Auxiliar Extra C1

Auxiliares: Guido Escudero, Teresa Paneque & Francisco Silva
Fecha: 12 de octubre de 2017

Resumen Aux1

Errores

- Error

$$C = \langle C \rangle \pm \Delta C \tag{1}$$

- Promedio

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} C_k \tag{2}$$

- Desviación Estandar

$$\sigma = \Delta C = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(C_k - \langle C \rangle)^2} \tag{3}$$

- Distribución Gaussiana

$$[\langle C \rangle - \sigma, \langle C \rangle + \sigma] \tag{4}$$

$$[\langle C \rangle - 2\sigma, \langle C \rangle + 2\sigma] \tag{5}$$

$$[\langle C \rangle - 3\sigma, \langle C \rangle + 3\sigma] \tag{6}$$

- Error Relativo

$$\epsilon_c = \frac{\Delta C}{\langle C \rangle} \tag{7}$$

- Error Porcentual

$$\epsilon_p = \epsilon_c \times 100\,\% \tag{8}$$

- Propagación de Errores

Suma: $C = A + B$

$$C = \langle C \rangle \pm \Delta C = (\langle A \rangle + \langle B \rangle) \pm \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} \tag{9}$$

Resta: $C = A - B$

$$C = \langle C \rangle \pm \Delta C = (\langle A \rangle - \langle B \rangle) \pm \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} \tag{10}$$

Multiplicación: $C = AB$

$$C = \langle C \rangle \pm \Delta C = (\langle A \rangle\langle B \rangle) \pm (\langle A \rangle\langle B \rangle)\sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\langle A \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{\langle B \rangle}\right)^2} \tag{11}$$

División: $C = A/B$

$$C = \langle C \rangle \pm \Delta C = \frac{\langle A \rangle}{\langle B \rangle} \pm \frac{\langle A \rangle}{\langle B \rangle}\sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\langle A \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{\langle B \rangle}\right)^2} \tag{12}$$

Función $f(C) = f(\langle C \rangle \pm \Delta C)$

$$f(C) = f(\langle C \rangle) \pm \Delta C \left(\frac{df}{dx}\right)_{(x=\langle C \rangle)} \tag{13}$$

Derivadas Discretas

- Se tiene que: $\dot{x}(t) = lim_{h_o \to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$, luego para $\Delta t \approx 0$:
- Derivada hacia adelante:

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \tag{14}$$

- Derivada hacia atrás:

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \tag{15}$$

- Derivada centrada

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \tag{16}$$

- Segunda Derivada

$$\ddot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \tag{17}$$

- Método de Verlet:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\frac{\Delta t^2}{m} \tag{18}$$

Resumen Aux2

Leyes de Newton

1- Si un cuerpo en reposo no interactúa con el entorno, entonces este permanecerá en reposo indefinidamente.

2- El cambio de momentum $\delta\vec{p}$ de una partícula es proporcional a la fuerza aplicada y a la duración δt de su aplicación.

3- La fuerza que un agente externo ejerce sobre el cuerpo es igual en magnitud, pero de sentido opuesto, a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el agente externo.

Centro de Masas

Si se considera un sistema compuesto por N partículas de masa m_i y posición $\vec{r_i}$, cuya masa total sea $M = \sum_{i=0}^{N} m_i$. Entonces su centro de masa está dado por

$$\vec{R} = \sum_{i=0}^{N} \frac{m_i}{M}\vec{r_i}$$

Centro de masa de centros de masas

Si $\vec{R_A}$ localiza el centro de masas de un sistema A de masa M_A y $\vec{R_B}$ el de un sistema B de masa M_B, entonces el centro de masas del conjunto está dado por:

$$\vec{R} = \frac{\vec{R_A}M_A + \vec{R_B}M_B}{M_A + M_B}$$

Energía cinética por rotación

Considerando un sistema de N partículas rotando en torno a un eje fijo a velocidad angular ω, en donde cada partícula de masa m_i está a una distancia ρ_i del eje de giro, se tiene que la Energía Cinética de Rotación es:

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=0}^{N} m_i\rho_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I$$

Donde I se denomina Momento de Inercia.

