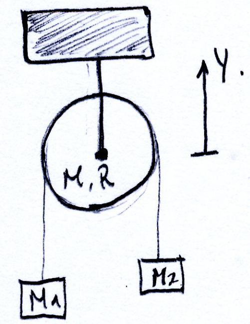
Pauta aux #6.

MOMENTO Angular

Problema1



Se tiene una polea de masa M, R.
cuerda ideal, polea ideal. La cuerda no resbala.

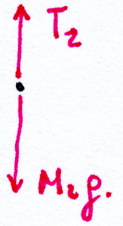
1. señale las variables del sistema.

Las variables corresponden a las que serán nuestras incognitas.

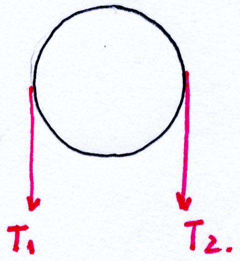
Hacemos DCL sobre los 3 cuerpos:

sobre M_1

sobre M_2



sobre Polea.

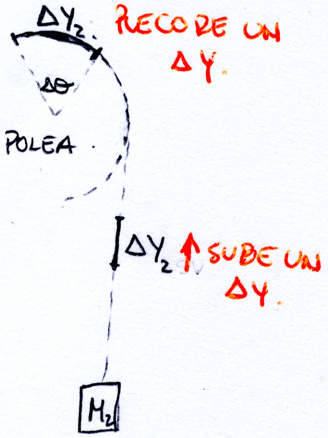


Tenemos que de las ecuaciones de fuerza saldran las variables T_1, T_2, a_1: Aceleración de la masa 1 y a_2: AC. de M_2..
Además, de la sumatoria de torques se tiene α: Aceleración angular de la polea.

VARIABLES: $T_1, T_2, a_1, a_2, \alpha$.

2. Escribir relaciones geométricas.

como la cuerda no resbala, el mismo Tramo que recorre M_2 Es el tramo de cuerda que pasa por la polea:



Arco que recorre Al subir un ΔY $= \Delta Y_2 = R\Delta\theta$.

Si derivamos 2 veces:

$$\ddot{Y}_2 = R\ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \boxed{a_2 = R\alpha.} \quad (1)$$

Análogo para a_1:

$$\boxed{a_1 = -R\alpha} \quad (2)$$

* El signo "-" es por el sistema de referencia

3. Escribir ecuaciones de movimiento de los cuerpos.

Usamos los dcl de la parte (1.), tenemos ecuaciones de fuerza para M_1 y M_2, y de torque para la polea.

Para M_1: $\boxed{a_1 M_1 = T_1 - M_1 g.}$ (3)

Para M_2: $\boxed{a_2 M_2 = T_2 - M_2 g}$ (4)

Para polea: $\boxed{I_{cm}\alpha = RT_1 - RT_2}$ (5)

4. Calcular aceleración angular de la polea.

Tenemos 5 ecuaciones y 5 incognitas, por lo que podemos despejar cualquier variable.

Para obtener α. remplazamos (1) (2) (3) y (4) en (5).

$$I_{cm}\alpha = RM_1 a_1 + RM_1 g - RM_2 a_2 - RM_2 g.$$
$$I_{cm}\alpha = -RM_1 R\alpha + RM_1 g - RM_2 R\alpha - RM_2 g.$$

Despejamos α:

$$\alpha (I_{cm} + M_1 R^2 + M_2 R^2) = Rg(M_1 - M_2)$$
$$\alpha \left(\frac{MR^2}{2} + M_1 R^2 + M_2 R^2\right) = Rg(M_1 - M_2)$$
$$\boxed{\alpha = \frac{2g(M_1 - M_2)}{R(M + 2M_1 + 2M_2)}}$$

5. Encontrar aceleración de los cuerpos.

Por (1) y (2) se obtienen directamente:

$$a_1 = -R\alpha \longrightarrow \boxed{a_1 = \frac{2g(M_2 - M_1)}{M + 2M_1 + 2M_2}}$$

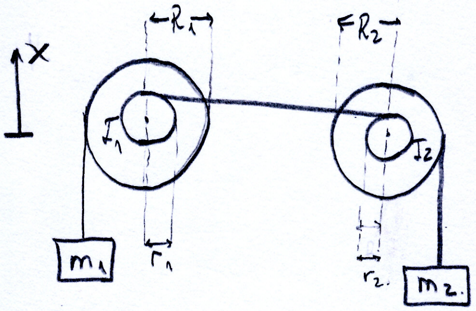
$$a_2 = R\alpha \longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{2g(M_1 - M_2)}{M + 2M_1 + 2M_2}}$$

6. Encontrar la razón entre T_1 y T_2.

Si de (3) y (4) despejamos T_1 y T_2, remplazamos los valores encontrados en la parte anterior y dividimos las ecuaciones se llega a:

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{4M_1 M_2 + MM_1}{4M_1 M_2 + MM_2.}}$$

