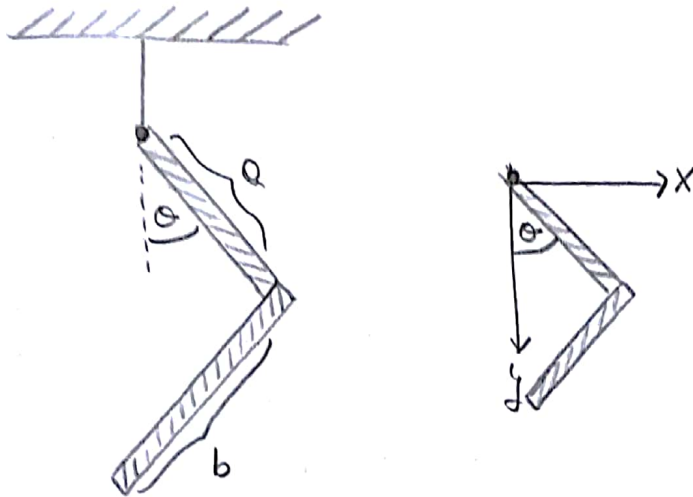


Punta auxiliar extra C18)

P1



El centro de masa en esta escuadra será:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M_a \cdot \vec{R}_a + M_b \cdot \vec{R}_b}{M_a + M_b}$$

Como el cuerpo es "uniforme", podemos decir que existe una densidad ρ , entonces:

$$M_a = a \cdot \rho \quad \wedge \quad M_b = b \cdot \rho$$

Por otro lado, hallaremos $\vec{R}_a$ y $\vec{R}_b$:

$\vec{R}_a$

Diagram of the first segment of length 'a' at an angle 'theta' to the vertical. The center of mass $\vec{R}_a$ is located at the midpoint of this segment.

tenemos que $|\vec{R}_a| = \frac{a}{2} \Rightarrow \vec{R}_a = \left(\frac{a}{2} \text{sen} \theta, \frac{a}{2} \text{cos} \theta \right)$

$\vec{R}_b$

Diagram of the second segment of length 'b' starting from the end of the first segment. The center of mass $\vec{R}_b$ is located at the midpoint of this segment. The diagram shows the vector $\vec{R}_b$ as the sum of two vectors $\vec{r}_1$ and $\vec{r}_2$.

Notemos que $\vec{R}_b = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, $|\vec{r}_1| = a$ $\wedge$ $|\vec{r}_2| = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow \vec{r}_1 = (a \text{sen} \theta, a \text{cos} \theta)$ $\wedge$ $\vec{r}_2 = \left(-\frac{b}{2} \text{cos} \theta, \frac{b}{2} \text{sen} \theta \right)$

$\Rightarrow \vec{R}_b = \left(a \text{sen} \theta - \frac{b \text{cos} \theta}{2}, a \text{cos} \theta + \frac{b \text{sen} \theta}{2} \right)$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{a \rho \left(\frac{a}{2} \text{sen} \theta, \frac{a}{2} \text{cos} \theta \right) + b \rho \left(a \text{sen} \theta - \frac{b \text{cos} \theta}{2}, a \text{cos} \theta + \frac{b \text{sen} \theta}{2} \right)}{\rho (a + b)}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{\left(\frac{a^2}{2} \operatorname{sen} \theta + ab \operatorname{sen} \theta - \frac{b^2}{2} \cos \theta ; \frac{a^2}{2} \cos \theta + ab \cos \theta + \frac{b^2}{2} \operatorname{sen} \theta \right)}{a+b}$$

Ya conocido el centro de masas, pasamos a calcular la condición de equilibrio:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} \times \vec{P} = 0, \text{ donde } \vec{P} = (M_a + M_b) \vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} \times (M_a + M_b) \vec{g} = 0$$

