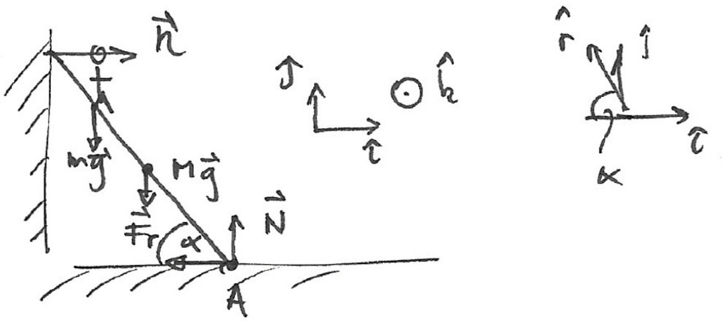
Control 1 solución

R. Rondanelli

16 de octubre de 2017

Sea r la distancia desde el suelo a la posición de la persona en la escalera.



Tomando torque en torno al punto A en la figura, dado que la pared no tiene roce, la reacción $\vec{R}$ es perpendicular a la pared:

$$\frac{\vec{L}}{2} \times M\vec{g} + \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{L} \times \vec{R} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{r} = -r\cos\alpha\hat{\mathbf{i}} + r\,\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{j}} \tag{2}$$

$$\frac{L}{2}Mg\cos\alpha + mrg\cos\alpha - LR\sin\alpha = 0 \tag{3}$$

y por lo tanto

$$R = (\frac{M}{2} + \frac{mr}{L})g\cot\alpha \tag{4}$$

Por otro lado, el balance de fuerzas en la dirección $\hat{\mathbf{j}}$ es tal que

$$N = (M+m)g$$
$$F_r \leq \mu N$$

$$(\frac{M}{2} + m\frac{r}{L})g\cot\alpha \leq \mu(M+m)g \tag{5}$$

y por lo tanto, la condición para el coeficiente de roce estático está dada por

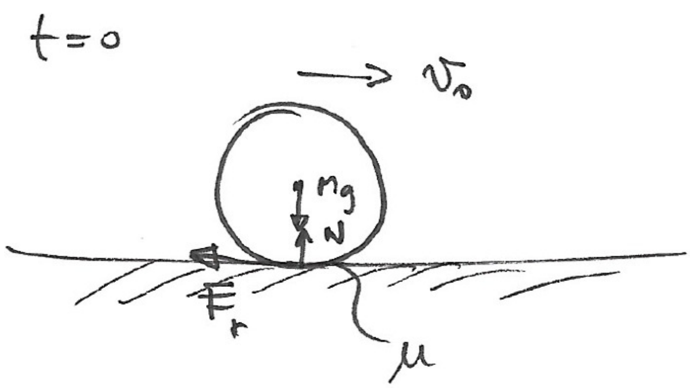
$$\mu \geq \frac{(\frac{M}{2} + \frac{mr}{L})}{M+m}\cot\alpha \tag{6}$$

despejando la distancia a lo largo de la escalera r, para la condición crítica, se encuentra,

$$r = \frac{\mu L(M+m)\tan\alpha}{m} - \frac{ML}{2m} \tag{7}$$

Para que la persona no resbale, nos ponemos en el caso con menor coeficiente de roce estático, a dos desviaciones estándar del promedio, es decir, que $\mu = 0{,}44$. Dándose un valor de $\alpha = 60$ tenemos que $r = 1{,}58m \quad h = r\sin\alpha = 1{,}36$m

P2)



a) En este caso, la fuerza de roce dinámico actua sobre la bola de boliche en todos los tiempos justo antes que se produzca la rodadura sin resbalar.