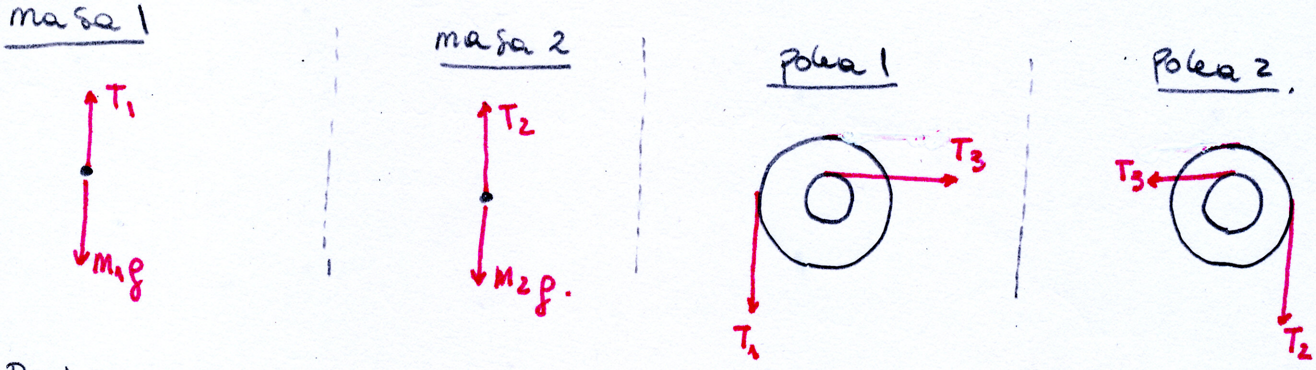
Problema 2.



2 poleas de inercias I_1, I_2. con doble radio. cuerdas y poleas ideales.

1. Señalar variables del sistema.

Hacemos DCL para los 4 cuerpos:



De las ec. de fuerzas de m_1 y m_2, se obtienen las variables T_1, T_2, T_3, a_1, a_2 y de la suma de torques α_1 y α_2.

$$\boxed{\text{variables: } a_1\ a_2\ \alpha_1\ \alpha_2\ T_1\ T_2\ T_3}$$

2. Escribe relaciones geométricas.

Ya sabemos que geométricamente se puede relacionar α_1 con a_1 y a_2 con α_2. Se tiene como en el problema 1:

$$\boxed{a_1 = -R_1 \alpha_1} \quad (1)$$

$$\boxed{a_2 = R_2 \alpha_2.} \quad (2)$$

Se puede obtener otra relación por la cuerda que une las dos poleas.

Ya que "no aparece ni desaparece cuerda", lo mismo que se enrolla en una, se desenrolla de la otra:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2$$

$$r_1 \Delta\theta_1 = r_2 \Delta\theta_2.$$

Derivando 2 veces, se tiene la última relación:

$$\boxed{r_1 \alpha_1 = r_2 \alpha_2} \quad (3)$$

3. Escribir ecuaciones de movimiento.

Tenemos 4 cuerpos, por lo que obtenemos 4 ecuaciones.

Para m_1: $\boxed{m_1 a_1 = T_1 - m_1 g}$ (4)

Para m_2: $\boxed{m_2 a_2 = T_2 - m_2 g}$ (5)

Polea 1: $\boxed{I_1 \alpha_1 = R_1 T_1 - r_1 T_3}$ (6)

Polea 2: $\boxed{I_2 \alpha_2 = r_2 T_3 - R_2 T_2}$ (7)

4. Encontrar a_1.

Con esto, encontrar la posición de m_1 en función del tiempo con $X(t=0) = X_0$ y velocidad inicial cero: $v_i = 0$.

Trabajemos con (6) y (7):

$$I_1 \alpha_1 - R_1 T_1 = -r_1 T_3 \qquad I_2 \alpha_2 + R_2 T_2 = r_2 T_3.$$

Dividiendo:

$$\frac{I_1 \alpha_1 - R_1 T_1}{I_2 \alpha_2 + R_2 T_2} = -\frac{r_1}{r_2}$$

Remplazamos (4) y (5) en T_1 y T_2:

$$I_1 \alpha_1 r_2 - R_1 r_2 m_1 a_1 - R_1 r_2 m_1 g = -I_2 \alpha_2 r_1 - R_2 r_1 m_2 a_2 - R_2 r_1 m_2 g.$$

Por las relaciones geométricas sabemos que:

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{R_1} \qquad \alpha_2 = \frac{a_2}{R_2} \qquad r_1 \alpha_1 = r_2 \alpha_2 \longrightarrow \alpha_2 = \frac{r_1}{r_2} \frac{a_1}{R_1}$$

$$a_2 = \frac{r_1 R_2}{r_2 R_1} a_1.$$

Remplazamos esto y despejamos a_1.

$$\frac{I_1 r_2}{R_1} a_1 - R_1 r_2 m_1 a_1 + \frac{I_2 r_1^2}{R_1 r_2} a_1 + \frac{R_2^2 r_1^2 m_2}{r_2 R_1} a_1 = g\,(R_1 r_2 m_1 - R_2 r_1 m_2)$$

Se tiene a_1:

$$\boxed{a_1 = \frac{g\,(R_1 r_2 m_1 - R_2 r_1 m_2)}{\left(\frac{I_1 r_2}{R_1} - R_1 r_2 m_1 + \frac{I_2 r_1^2}{R_1 r_2} + \frac{R_2^2 r_1^2}{r_2 R_1}\right)}}$$

Como la aceleración es constante, m_1 cumple un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: $x_1 = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a_1 t^2$.

Remplazando los datos de enunciado:

$$\boxed{x_1 = x_0 + \frac{1}{2} a_1 t^2.}$$