

# En paralelo- Nociones y entendimiento de la inercia:

Autor: Manuel Torres Valdebenito.

## 1 CONTENIDO

---

2	Definición y nociones de la Inercia: .....	1
3	Ejemplos de Inercia:.....	2
3.1	Barra largo L: .....	2
3.2	Anillo radio R, con su eje de giro perpendicular a su plano y sobre su centro:.....	2
3.3	Disco radio R, con su eje de rotación perpendicular y en su centro: .....	3
3.4	Observaciones: .....	3
3.5	Anillo de radio R, con el eje de giro en su mismo plano:.....	4
4	Problemas de Inercia: .....	4
4.1	Problema 1: .....	4
4.2	Problema 2: .....	5
4.3	Problema 3: .....	5
4.4	Problema 4: .....	5

## 2 DEFINICIÓN Y NOCIONES DE LA INERCIA:

Definición formal: (Sacada del Massman)

Para un sólido constituido de  $N$  masas discretas (unidas rígidamente con varillas sin peso), el momento de inercia viene dado por

$$I = \sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 .$$

Para distribuciones de masa continua, la expresión anterior debe sustituirse por una con integrales que adecuadamente describa la situación. Por ejemplo: si un cuerpo

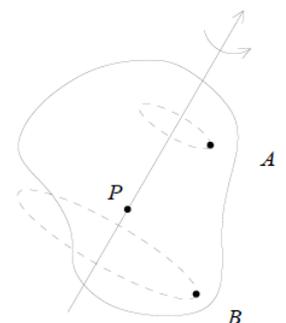
sólido viene descrito por una densidad de masa  $\rho(x, y, z) = \rho(\vec{r})$ , entonces el momento de inercia en torno al eje  $\hat{z}$  viene dado por

$$I = \int_{\text{Sólido}} (x^2 + y^2) \rho(\vec{r}) dx dy dz .$$

En la última expresión  $(x^2 + y^2)$  es el cuadrado de la distancia al eje de la masa del volumen  $d^3r = dx dy dz$  ubicado en el lugar  $\vec{r}$ .

También la inercia tiene conexión con nuestras ecuaciones de energía:

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$$



### 3 EJEMPLOS DE INERCIA:

A continuación se presenta el procedimiento del cálculo de la Inercia de algunos cuerpos útiles en el curso, el procedimiento en algunos casos incluye el desarrollo de integrales los cuales son irrelevantes y es posible saltar en la revisión, pero se recomienda leer el contenido y en especial las observaciones respecto al concepto de inercia.

#### 3.1 BARRA LARGO $L$ :

##### Ejemplo 1:

Evaluemos el momento de inercia de una varilla de largo  $L$  y masa  $M$  en torno a un eje que pasa perpendicularmente por uno de sus extremos (ver figura 9.2).

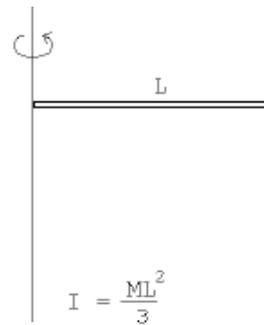


Figura 9.2

La densidad lineal de la varilla es  $\lambda = M/L$ . El trozo de varilla de largo  $dx$  que se encuentra a una distancia  $x$  del eje tiene una masa igual a  $\lambda dx$  y su contribución al momento de inercia es  $x^2 \lambda dx$ . Sumando todas las contribuciones desde  $x = 0$  hasta  $x = L$  se obtiene

$$I = \int_0^L \lambda x^2 dx = \lambda \left( \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L \right) = \frac{\lambda L^3}{3},$$

o sea

$$I = \frac{ML^2}{3}.$$

#### 3.2 ANILLO RADIO $R$ , CON SU EJE DE GIRO PERPENDICULAR A SU PLANO Y SOBRE SU CENTRO:

##### Ejemplo 2:

Evaluemos el momento de inercia de un anillo de radio  $R$  y masa  $M$  en torno a un eje que pasa perpendicularmente por el centro (ver figura 9.3).

Como toda la masa del anillo está a la distancia  $R$  del eje, el momento de inercia es simplemente

$$I = MR^2.$$

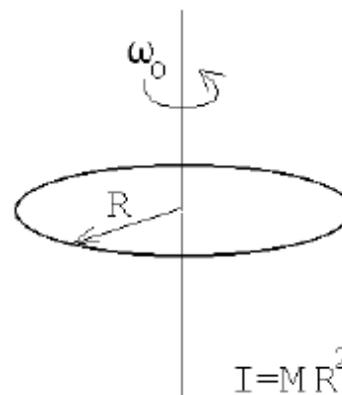


Figura 9.3

### 3.3 DISCO RADIO R, CON SU EJE DE ROTACIÓN PERPENDICULAR Y EN SU CENTRO:

#### Ejemplo 3:

Evaluemos el momento de inercia de un disco uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  en torno a un eje que pasa perpendicularmente por el centro (ver figura 9.4). La densidad superficial del disco viene dada por  $\sigma = M/(\pi R^2)$ . Para encontrar el momento de inercia subdividiremos el disco en anillos infinitesimales.

