que es una herramienta fundamental para resolver los problemas utilizando conservación de la energía.

Tenemos que en el centro de masas durante una rodadura en un punto P, hay dos componentes para la energía cinética, lo que podemos obtener superponiendo ambos movimientos que componen la rodadura, entonces:

$$K = \frac{I_{cm}w^2}{2} + \frac{mV_{cm}^2}{2}$$

Pero por condición de rodadura sabemos que $V_{cm} = wR$

$$\Rightarrow K = \frac{I_{cm}w^2}{2} + \frac{m(wR)^2}{2}$$

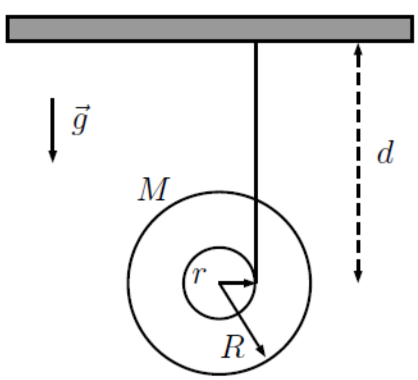
$$\Rightarrow K = \frac{w^2(I_{cm} + mR^2)}{2}$$

Como se puede notar tenemos el teorema de Steiner, por lo que:

$$\Rightarrow K = \frac{w^2 I_p}{2}$$

Problemas de rodadura:

P1. (**Pregunta para revisar conceptos**) Un yo-yo está formado por dos discos uniformes cada uno de masa M y radio R. Uniendo estos discos hay un eje de radio r y masa despreciable. Un hilo se enrolla en torno a este eje y su extremo se sostiene desde una cierta altura. En un instante, el yo-yo se deja caer, partiendo del reposo. Inicialmente se encuentra a una distancia D, del extremo superior del hilo. Encuentre la aceleración del centro del yo-yo.

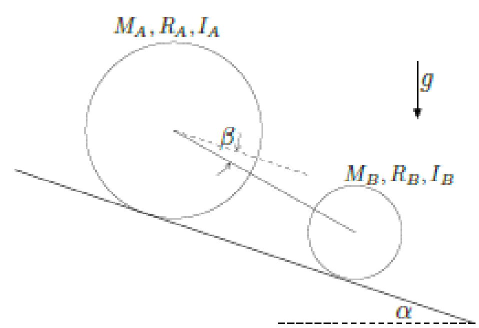


P2. (**Pregunta de control**) Se tienen dos cilindros de masas Ma y Mb, radios Ra y Rb y momentos de inercia respecto a sus centros Ia e Ib, tales que:

$$\frac{I_A}{M_A R_A^2} > \frac{I_B}{M_B R_B^2}.$$

Los cilindros se mueven sobre un plano inclinado en un ángulo, rodando sin resbalar, debido al roce estático con la superficie. Los cilindros están unidos por su centro mediante una cuerda ideal que forma un ángulo con respecto al plano inclinado.

a) Determine la aceleración del sistema
b) Calcule la tensión de la cuerda



P3. (**Pregunta de control**) Un cilindro de radio a y masa m se encuentra en el punto más alto de un semicilindro de radio R, con el cual tiene un coeficiente de roce estático μ. En cierto instante, el cilindro es sacado de su punto de equilibrio y comienza a rodar sin resbalar sobre el semicilindro.
a)Plantee la ecuación de movimiento del centro de masa del cilindro mientras que éste rueda sin resbalar.
b)Encuentre la velocidad del centro del cilindro en función del ángulo theta mientras que rueda sin resbalar.