Resumen Aux3

Estática

Corresponde a un conocimiento empírico, el cual posee dos restricciones fundamentales:

- Para que el centro de masas no se mueva (o permacezca a velocidad constante) la suma de las fuerzas externas debe ser nula,
- Para que el objeto no rote se exige que el torque neto sea nulo.

Torque

Corresponde a la habilidad de una fuerza $\overrightarrow{F}$ de inducir un giro del cuerpo en torno al origen O. Este origen es totalmente arbitrario, sin embargo, una vez escogido, ha de mantenerse duerante el desarrollo de las ecuaciones en cuestion. Se define el torque $\overrightarrow{\tau}$ asociado a una fuerza $\overrightarrow{F}$ aplicada en un punto P (donde $\overrightarrow{r}$ representa el vector que une el eje de rotación con P) como: $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{r}$ luego $|\overrightarrow{\tau}| = F \cdot rsin(\theta_F r)$. Los torques que inducen giros anti-horarios se consideran positivos y los que inducen giros horarios se consideran negativos.

Torque debido a la Gravedad

$\overrightarrow{\tau_g} = \overrightarrow{R_Cm} \cdot M \cdot \overrightarrow{g}$

Condiciones

Para que el sistema esté en equilibrio estático, se requiere:

- $\sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{F_k} = 0$
- $\sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{\tau(F_k)} = 0$
- $\overrightarrow{v} = 0$
- $\overrightarrow{\omega} = 0$

Resumen Aux4 y 5

- Torque: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
- Momento de inercia: $I_o = \sum m_i r_i^2$
- Teorema de Steiner (ejes paralelos):

$$I_A = I_o + MR_{o-A}^2$$

- Teorema de los ejes perpendiculares:

$$I_{\perp} = I_{xx} + I_{yy}$$

- Momentum angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$
- Ecuación de torque: $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$
- Velocidad angular: $\vec{\omega} = \omega\hat{e} = \dot{\theta}\hat{e}$
- Aceleración angular: $\vec{\alpha} = \alpha\hat{e} = \dot{\omega}\hat{e} = \ddot{\theta}\hat{e}$
- Momentum angular de un sólido rígido: $\vec{L_o} = I_o\vec{\omega}$
- Ecuación de torque para un sólido rígido:

$$\vec{\tau} = I_o\vec{\alpha} = I_o\dot{\vec{\omega}} = I_o\ddot{\theta}\hat{e}$$

- Energía cinética: $K = K_{CM} + K_{Rot}$
- Energía potencial: $U = U_g + U_e$
- Energia mecánica: $E = U + K$
- Conservación de la energía (si no hay fuerzas disipativas):

$$E_i = E_f \Longleftrightarrow U_i + K_i = U_f + K_f$$

- Conservación del momentum angular: $I_i\omega_i = I_f\omega_f$
- Rodadura:

$$\Delta x = R\Delta\theta$$
$$v = R\omega = R\dot{\theta}$$
$$a = R\alpha = R\ddot{\theta}$$

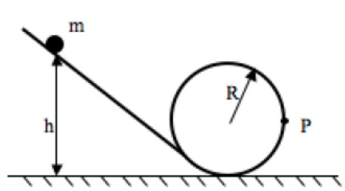
- Momentos de inercia:

Aro en el centro $I = MR^2$
Disco en el centro $I = \frac{1}{2}MR^2$
Disco en el diámetro $I = \frac{1}{4}MR^2$
Barra en el extremo $I = \frac{1}{3}ML^2$
Barra en el centro $I = \frac{1}{12}ML^2$

Problemas

P1. Suponga que usted invita a su polol@, pinche, pelad@ a Fantasilandia y deciden ingresar al Boomerang. Su acompañante, bastante asustad@ le dice que tiene miedo por la brutalidad de la montaña rusa, pero usted, que es un/a dinstinguid@ estudiante de primer año de la prestigiosa universidad de Chile se las da de engrupid@ y se pone a hacer un par de cálculos para modelar la situación. Para esto, considere el carrito de la montaña rusa con ustedes al interior como una esféra sólida de masa m y radio r que rueda sin deslizar. Comienza su descenso desde el reposo con el punto más bajo de la esfera a una altura h sobre la base del carril de forma circular de radio R (mucho mayor a r).