El momento de inercia  $dI$  de un anillo de radio  $r$  y ancho  $dr$  viene dado por (ver ejemplo anterior)

$$dI = (\text{masa del anillo}) \cdot r^2 .$$

Pero la masa de tal anillo es

$$(\text{masa del anillo}) = \sigma 2\pi r dr ,$$

luego

$$dI = 2\pi\sigma r^3 dr .$$

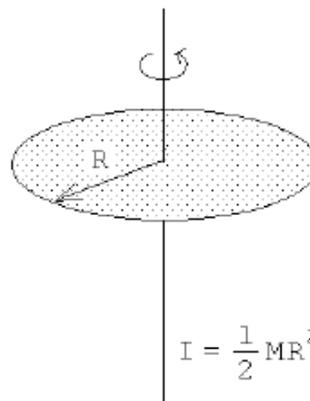


Figura 9.4

Sumando la contribución de todos los anillos desde  $r = 0$  hasta  $r = R$  se encuentra

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi\sigma}{2} R^4 .$$

Sustituyendo la expresión para  $\sigma$  se obtiene finalmente

$$I = \frac{MR^2}{2} .$$

### 3.4 OBSERVACIONES:

¿La inercia es mayor cuando hay masa lejos o cerca del eje de rotación? (Ver ejemplo del aro v/s el disco)

¿La inercia es una resistencia o un inhibidor para a la rotación?

Notemos que el momento de inercia es menor que en el caso del anillo, lo cual es esperable, ya que ahora la masa se encuentra distribuida a distancias menores o iguales que  $R$ .

Observemos que en todos los ejemplos estudiados, se repite una característica común: el momento de inercia siempre resulta tener, al menos para estos cuerpos sencillos, la siguiente forma: masa, multiplicada por el cuadrado de una longitud característica del cuerpo (longitud de la barra, radio del aro, etc.), por un factor numérico (que depende de la geometría del cuerpo).

### 3.5 ANILLO DE RADIO $R$ , CON EL EJE DE GIRO EN SU MISMO PLANO:

¿Qué pasaría si cambia la posición del objeto que rota?

¿Si sólo lo traslado que ocurre? ¿Si se aleja del eje de rotación?

#### Ejemplo 7:

Evaluemos el momento de inercia de un anillo de radio  $r$  y masa  $M$  en torno a un eje que coincide con un diámetro del anillo (ver figura 9.6).

Para resolver este problema subdividamos el anillo en numerosos sectores angulares infinitesimales. La densidad lineal del anillo es  $\lambda = M/(2\pi R)$ . La masa del anillo del sector comprendido entre  $\phi$  y  $\phi + d\phi$  es  $\lambda r d\phi$ . Su contribución al momento de inercia del anillo es

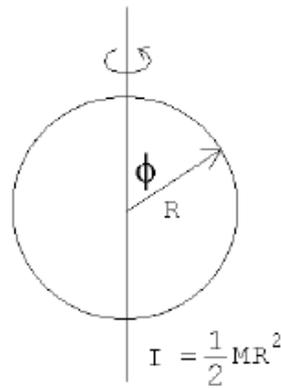


Figura 9.6

$$dI = \lambda R d\phi (R \sin \phi)^2 .$$

Sumando la contribución de todos los sectores (desde  $\phi = 0$  hasta  $\phi = 2\pi$ ) se obtiene

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \lambda R^3 \sin^2 \phi d\phi .$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi ,$$

luego

$$I = \lambda R^3 \pi = \frac{1}{2} MR^2 .$$

Notemos que, de acuerdo a lo observado anteriormente, el momento de inercia debía ser proporcional a  $MR^2$ , igual que en el ejemplo 2. Sin embargo, ahora el eje en torno al cual se calcula el momento de inercia es distinto, y eso tiene el efecto de cambiar el factor numérico involucrado. Notemos, además, que en el ejemplo 2 toda la masa estaba a una distancia  $R$  del eje, y ahora toda la masa está a una distancia menor o igual que  $R$ . Por lo tanto, era esperable que el momento de inercia fuese menor que en el ejemplo 2.

## 4 PROBLEMAS DE INERCIA:

---

### 4.1 PROBLEMA 1:

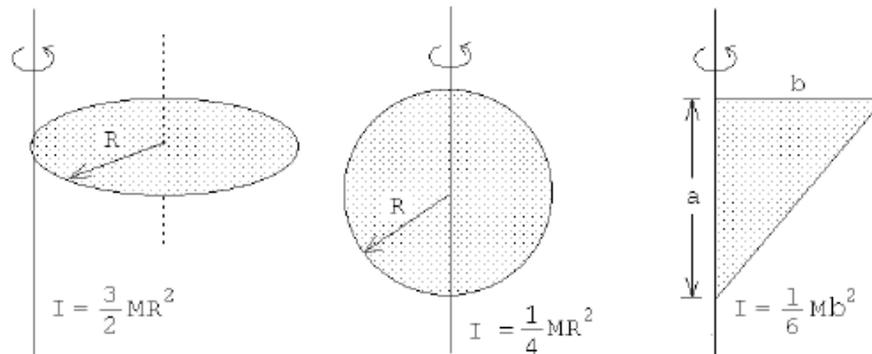
(Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos.) Demuestre que el momento de inercia  $I$  para las rotaciones de un cuerpo sólido alrededor de un eje  $L$  es

$$I = I_0 + M R^2 ,$$

donde  $I_0$  es el momento de inercia para rotaciones del sólido alrededor del eje paralelo a  $L$  que pasa por el centro de masas y  $R$  es la distancia de separación de los dos ejes.

#### 4.2 PROBLEMA 2:

Encuentre el momento de inercia de las superficies, de densidad superficial uniforme  $\sigma_0$ , mostrados en la figura 9.7 y en torno a los ejes ahí indicados.



#### 4.3 PROBLEMA 3:

Considere un sistema de dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , separadas por una distancia  $r$ . Demuestre que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masas en forma perpendicular a la línea que los une, viene dado por  $\mu r^2$ , donde  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  es la masa reducida del sistema.

#### 4.4 PROBLEMA 4:

Encuentre el momento de inercia de los alambres, de densidad lineal uniforme  $\lambda_0$ , mostrados en la figura 9.8 y en torno a los ejes ahí indicados.

