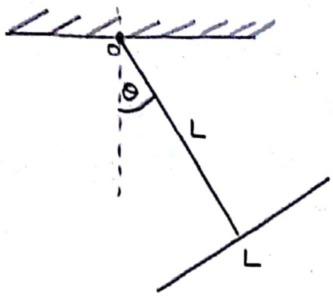
Pauta auxiliar 9:

P2



a) Es posible notar que tenemos un péndulo físico, y su ecuación de movimiento viene dada por:

$$I_0 \ddot{\theta} = -M_t \cdot g \cdot r_{CM} \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

Bajo la condición de pequeñas oscilaciones tenemos entonces:

$$\boxed{I_0 \ddot{\theta} = -M_t g\, r_{CM} \theta}$$

*Obs: Casi siempre podemos saltarnos la suma de torque ya que sabemos la ecuación de movimiento del péndulo físico, pero hay que tener cuidado con el ángulo, ya que puede ocurrir que el ángulo de interés sea $(\pi/2 - \alpha)$

*Obs: Para resolver la EDO, es condición necesaria dejar expresado $\operatorname{sen}(\beta)$ y no $\cos(\alpha)$ cuando α y β son complementarios.

Ahora necesitamos hallar I_0 y r_{CM} para nuestra ecuación de movimiento: (respecto al punto de giro)

$$r_{CM} = \frac{\cancel{m} \cdot \frac{L}{2} + \cancel{m} \cdot L}{2\cancel{m}} = \frac{3L}{4}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} mL^2 + \left(\frac{1}{12} mL^2 + mL^2\right) = \frac{17}{12} mL^2$$

Reemplazando en la ec. de movimiento se obtiene:

$$\left(\frac{17}{12} \cancel{m} L^{\cancel{2}}\right) \ddot{\theta} + 2\cancel{m} g \left(\frac{3\cancel{L}}{4}\right) \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{\cancel{2}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{12}}{17L}\right) \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{18}{17} \cdot \frac{g}{L}\, \theta = 0$$

Donde se cumple que:

$$\frac{18g}{17L} = W_0^2 \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{18g}{17L}} = W_0$$

b) Ahora debemos hallar la frecuencia de oscilación del sistema cuando hay roce (oscilación amortiguada), para ello primero debemos aclarar conceptos:

- Frecuencia de oscilación:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}$$

- Frecuencia natural

$\omega_0^2 = \frac{mg\, r_{CM}}{I_0}$ a partir de un péndulo

$\omega_0^2 = \frac{K_{eq}}{m}$ a partir de la ley de hooke

- Tiempo de amortiguamiento:

$\tau = \frac{m}{b}$ cuando hay roce (con coef. de roce b).

A priori podemos notar que, cuando no hay roce es por que el medio (o el vacío) presenta un coef. de roce $b \to 0 \Rightarrow b = 0$.
Como $b \to 0 \Rightarrow \tau \to \infty^+$, osea, si no hay roce, el sistema tardará infinito en amortiguar (en otras palabras, no lo hará nunca).

En un movimiento armónico simple se tiene $b = 0 \Rightarrow \tau \to \infty^+$ lo que implica:

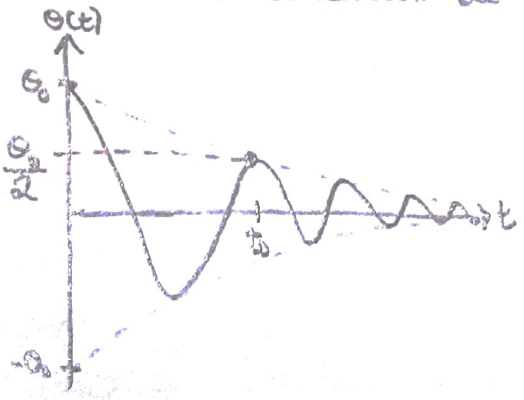
$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2},\ \tau \to \infty^+ \Rightarrow \Omega = \omega_0$$

La frecuencia de oscilación coincide con la frecuencia natural, lo que muchas veces genera un alcance de conceptos.

Aclarado todo esto, procedemos a buscar la frecuencia de oscilación en presencia de roce. (Nos saltamos la suma de torque, ya que conocemos la solución de la ecuación de movimiento:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/2\tau} \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

Tenemos la condición de que $\theta(t_0) = \frac{\theta_0}{2}$, gráficamente se ve así:



*La amplitud máxima disminuye a $\frac{\theta_0}{2}$, no me importa cuantos ciclos ocurrieron.

