

Pauta Auxiliar 4:

P1

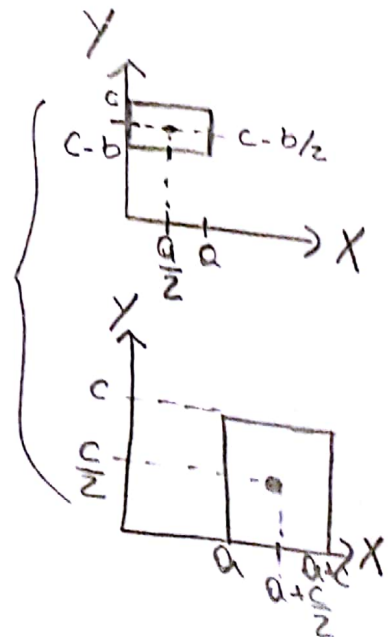
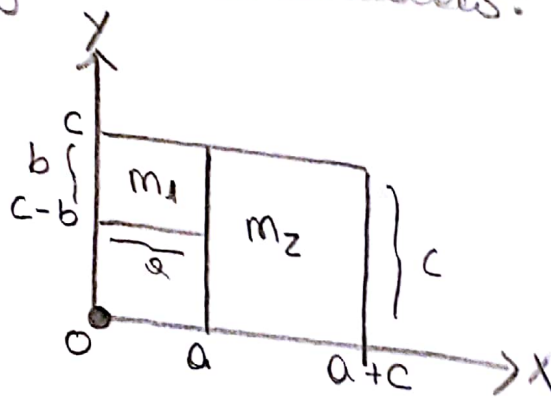


Densidad $\sigma_0 = \frac{M_{total}}{Área} = \frac{M}{ab + c^2}$

$\Rightarrow (ab + c^2)\sigma_0 = M$, ya que σ_0 es uniforme:

$\Rightarrow ab\sigma_0 = m_1 \wedge c^2\sigma_0 = m_2$

Entonces buscamos centro de masa por separado para m_1 y m_2 , para continuar definimos nuestro eje de coordenadas:



Las posiciones de los centro de masas son:

$\vec{r}_{m1} = (a/2, c-b/2)$

$\vec{r}_{m2} = (a+c/2, c/2)$

Entonces el centro de masas global sería de la forma:

$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_{m1} + m_2 \cdot \vec{r}_{m2}}{m_1 + m_2}$

Reemplazando $\vec{r}_{m1}, m_1, \vec{r}_{m2}, m_2$ nos queda:

$$\vec{r}_{CH} = \frac{(ab \cancel{0}) \cdot \begin{pmatrix} a/2 \\ c-b/2 \end{pmatrix} + (c^2 \cancel{0}) \begin{pmatrix} a+c/2 \\ c/2 \end{pmatrix}}{(ab+c^2) \cancel{0}}$$

$$\vec{r}_{CH} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{a^2 b}{2} \\ ab(c-b/2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^2(a+c/2) \\ c^3/2 \end{pmatrix}}{ab+c^2} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{a^2 b}{2} + c^2(a+c/2)}{ab+c^2} \\ \frac{ab(c-b/2) + c^3/2}{ab+c^2} \end{pmatrix}$$

También se puede separar por coordenadas:

$$\vec{r}_{CH}(x) = \left(\frac{m_1 \vec{r}_{1x} + m_2 \vec{r}_{2x}}{m_1 + m_2} \right) \hat{x}; \quad \vec{r}_{CH}(y) = \left(\frac{m_1 \vec{r}_{1y} + m_2 \vec{r}_{2y}}{m_1 + m_2} \right) \hat{y}$$

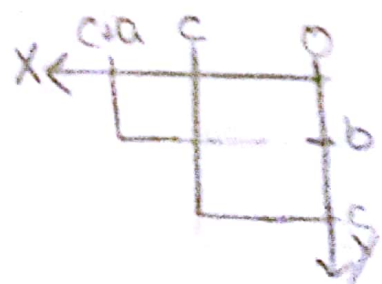
Lo cual es lo mismo.

Observación:

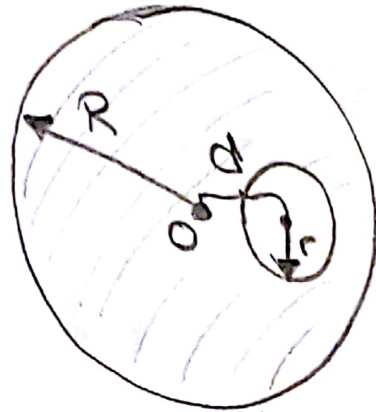
A veces elegir un buen sistema de referencia ayuda a simplificar mucho el desarrollo.