(a) ¿Cuál es la velocidad del centro de la masa m cuando esta está en la parte más baja del carril?.
(b) ¿Cuál es el mínimo valor de h tal que el carrito complete el carril circular?
(c) Pruebe que pasa con la aceleración angular con distintas Inercias.



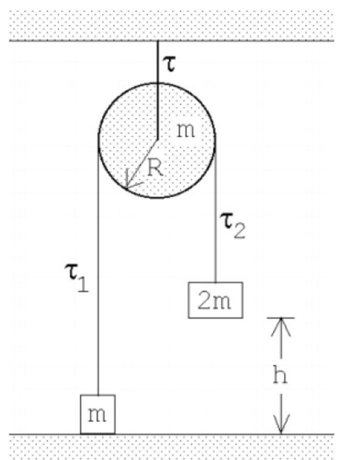
P2. Considere la máquina de Atwood mostrada en la figura adjunta. La polea consta de un disco uniforme de masa m (que coincide con el valor de la masa más pequeña colgada de la máquina) y radio R. El momento de inercia para rotaciones en torno al eje de un disco es $I = mR^2/2$.El roce entre la cuerda y la polea hace que esta última gire mientras las masas estén en movimiento. Suponga que la cuerda no tiene masa y que no desliza sobre la polea. La masa 2m parte del reposo desde una altura h.

(i) Usando el teorema de conservación de la energía, encuentre la velocidad de la masa 2m cuando esta llega al suelo.

(ii) Encuentre la tensión de la cuerda a ambos lados de la máquina de Atwood. Es decir, encuentre T1 y T2 en función de m, g y R. (Cuando el momento de inercia de la polea no se puede despreciar (lo que es el caso del presente problema) entonces la tensión de la cuerda no es la misma a ambos lados de la polea).

(iii) Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la polea mientras las masas están en movimiento.

(iv) Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la polea después de que la masa 2m llega al suelo (y todas las componentes de la máquina de Atwood están en reposo).



P3. Se plantea estudiar el lanzamiento del hielo que usted le tira a la piscola, considerando el hielo como una pelota de diámetro b (1 cm). Los lanzamientos son verticales desde el piso para que caigan en el vaso piscolero. Para el estudio se filmará el movimiento del hielo en vuelo mediante una webcam, con capacidad de registrar 30 cuadros de alta definición en un segundo (30 fps). La velocidad de lanzamiento del hielo se ajusta de modo que alcance una altura máxima h (60 cm). La cámara se ubica a una distancia D (2,0 m) de la trayectoria del hielo, a una altura h/2 del nivel de lanzamiento. La masa del hielo es tal que el efecto debido al roce con el aire es despreciable. Considere g = 9, 8 m/s2.

(i) Calcule con dos cifras significativas la velocidad del lanzamiento del hielo al vaso, el lapso de vuelo y el número de imágenes registradas con el hielo en el aire hasta que llega a la piscola.

(ii) Estime el número de cuadros para los cuales imágenes consecutivas del hielo no se superponen.

(iii) Identifique dos fuentes de error al usar ImageJ para medir la altura del hielo con respecto al piso, en función del tiempo. Especifique y subraye si el error que Ud. identifica es de índole sistemático o aleatorio.

P4.

P1. La ecuación que modela el decrecimiento en función del tiempo de un objeto de masa m sujeto a una fuerza de roce viscoso está dada por

$$mv' = -\gamma v \tag{1}$$

Como datos de problema considere: $v_0 = 1m/s$, $\gamma = 1kg/s$ y $m = 1kg$

1. Corrobore que $v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ es solución de (1). A continuación determine el tiempo t_* velocidad cumpla $v(t_*) < 10^{-3}m/s$ y grafique el comportamiento en función del tiempo hasta ese punto.
2. Aproxime v' mediante la derivada centrada y encuentre una expresión genérica que permita obtener el valor v_n considerando un paso de discretización Δt.
3. Proponga un paso de discretización adecuado y justifique su respuesta.