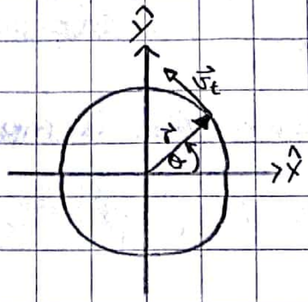
NOTAS: **Resumen de oscilaciones:** FECHA / / /

Manuel Torres Valdebenito

Vectores unitarios: $\hat{\theta} = -sen(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$

$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{i} + sen(\theta)\hat{j}$

* se tiene que en un movimiento circular $\hat{\theta} = \hat{v}_t$



Movimiento circular:

* Ecuación de posición:

$\vec{r} = r\cos(\theta)\hat{i} + r\,sen(\theta)\hat{j}$, donde $\theta = \omega_0 t + \varphi$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = r\cos(\omega_0 t + \varphi)\hat{i} + r\,sen(\omega_0 t + \varphi)\hat{j}$

* Ecuación de velocidad:

$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = -r\omega_0\,sen(\omega_0 t + \varphi)\hat{i} + r\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)\hat{j}$

* Ecuación de aceleración:

$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}(t)$

$\Rightarrow \vec{a}(t) = -r\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)\hat{i} - r\omega_0^2\,sen(\omega_0 t + \varphi)\hat{j}$

Función de posición angular:

$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{\alpha t^2}{2}$, movimiento circular uniforme acelerado.
como $\alpha \neq 0 \Rightarrow \omega$ no es cte.
α es cte.

$\theta = \theta_0 + \omega t$, movimiento circular uniforme.
$\alpha \neq 0 \Rightarrow \omega$ es constante.

NOTAS: FECHA / / /

Función de velocidad angular:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$, donde α es constante dependiente del tiempo.

Movimiento angular independiente del tiempo:

* Se tiene que $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$, donde $\omega = \omega(\theta)$, se encuentra en función del ángulo:

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega = \alpha$$

$$\Rightarrow \omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega_f} \omega\, d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \alpha\, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{2}\Big/_{\omega_0}^{\omega_f} = \alpha(\theta_f - \theta_0)$$

$$\Rightarrow \omega_f^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$ → ecuación independiente del tiempo, proviene de las ecuaciones de energía.

Movimiento armónico simple:

* 2da Ley de Newton: $\Rightarrow \Sigma F_x = m a_x = \frac{dp_x}{dt}$

* Ley de Fuerza: $\Rightarrow F = -Kx$

No es Ley de Hooke, ya que es un caso particular para la fuerza de un resorte.

NOTAS: FECHA / / /

$$\Rightarrow m a_x = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} + mx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{K}{m}\right)x = 0 \quad , \text{ donde } \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

* Solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = A\cos(\theta) \quad , \text{ donde } \theta = \omega t + \varphi$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{A}_{\text{amplitud}}\cos(\omega t + \underbrace{\varphi}_{\text{desfase}})$$

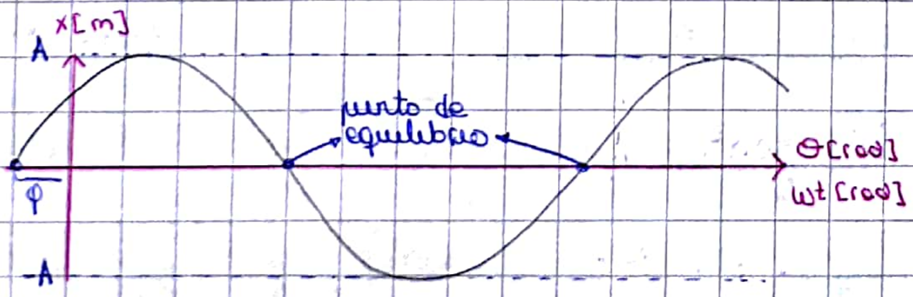
Cinemática de un movimiento armónico simple:

1) Posición: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

2) Velocidad: $v(t) = -A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\cdot\omega$

3) Aceleración: $a(t) = -A\cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega^2 \Leftrightarrow a(t) = -\omega^2\cdot x(t)$

Gráfico:



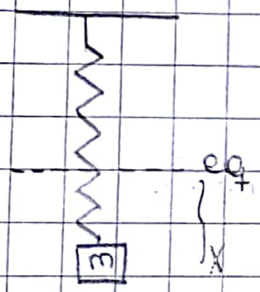
Energía de un movimiento armónico simple:

* No hay roce y F puede ser el peso:

$$U = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx \Rightarrow U = \int_{x_i}^{x_f} -Kx\,dx = \frac{-Kx^2}{2}\Big/_{x_i}^{x_f}$$

$\Rightarrow U = \frac{-Kx^2}{2}\Big/_{x_i}^{x_f}$, donde $x_f = 0[m]$ ya que tiende al equilibrio

$\Rightarrow U = \frac{Kx^2}{2}$, corresponde a la energía potencial elástica.