¿Se eligió el mejor origen en el sistema de referencias?

⊗ Queda propuesto resolver y sacar sus conclusiones



P2



Densidad superficial = σ_0

$$\text{Area disco} = \pi R^2 \Rightarrow A_G = \pi R^2$$

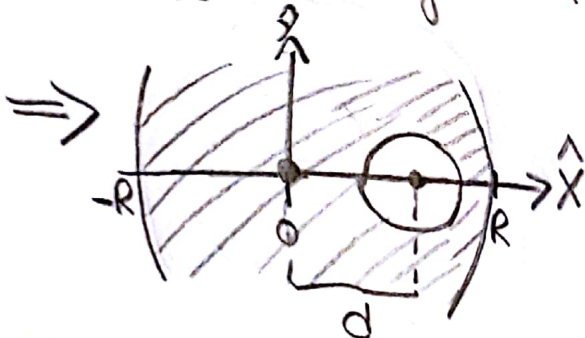
$$A_c = \pi r^2$$

"Masas" de los discos $\Rightarrow M = \sigma_0 \pi R^2$

$$m = \sigma_0 \pi r^2 \rightarrow$$

Esta en vez de ser la "masa" del disco chico, es la masa que no tiene el disco grande.

Se coloca el eje de referencia en O.



El centro de masas del disco grande, si no le faltara un pedazo sería $\vec{r} = (0, 0)$

El "centro de masas" de lo que falta es $\vec{r} = (d, 0)$

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_G M - \vec{r}_c m}{M - m} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Intuitivamente le} \\ \text{"quitamos" masa.} \end{array} \right\}$$

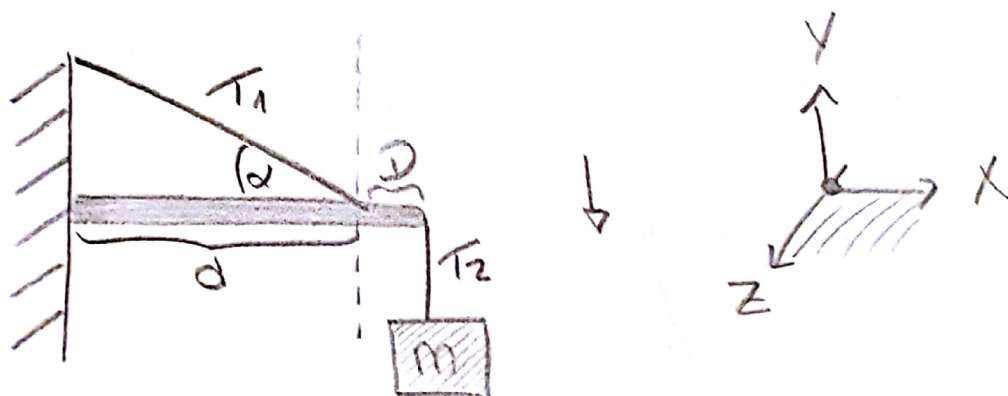
$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{(0) \sigma_0 \pi R^2 - (d) \sigma_0 \pi r^2}{\sigma_0 \pi (R^2 - r^2)}, \quad \text{la componente en } \hat{y} \text{ es nula, así que trabajamos en } \hat{x}.$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{-d \cancel{60\pi} r^2 \hat{x}}{\cancel{60\pi} (R^2 - r^2)} = \frac{-dr^2 \hat{x}}{R^2 - r^2}$$

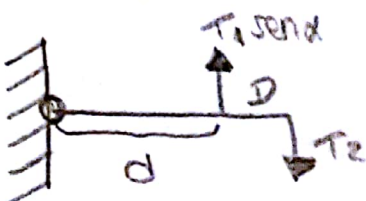
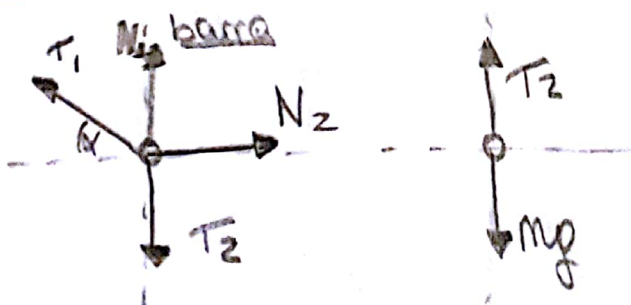
Bajo nuestro sist de coordenadas, el centro de masas se ubica en $\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{-dr^2}{R^2 - r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

El CM se ubica a una distancia $\frac{dr^2}{R^2 - r^2}$ del centro del disco, hacia el lado opuesto de la perforación.

