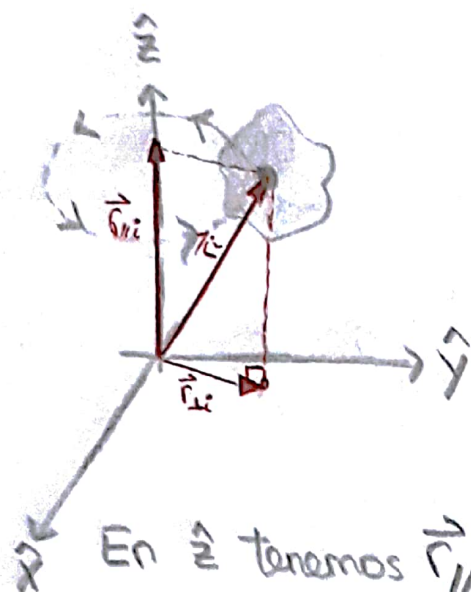
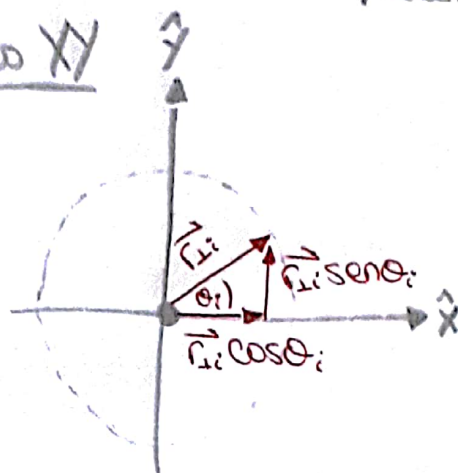


Pauta Control de Lectura 4:

Manuel Torres.



Plano XY



En $\hat{z}$ tenemos $\vec{r}_{\parallel i}$

En el plano XY tenemos $\vec{r}_{\perp i}$

En $\hat{x} \rightarrow \vec{r}_{\perp i} \cos \theta_i$

En $\hat{y} \rightarrow \vec{r}_{\perp i} \sin \theta_i$

Luego de descomponer tenemos:

$$\vec{r}_i = \left(\frac{r_{\perp i} \cos \theta_i}{x_i}, \frac{r_{\perp i} \sin \theta_i}{y_i}, \frac{r_{\parallel i}}{z_i} \right) = r_{\perp i} \cos \theta_i \hat{x} + r_{\perp i} \sin \theta_i \hat{y} + r_{\parallel i} \hat{z}$$

a) Para hallar $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t})$ necesitamos hallar $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$, $\vec{r}_i$ y m_i son conocidos.

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r_{\perp i} \cos \theta_i \hat{x} + r_{\perp i} \sin \theta_i \hat{y} + r_{\parallel i} \hat{z})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (r_{\perp i} \cos \theta_i \hat{x}) + \frac{\partial}{\partial t} (r_{\perp i} \sin \theta_i \hat{y}) + \frac{\partial}{\partial t} (r_{\parallel i} \hat{z})$$

Por "Principio de superposición" podemos calcular lo que ocurre por separado en $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$.

Antes de derivar, en el enunciado dicen que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (r_{\parallel i}) = \frac{\partial}{\partial t} (r_{\perp i}) = 0 ; \frac{\partial}{\partial t} (\theta_i) = \omega ;$$

$$\hat{x}) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r_i \cos \theta_i) = \underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial t}}_{\text{regla del producto}} \cdot \cos \theta_i + r_i \underbrace{\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial t}}_{\text{regla de la cadena}} = -r_i \sin \theta_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial t} = -r_i \sin \theta_i \omega$$

Analogamente se calculan los demás:

$$\hat{y}) \quad \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r_i \sin \theta_i) = r_i \cos \theta_i \omega$$

$$\hat{z}) \quad \frac{\partial z_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r_i) = 0$$

Notamos que aparece una relación "conveniente".

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = -r_i \sin \theta_i \omega = -y_i \omega$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = r_i \cos \theta_i \omega = x_i \omega$$

¿sabemos entonces: $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = (-y_i \omega, x_i \omega, 0)$

$$\Rightarrow \vec{r}_i \times \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_i & y_i & z_i \\ -y_i \omega & x_i \omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(-z_i \dot{y}_i) + \hat{y}(z_i \dot{x}_i) + \hat{z}(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i), \text{ reemplazando:}$$

$$= -\hat{x}(z_i x_i \omega) - \hat{y}(z_i y_i \omega) + \hat{z}(x_i^2 \omega + y_i^2 \omega)$$

$$= \omega [\hat{x}(z_i x_i) - \hat{y}(z_i y_i) + \hat{z}(x_i^2 + y_i^2)]$$

$$\Rightarrow \vec{L}_i = m_i \left(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{L}_i = m_i \omega \left[-\hat{x}(z_i x_i) - \hat{y}(z_i y_i) + \hat{k}(x_i^2 + y_i^2) \right]$$

Entonces:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \omega m_i \left[-\hat{x}(z_i x_i) - \hat{y}(z_i y_i) + \hat{k}(x_i^2 + y_i^2) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \omega \begin{pmatrix} -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i z_i \\ \sum (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (\text{como vector})$$

b) $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$?

Tenemos $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$

$\Rightarrow \vec{L}$ en $\hat{x}$ y $\hat{y}$ debe ser nulo.

En conclusión:

$$\left(\sum m_i x_i z_i = 0 \wedge \sum m_i y_i z_i = 0 \right) \Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

• Anexo:

¿Cómo calcular el producto cruz ultra rápido?

La respuesta será demostrada con un ejemplo:

$$\left(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix}$$

añado columnas (con filas también resulta "v")

$\Rightarrow$

$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	$\hat{i}$	$\hat{j}$
x_i	y_i	z_i	x_i	y_i
$\dot{x}_i$	$\dot{y}_i$	$\dot{z}_i$	$\dot{x}_i$	$\dot{y}_i$

se resta

se suma

$$\Rightarrow \hat{i} y_i \dot{z}_i + \hat{j} \dot{z}_i x_i + \hat{k} x_i \dot{y}_i - \hat{k} \dot{x}_i y_i - \hat{i} \dot{y}_i z_i - \hat{j} \dot{z}_i x_i$$

Dudas y sugerencias al mail:
manuel.torres@ug.uchile.cl. @