* Energía Total del sistema:

$E = U + K = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$, donde $x = A\cos(\theta)$, $v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\theta)$

$\Rightarrow E = \frac{mA^2\omega^2 \mathrm{sen}^2(\theta)}{2} + \frac{KA^2\cos^2(\theta)}{2}$, $\omega^2 = K/m$

$\Rightarrow E = \frac{A^2K\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{2} + \frac{KA^2\cos^2(\theta)}{2}$

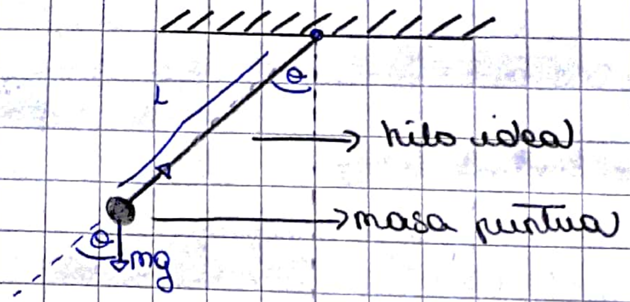
$\Rightarrow E = \frac{A^2K}{2}\left(\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)$

$\Rightarrow E = \frac{A^2K}{2}$

* Conservación de la energía mecánica:

$$\frac{A^2K}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$$

Péndulo simple:



* Movimiento armónico simple: $\Rightarrow \tau_o = -K\theta$

* Dinámica rotacional $\Rightarrow \tau_o = -Lmg\,\text{sen}(\theta)$

* Inercia $\Rightarrow \tau_o = I_o\alpha$

$$\Rightarrow I_o\ddot{\theta} = -K\theta \Rightarrow I_o\ddot{\theta} + K\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{K}{I_o}\right)\theta = 0$$

donde: $I_o = mL^2$ (Steiner), además $Lmg\,\cancel{\text{sen}(\theta)} = K\cancel{\theta} \Rightarrow Lmg = K$

$$\Rightarrow \frac{K}{I_o} = \frac{Lmg}{L^2m} = \left(\frac{g}{L}\right) \Rightarrow \frac{g}{L} = \omega_o^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega$$

* Periodo y frecuencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow f = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{1}{2\pi} \quad \text{y} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

* Solución de la ecuación diferencial:

$$\theta(t) = \underbrace{\theta_o}_{\text{Amplitud}} \cos(\omega.t + \underbrace{\varphi}_{\text{desfase}})$$, cuando $\text{sen}\,\theta = \theta$ es un movimiento armónico

* Integral elíptica.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\text{sen}^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}\text{sen}^4\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \ldots\right)$$

NOTAS: FECHA / / /

Cinemática de un péndulo simple:

1) Posición: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

2) Velocidad: $\omega(t) = -\theta_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\omega$

3) Aceleración: $\alpha(t) = -\theta_0 \cos(\omega t + \varphi)\omega^2 \Leftrightarrow \alpha(t) = -\omega^2 \cdot \theta(t)$

Péndulo físico:

* Corresponde a un péndulo real que no puede ser aproximado como una masa puntual (péndulo simple) atada a un péndulo ideal, osea cualquier caso en que el momento de inercia difiera de mL^2, con m = masa puntual y L = radio de giro

* Momento de inercia: $I_0 = I_{CM} + I_{steiner}$

$$\Rightarrow I_0 = I_{CM} + mL^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{I_0} = \frac{mgL}{I_{CM} + mL^2} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_{CM} + mL^2}}$$

Oscilaciones amortiguadas:

* Se tiene que en un movimiento oscilatorio amortiguado actúan dos tipos de fuerzas:

1) Fuerza restauradora: $\rightarrow F_r = -Kx$

2) Fuerza disipadora: $\rightarrow F_d = -bv$

K: constante elástica
b = constante de amortiguac
v = velocidad
x = posición

NOTAS: FECHA / / /

* Por segunda ley de Newton se tiene:

$F_x = ma_x = F_r + F_f$

$\Rightarrow ma_x = -Kx - bv$

$\Rightarrow ma_x + bv + Kx = 0$

$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0$

* Solucion ecuación diferencial:

$x(t) = Ae^{\frac{-bt}{2m}} \cos(\omega t + \phi)$, cuando b es pequeño