P3



DCL



Ecuaciones

$$\begin{aligned} \hat{y}] \quad T_1 \sin \alpha - T_2 + N_1 &= 0 \\ \hat{x}] \quad N_2 - T_1 \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \hat{y}] \quad T_1 \sin \alpha - T_2 + N_1 &= 0 \\ \hat{x}] \quad N_2 - T_1 \cos \alpha &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ barra}$$

$$\hat{y}] \quad T_2 - mg = 0 \quad \left. \vphantom{\hat{y}] \quad T_2 - mg = 0} \right\} \text{ caja}$$

$$\hat{z}] \quad (T_1 \sin \alpha) d - (d + D) T_2 = 0$$

Torque

Tengo de incógnitas N_1, N_2, T_1, T_2 y tengo cuatro ecuaciones.

$$T_2 = mg \xrightarrow{\hat{z}} T_1 \sin \alpha \quad d = mg(d+D)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{mg(D+d)}{d \sin \alpha} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Tensión de} \\ \text{la cuerda.} \end{array} \right.$$

$$T_1 \text{ y } T_2 \text{ en } \hat{y} \rightarrow N_1 = T_2 - T_1 \sin \alpha$$

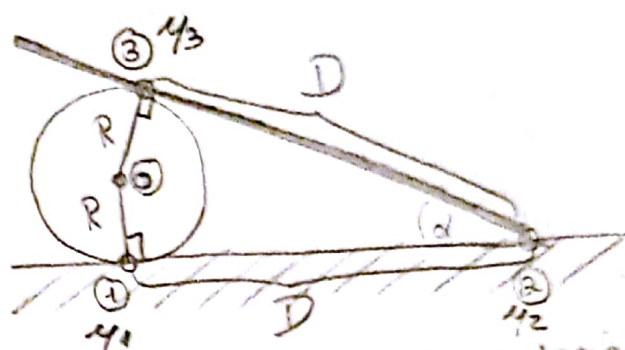
$$\Rightarrow N_1 = mg - \frac{mg(D+d)}{d \sin \alpha} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow N_1 = mg \left(1 - \frac{D+d}{d} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Fuerza de} \\ \text{contacto.} \end{array} \right.$$

Observación:

Usamos sólo 3 ecuaciones porque
 el equilibrio NO depende de N_2 
 ¿En qué influye N_2 ? $\rightarrow$ Torque 
 $\rightarrow$ Fuerza 

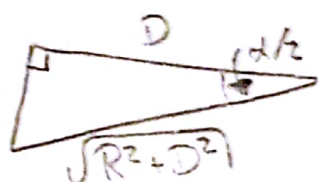
P4



Obtenemos α a partir de la relación de triángulos:

$$\tan(\alpha/2) = \frac{R}{D/2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{R}{D/2}\right) \cdot 2$$

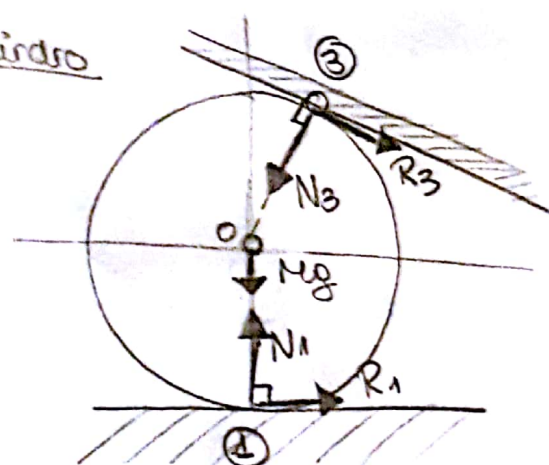


Tenemos para la barra 3 ecuaciones
 " " el cilindro 3 ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \sum \vec{F} \rightarrow \\ \sum \vec{\tau} \rightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