En el eje $\hat{\mathbf{i}}$ la única fuerza que actua es el roce dinámico y por lo tanto:

$$M\ddot{x} = -\mu Mg \tag{8}$$

y por lo tanto

$$v = v_o - \mu gt \tag{9}$$

La ecuación de torque respecto del centro de masa de la bola, nos entrega un valor para la aceleración angular

$$-R\hat{\mathbf{j}} \times (-\mu Mg\hat{\mathbf{i}}) = I_{cm}\vec{\alpha} \tag{10}$$

En este caso $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ y entonces la aceleración angular es

$$\vec{\alpha} = -\mu\frac{5}{2}\frac{g}{R}\hat{\mathbf{k}} \tag{11}$$

Como el valor de la acelaración angular es constante y la bola no rueda en el tiempo inicial, la velocidad angular en el tiempo se escribe simplemente

$$\omega = \mu\frac{5}{2}\frac{g}{R}t \tag{12}$$

La condición para que la bola de boliche ruede sin resbalar es que el punto de apoyo de la bola se encuentre en reposo instantáneo. Esta condición se obtiene cuando ωR sea exactamente igual a la velocidad de traslación de la bola. Esta última condición se cumple cuando se satisface

$$(v_o - \mu g t^*) = \mu \frac{5}{2}\frac{g}{R} t^* R \tag{13}$$

$$t^* = \frac{2v_0}{7g\mu} \tag{14}$$

b) La energía mecánica no se conserva pues durante el tiempo en que la bola rueda resbalando, la fuerza de roce dinámico ejerce trabajo mecánico sobre el sistema.

c) La conservación de momento angular se cumple bajo el supuesto que no existen torques externos al sistema. En este caso, respecto del centro de masa la fuerza de roce dinámico ejerce un torque y por lo tanto el momento angular del sistema no se conserva. De hecho, uno puede calcular el valor del momento angular durante el intervalo propuesto integrando la ecuación $\frac{d\vec{L}}{dt} = I_{cm}\vec{\alpha}$. Un argumento más sencillo es simplemente reconocer que en el tiempo inicial el sistema no rota (y por lo tanto la velocidad relativa al centro de masa de todos los puntos del sistema es nula), y en el tiempo final debe rotar para rodar sin resbalar, por lo tanto con un momento angular respecto del centro de masa distinto de cero.

d) Respecto de un punto arbitrario en el suelo, la fuerza de roce viscoso no ejerce torque pues es paralela al brazo de la fuerza. Tanto la fuerza normal, como la gravedad, ejercen torque y dado que la bola desliza, el ángulo con el que la gravedad ejerce torque cambia durante el intervalo de tiempo considerado. El brazo de la fuerza normal crece también para todo tiempo. Dado que la fuerza normal y la gravedad tienen la misma magnitud y signos opuestos, y que la proyección del brazo en la horizontal en la misma, la suma de torques respecto de un punto arbitrario es cero, y por lo tanto el momento angular de la bola se conserva en este caso.

P3) a)

Suponiendo la existencia de un disco macizo y de otro disco de masa "negativa"

$$I_{total} = I_{barra} + I_{disco} - I_{agujero} \tag{15}$$

$$I_{barra} = \tfrac{1}{3} M_1 L^2$$
$$I_{disco} = \tfrac{\rho\pi R^2}{2} R^2 + (\pi R^2 \rho) L^2$$
$$I_{agujero} = \tfrac{\rho\pi(\frac{R}{2})^2}{2}(\tfrac{R}{2})^2 + (\pi (R/2)^2 \rho)(L + \tfrac{3R}{2})^2$$

b) Por energía, reconociendo que la Energía potencial gravitatoria es, nuevamente, la suma de las energías potenciales gravitatorias de la barra, el disco y menos la energía potencial del agujero (R. Soto), de esta forma la conservación de la energía mecánica puede ser escrita como:

$$E_{pi} = \frac{1}{2} I_{total}\omega_f^2 + E_{pf}$$
$$\omega_f = \left(\frac{2(E_{pi} - E_{pf})}{I_{total}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$E_{pi} - E_{pf} = \left(Mg\frac{L}{2} + (\pi R^2 \rho g)(L+R) - \rho\pi(\frac{R}{2})^2 g(L + \frac{3R}{2}) \right)(1 - \cos\theta_0)$$

$$v_f = \omega_f L$$