Como es muy difícil despejar Ω a partir de la ecuación de $\theta(t)$, además no conocemos b, ni τ, por lo que haremos un análisis muy astuto que se puede utilizar en estos casos.

Nuestro objetivo será ignorar el factor $\cos(\Omega t+\varphi_0)$ bajo el siguiente argumento. (análogo para $\text{sen}(\cdot)$)

$$-1 \leq \cos(f(t)) \leq 1$$

$$\Rightarrow -\theta_0 \leq \theta_0 \cos(f(t)) \leq \theta_0$$

$$\Rightarrow -\theta_0 e^{-t/2\tau} \leq \theta_0 e^{-t/2\tau} \cos(f(t)) \leq \theta_0 e^{-t/2\tau}$$

Podemos notar que la oscilación está acotada por dos curvas exponenciales, las cuales corresponden a los máximos y mínimos de la oscilación.

Como conocemos dos puntos máximos, enfocaremos el análisis sobre la cota superior.

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(t_0) = \theta_0/2$$

Como en ambos puntos la expresión $\cos(f(t)) = 1$ nos permite el siguiente despeje.

$$\theta(t_0) = \frac{\cancel{\theta_0}}{2} = \cancel{\theta_0} e^{-t_0/2\tau}$$

$$\Rightarrow \ln(1/2) = \frac{-t_0}{2\tau}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{-t_0}{2\ln(1/2)} = \frac{t_0}{2\ln(2)}$$

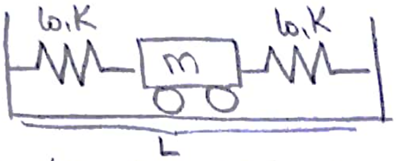
y como conocemos ω_0 (no cambia en caso de haber roce)

$$\Rightarrow \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{18g}{17L} - \left(\frac{\ln(2)}{t_0}\right)^2} \quad //$$

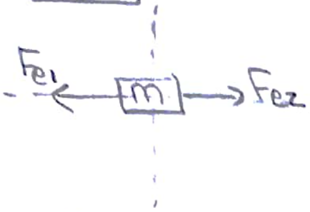
<u>Nota final:</u> Este problema no es difícil y su desarrollo es corto, pero entenderlo en detalle es de gran ayuda para aclarar dudas frecuentes sobre los contenidos.

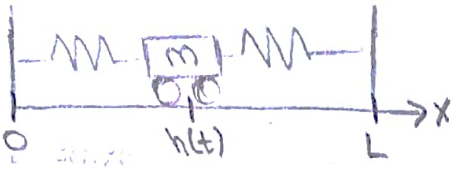
P3 (Esto problema quedó propuesto)



a) Buscamos la ecuación de movimiento:

DCL)





Además instauramos un sistema de referencias conveniente, y realizando la suma de fuerzas que nos interesa obtenemos:

$\hat{x})\ -F_{e1}+F_{e2}=m\ddot{x}$

Donde $x(t)=h(t)-L/2$, donde $L/2$ es la posición de equilibrio

$\Rightarrow \ddot{x}(t)=\ddot{h}(t)$

$\Rightarrow -F_{e1}+F_{e2}=m\ddot{h}(t)$

Desarrollando las expresiones (El por qué quedó propuesto en clases):

$\Rightarrow -K(h(t)-l_0)+K(L-h(t)-l_0)=m\ddot{h}(t)$

$\Rightarrow -2Kh(t)+KL=m\ddot{h}(t)$

$\Rightarrow -2K(h(t)-L/2)=m\ddot{h}(t)$

Analizando esta expresión tenemos algo del tipo $-K\Delta x$, donde $K_{eq}=2K$ y $\Delta x=h(t)-L/2$, donde $L/2$ es la posición de equilibrio, limpiando la ecuación:

$\Rightarrow \ddot{h}(t)+\frac{2K}{m}(h(t)-L/2)=0$

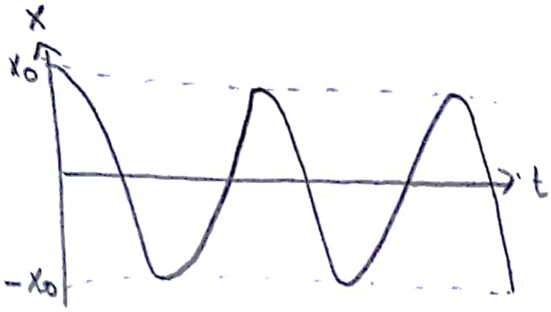
$\Rightarrow \frac{2K}{m}=\omega_0^2$, donde ω_0 es un dato del enunciado.