DCL:

cilindro



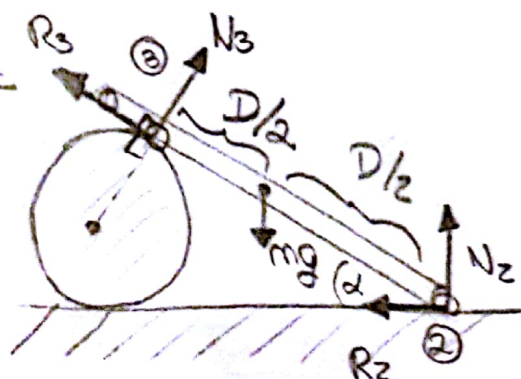
Ecuaciones:

$$\sum \vec{\tau}_O = (\vec{R}_1 \times \vec{R}) - (\vec{R}_3 \times \vec{R}) = 0 \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_x = R_1 - N_3 \sin \alpha + R_3 \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum \vec{F}_y = N_1 - Mg - N_3 \cos \alpha - R_3 \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

barra



$$\sum \vec{\tau}_O = (mg) \times (L/2) - (N_3 \times D) = 0 \quad (4)$$

$$\sum \vec{F}_x = -R_3 \cos \alpha - R_2 + N_3 \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

$$\sum \vec{F}_y = R_3 \sin \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - mg = 0 \quad (6)$$

Cuidado: $\vec{\tau}_F = \vec{r}_F \times \vec{F}_F$

En 4 y 5 va primero el brazo del torque y luego la fuerza.

Además sabemos que:

$$R_1 = N_1 \gamma_1$$

$$R_2 = N_2 \gamma_2$$

$$R_3 = N_3 \gamma_3$$

$$\text{De 4} \Rightarrow \frac{mgL}{2} \cancel{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \cos \alpha - N_3 D = 0$$

$$\Rightarrow \frac{mgL \cos \alpha}{2D} = N_3$$

$$\text{De 1} \Rightarrow R_1 \cancel{=} R_3 \quad , \quad R > 0$$

$$\Rightarrow R_1 = R_3$$

Reemplazando N_3 y R_3 en 2:

$$\Rightarrow R_1 - \frac{mgL \cos \alpha \sin \alpha}{2D} + R_1 \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{Lmg \cos \alpha \sin \alpha}{2D(1 + \cos \alpha)} = R_3 \quad \left| \rightarrow \text{Tengo } R_1, \text{ falta } N_1 \text{ para hallar } \gamma_1 \right.$$

Reemplazando R_3 y N_3 en 3:

$$\Rightarrow N_1 - Mg - \frac{mgL \cos^2 \alpha}{2D} - \frac{Lmg \cos \alpha \sin^2 \alpha}{2D(1 + \cos \alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = Mg + \frac{mgL}{2D} \left(\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)} \right) \quad \left| \rightarrow \text{Ya tengo lo necesario para } \gamma_1. \right.$$

Reemplazo R_3 y N_3 en 5:

$$\Rightarrow - \frac{Lmg \cos^2 \alpha \sin \alpha}{2D(1 + \cos \alpha)} - R_2 + \frac{mgL \cos \alpha \sin \alpha}{2D} = 0$$

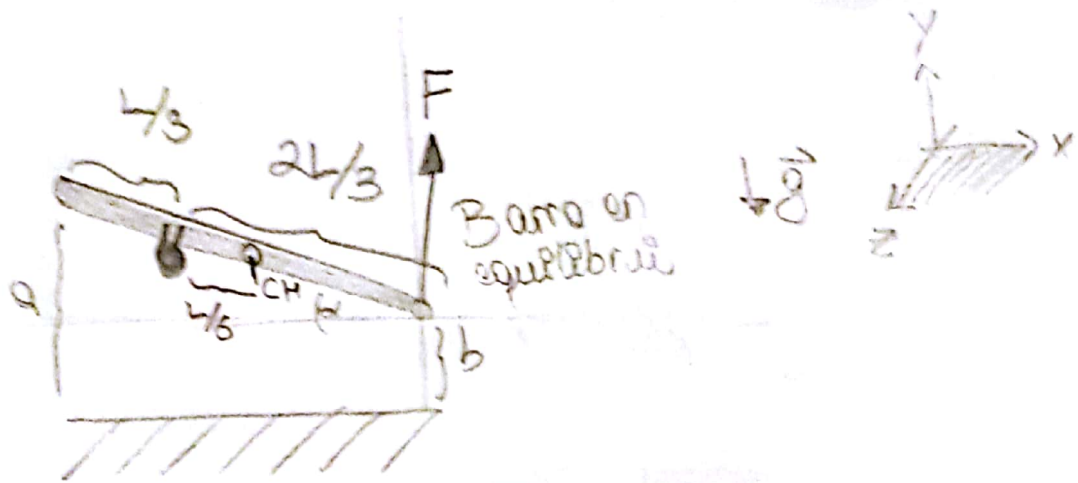
$$\Rightarrow R_2 = \frac{mgL}{2D} \left(- \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cos \alpha \sin \alpha \right) \quad \left| \rightarrow \text{Falta } N_2 \text{ para tener } \gamma_2 \right.$$