Nos damos cuenta que el producto cruz multiplica sólo componentes perpendiculares de los vectores,

osea: $\Rightarrow |\vec{R}_{CM}| |\vec{g}| (M_a + M_b) \operatorname{sen} \alpha = 0$

donde α es el $\angle$ entre $\vec{R}_{CM}$ y $\vec{g}$

$$= R_x g (M_a + M_b) = 0$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2}{2} \operatorname{sen} \theta + ab \operatorname{sen} \theta - \frac{b^2}{2} \cos \theta \right) g (M_a + M_b)}{a+b} = 0$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta + 2ab \operatorname{sen} \theta - b^2 \cos \theta}{a+b} = 0$$

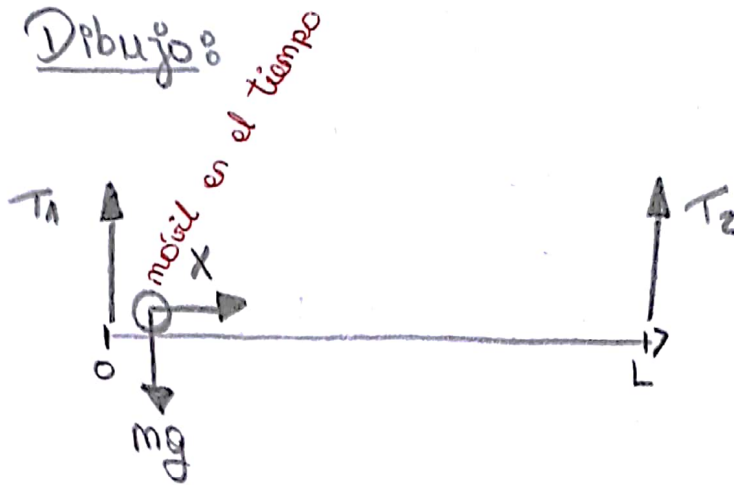
$$= \frac{(a^2 + 2ab) \operatorname{sen} \theta - b^2 \cos \theta}{a+b} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b^2}{a^2 + 2ab} \right), \theta \in] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$

$$\Rightarrow \text{El ángulo buscado } \alpha = 180^\circ - \theta \Rightarrow \alpha = \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{b^2}{a^2 + 2ab} \right)$$

P2

Dibujo:



Notamos que $t \in [0, L/v_0]$ con $x = v_0 t$, ya que v_0 es constante.

Veremos la condición de equilibrio:

$$\sum \tau_o = 0 \Rightarrow -mgx - \frac{MgL}{2} + T_2L = 0$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{mgx}{L}$$

* También se podría haber calculado $\sum \tau_L$

$$\sum \tau_L = 0 \Rightarrow -T_1L + mg(L-x) + \frac{MgL}{2} = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{mg(L-x)}{L} + \frac{Mg}{2} \rightarrow \text{es una ecuación equivalente, así podemos usar } T_1 \text{ ó } T_2.$$

Por otro lado:

$$\sum F = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 - mg - Mg = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = g(m+M)$$

Ahora tenemos 3 ecuaciones y 4 "incógnitas"

Ecuaciones

$$i) \underline{T_2} = \frac{Mg}{2} + \frac{mgx}{L}$$

Incógnitas:

$$\{T_1, T_2, x, t\}$$

$$ii) \underline{T_1} + \underline{T_2} = g(m+M)$$

$$iii) \underline{x} = \underline{U_0 t}$$

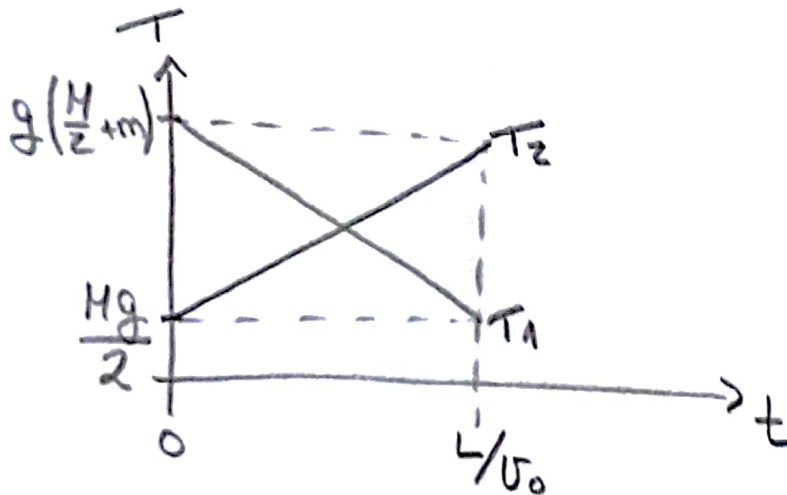
Pero busquemos $T_1(t)$ y $T_2(t)$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{mgU_0 t}{L} \Rightarrow T_1 = gM - \frac{gM}{2} + gm - \frac{gmU_0 t}{L}$$