$\Rightarrow K=\frac{\omega_0^2 m}{2}$

b) Como sabemos que la ecuación de movimiento cuando hay roce sólo suma el término asociado:

$\Rightarrow \ddot{x}(t)+\frac{1}{\tau}\dot{x}(t)+\frac{2K}{m}x(t)=0$

c) Cuando $T \ll \tau$, digamos $\tau \to \infty^+$, podemos asumir una oscilación casi armónica, si es que no.



Cuando $T \gg \tau$, digamos $\tau \to 0$, podemos decir que se amortigua casi instantaneamente:

$\boxed{P4}$ (Verdadero y falso)

a.- Falso, ya que depende de la constante de fase φ_0

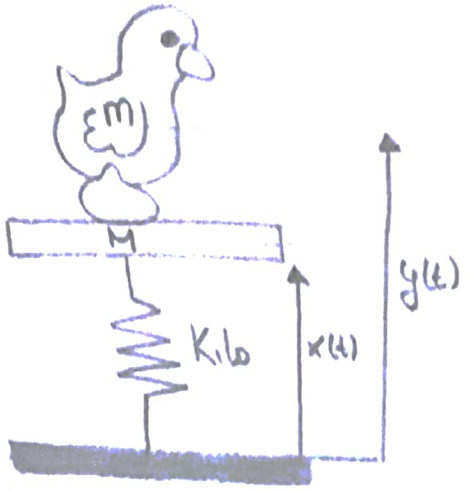
b.- Falso, τ entrega una noción del decaimiento, pero el sistema toma $t \to \infty^+$ en detenerse.

c.- Falso. Ω es la frecuencia de oscilación que depende de la frecuencia natural ω_0

d.- Falso

S

P5 Oscilación Forzada: (Propuesto)

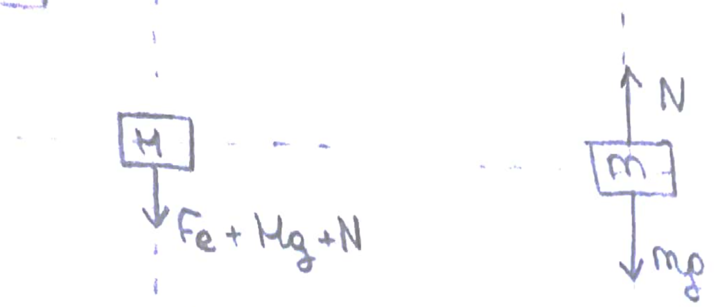


$y(t) - x(t) = y_a(t)$

a)

El régimen estacionario es mucho después del inicio

DCL)



Ecuaciones)

$$N - mg = m\ddot{y}(t) \qquad (1)$$

$$-N - K(x-L) - Mg = M\ddot{x}(t) \qquad (2)$$

$$y(t) - x(t) = h_a + D\cos(\Omega t) \qquad (3)$$

Buscamos resolver este sistema, a continuación se presentará el desarrollo sin el análisis explicativo, ya que en próximas clases se profundizará el estudio en estos métodos de resolución.

(1) y $(2) \Longrightarrow -(m\ddot{y} + mg) - K(x-L) - Mg = M\ddot{x}$

$(3) \Longrightarrow \ddot{y} - \ddot{x} = -D\Omega^2\cos(\Omega t)$

$$\Rightarrow -m(\ddot{x} - D\Omega^2\cos(\Omega t)) - mg - K(x-L) - Mg = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow mD\Omega^2\cos(\Omega t) = (M+m)\ddot{x} + K(x-L) - (M+m)g$$

$$\Rightarrow mD\Omega^2\cos(\Omega t) = (M+m)\ddot{x} + K\left(x - L - (M+m)g/K\right)$$

Donde hacemos un cambio de variable:

$$x - L - (M+m)\frac{g}{K} = z \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{z}$$

$$\Rightarrow mD\Omega^2\cos(\Omega t) = (M+m)\ddot{z} + Kz$$

$$\Rightarrow \frac{mD\Omega^2\cos(\Omega t)}{M+m} = \ddot{z} + \frac{K}{M+m} z$$

Tenemos que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

$$B(\Omega) = \frac{\left(\frac{mD\Omega^2}{M+m}\right)}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Ahora con esto podemos reemplazar en la solución del movimiento forzado. (queda propuesto).

Dudas y sugerencias: manuel.torres@ug.uchile.cl