Por último, despejo N_2 en 6, y reemplazo lo necesario:

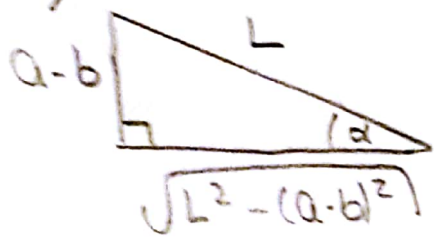
$$\Rightarrow N_2 = mg - \frac{mgL \cos \alpha}{2D}$$

$$\text{Entonces: } \gamma_1 = R_1 / N_1 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = R_2 / N_2 //$$

P5



a)



} α es el ángulo de inclinación respecto al suelo.

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow M\vec{g} - \vec{F} + \vec{N} = 0$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}L\right) \times \vec{F} - \left(\frac{L}{6}\right) \times M\vec{g} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{F}}{3} \sin \alpha - \frac{LMg}{6} \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{3}{12} Mg = \frac{1}{4} Mg \rightarrow \boxed{F = \frac{1}{4} Mg}$$

Sólo usamos torque ∇
¿Por qué?
Investigar

b) $F = \frac{Mg}{2}$, sea ΔL nuestro desplazamiento

$$\Rightarrow \sum \tau = \left(\frac{2L}{3} + \Delta L\right) \times \vec{F} - \left(\frac{L}{6} + \Delta L\right) \times M\vec{g} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2L}{3} + \Delta L\right) \frac{Mg}{2} \sin \alpha = \left(\frac{L}{6} + \Delta L\right) Mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{2L}{6} + \frac{\Delta L}{2} = \frac{L}{6} + \Delta L \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{\Delta L}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{L}{3} = \Delta L}}$$

Debe desplazarse $L/3$.

¿Hacia que lado? (Propuesto).

Cosas útiles:

Formularios (A grandes rasgos)

Unidad 4-A:

a) Torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

b) Torque prod. por grav. $\vec{\tau}_g = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = M(\vec{R}_{cm} \times \vec{g})$

c) Condición de estática. $\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \sum \vec{\tau} = \vec{0}$
 $\sum \vec{v} = \vec{0} \quad \sum \vec{\omega} = \vec{0}$

Unidad 4-B:

a) Teo. de Steiner $I_0 = MR^2 + I_{cm}$

b) Inercia:

- Aro-centro = MR^2
- Disco-centro = $\frac{1}{2}MR^2$
- Disco-diámetro = $\frac{1}{4}MR^2$
- Barra-extremo = $\frac{1}{3}ML^2$
- Barra-centro = $\frac{1}{12}ML^2$

Unidad 4-C:

a) Torque respecto a un punto fijo O: $I_O \cdot \alpha = \sum \vec{\tau}_O$

b) Conservación del momentum angular: $I_i \omega_i = I_f \omega_f = L = \text{cte}$

Unidad 4-D:

a) Rodadura $\Rightarrow \Delta x = r \Delta \theta$

$$\Rightarrow v = \omega r$$

$$\Rightarrow a = \alpha r$$

Producto Cruz

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}; \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}(r_y F_z - r_z F_y) - \hat{j}(r_x F_z - r_z F_x) + \hat{k}(r_x F_y - r_y F_x)$$

} con los vectores unitarios

Otra forma:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

} se restan

} se suman

se copian columnas

○ simplemente:

$$\vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| |\vec{F}| \cdot \sin(\underbrace{\angle(\vec{r}, \vec{F})}_{\text{ángulo entre } \vec{r} \text{ y } \vec{F}})$$

Dudas o sugerencias a
correo: manuel.torres@ug.uchile.cl
Éxito con el estudio !!