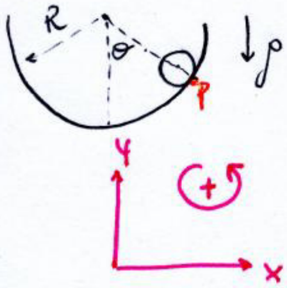
Auxiliar #8.
Oscilaciones.

Problema 1 (Movimiento armónico simple)



Esferita de radio r menor que R.
R radio del casquete cilíndrico
Esferita rueda sin resbalar.
La idea es encontrar el periodo de oscilación.

1. Escribir ec. de mov.

Como ecs. de movimiento podemos usar suma de fuerzas o de torques, cuando el movimiento de la esferita es circular y no lineal, usamos suma de torques.

$$\sum \tau_P : \quad I_P \alpha = -r\, mg \,\text{sen}\, \theta \qquad (1)$$

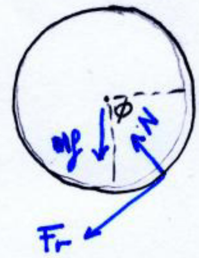
c/r al punto P para que la Normal y la fuerza de roce no hagan torque

Donde $I_P = I_{cm} + m r^2$

$$= \frac{2}{5} m r^2 + m r^2$$

$$= \frac{7}{5} m r^2$$

DCL Esferita



Ahora veamos relaciones geométricas:

Como rueda sin resbalar:

$$x_{cm} = r\phi$$

$$a_{cm} = r\alpha \qquad (2)$$

Como el centro de masa realiza un movimiento circunferencial:

$$x_{cm} = (R-r)\theta$$

$$a_{cm} = (R-r)\ddot{\theta} \qquad (3)$$

igualando (2) y (3): $\quad \alpha = \frac{(R-r)}{r}\ddot{\theta}$

Remplazando en (1):

$$\frac{7}{5} m r^2 \cdot \frac{(R-r)}{r}\ddot{\theta} = -r\, mg \,\text{sen}\,\theta.$$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{5 g \,\text{sen}\,\theta}{7(R-r)}}$$ Ec. de movimiento.

2. Hacer aproximación de peq. oscilaciones.

En la ecuación de movimiento tenemos un sen θ.
Para pequeñas oscilaciones: $\boxed{\operatorname{sen}\theta \approx \theta}$.

3. Obtener ec. diferencial.

Remplazamos la aproximación de p.o. En la ec. de movimiento.

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R-r)}\theta .$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\theta = 0}$$

Ec. diferencial
Mov. Armonico simple.

4. Encontrar frecuencia de oscilación.

identificamos la frecuencia en la ec. anterior:

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R-r)}$$

$$\boxed{\omega_0 = \left(\frac{5g}{7(R-r)}\right)^{1/2}}$$

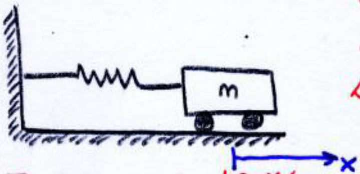
5. Encontrar periodo.

Sabemos que el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$\boxed{T = 2\pi\left(\frac{5g}{7(R-r)}\right)^{1/2}}$$

Problema 2

Oscilador en medio viscoso.
Empieza desde el reposo con amplitud A.
Luego de 5 ciclos la amplitud es $\frac{A}{3}$.



$T = 2s$. $\gamma = 10\ m/s^2$
$m = 1Kg$

1. Escribir ec. de mov.

Como el movimiento del carrito es sólo en una dirección hacemos suma de fuerzas.
Fijamos el origen en el punto de equilibrio.

$F_{rv} \longleftarrow \boxed{m} \longrightarrow F_e.$

$$F_{rv} = -\gamma v$$
$$F_e = -kx$$

Siempre se cumple.

Hacemos suma de fuerzas en x:

$$\boxed{a_x m = -\gamma v - kx}$$ Ec. de mov.

2. Encontrar ec. diferencial.

Tenemos $a_x = \ddot{x}$ $\quad v = \dot{x}$

$$\ddot{x} m = -\gamma \dot{x} - kx$$

$$\boxed{\ddot{x} + \left(\frac{\gamma}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0}$$ Ec. diferencial oscilador amortiguado.

3. Determinar frecuencia natural de oscilación.

De la ec. anterior se obtiene:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

$$\boxed{\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

4. Determinar coef. de roce γ.

De la ec. diferencial obtenemos.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}$$

$$\gamma = \frac{m}{\tau}$$

Entonces falta encontrar τ.

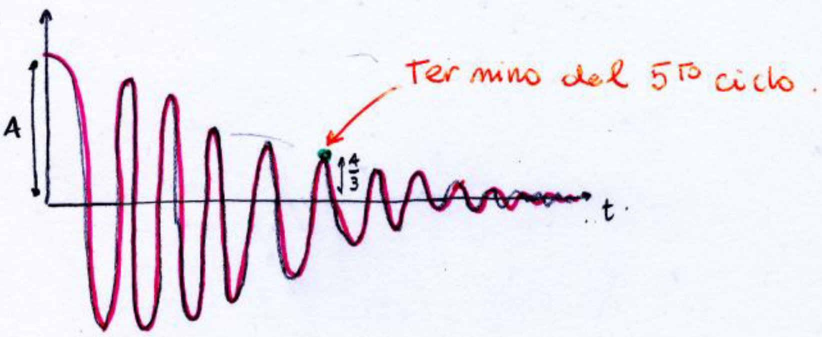
Sabemos que la solución a la ec. del oscilador amortiguado es : $x(t) = C e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_0)$.

Por los datos del problema.

Se suelta desde el reposo con amplitud A $\longrightarrow$ $C = A$, $\varphi_0 = 0$

Quedando :

$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t)$$



Por enunciado $x(5T) = \frac{A}{3}$.

Remplazando :

$$x(5T) = A e^{-\frac{5T}{2\tau}} \underbrace{\cos(\Omega 5T)}_{1} = \frac{A}{3} \longrightarrow e^{-5T/2\tau} = \frac{1}{3} \quad / \ln()$$

$$-\frac{5T}{2\tau} = \ln(1/3)$$

$$\tau = \frac{-5T}{2\ln(1/3)}$$

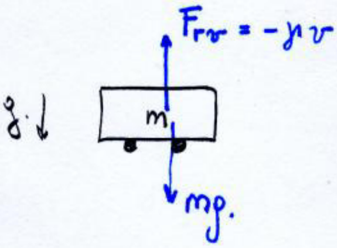
Remplazamos en γ:

$$\gamma = \frac{m}{\tau} = \frac{-2m \ln(1/3)}{5T}$$

y numéricamente :

$$\boxed{\gamma = \frac{-\ln(1/3)}{5}}$$

5. Si el mismo carrito hace caída libre, desde el reposo, en el mismo medio. Cual es la velocidad terminal v_T.



Hacemos suma de fuerzas:

$$ma = -\gamma v - mg$$

Cuando hay velocidad terminal $a = 0$.

$$0 = -\gamma v_T - mg$$

$$v_T = \frac{-mg}{\gamma}$$

Remplazamos numéricamente.

$$v_T = \frac{-10}{\frac{-\ln(1/3)}{5}} = \frac{50}{\ln(1/3)}$$

$$\boxed{v_T = \frac{50}{\ln(1/3)}}$$