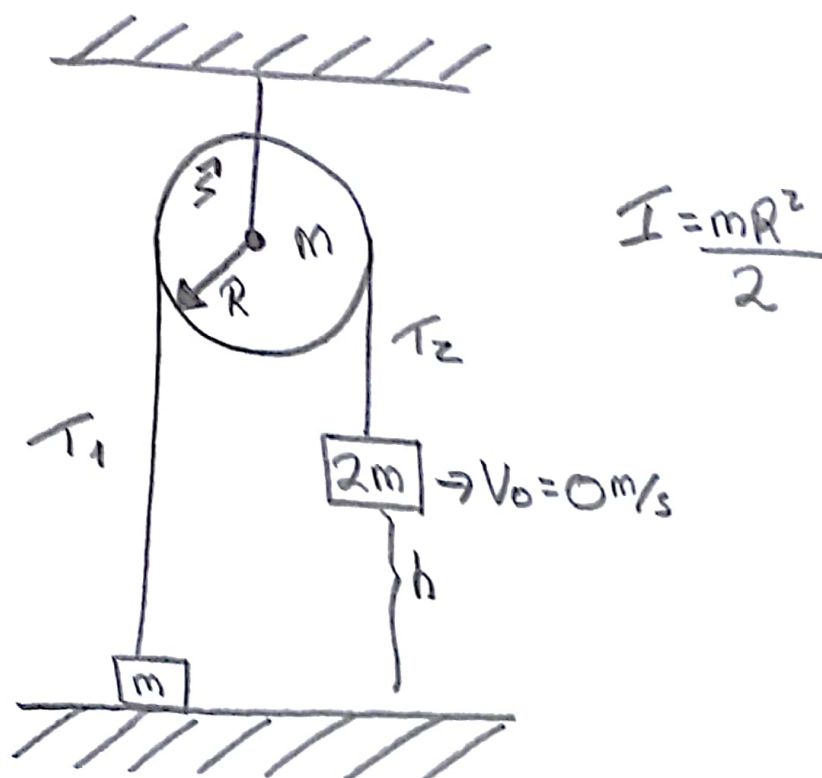
$$\Rightarrow T_1 = \frac{gM}{2} + gm \left(1 - \frac{U_0 t}{L}\right)$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{gM}{2} + \frac{gmU_0 t}{L}$$

Tensiones en función del tiempo.



P4



a) $t=0 \Rightarrow E_i = 2mgh$

$$t \text{ final} \Rightarrow E_f = mgh + \underbrace{\frac{1}{2}mV^2}_m + \underbrace{\frac{1}{2}(2m)V^2}_{2m} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{rota}}, I = \frac{mR^2}{2}$$

$$E_f = mgh + \frac{3mV^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4}$$

Por rotação: $\omega = \frac{V}{R}$

$$\Rightarrow E_f = mgh + \frac{3mV^2}{2} + \frac{mV^2}{4}$$

Iguando $E_i = E_f$

$$\Rightarrow 2mgh = mgh + \frac{3mV^2}{2} + \frac{mV^2}{4} \quad / \cdot 4$$

$$\Rightarrow 8mgh = 4mgh + 7mV^2$$

$$\Rightarrow \frac{4mgh}{7m} = V^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{4gh}{7}} = V$$