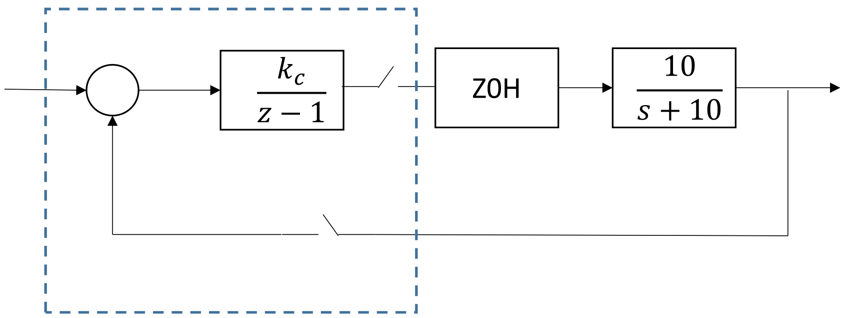
Segundo Control
Fundamentos de Control EL4004

1) Un ingeniero de control, al parecer sin formación adecuada, implementa un sistema de control digital considerando solo un elemento integral y una ganancia k_c. El sistema utiliza una planta, un retentor de orden cero y un controlador que ya está programado. El sistema debe ser analizado utilizando la transformada z exacta.



a) Demuestre que el sistema es estable cuando se cumple la condición:

$1 > k_c$ (15 puntos)

Donde T_s es el tiempo de muestreo.

b) Para una ganancia k_c=0.3, y un tiempo de muestreo de T_s=0.01. ¿Cuál es la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento de los polos de lazo cerrado?. (15 ptos)

c) Con mucho esfuerzo un ingeniero logra finalmente eliminar el integrador digital de forma que el control es cambiado a un proporcional de ganancia k_c. El sistema se implementa con un tiempo de muestreo de T=0.01. Encuentre la ganancia necesaria para obtener un coeficiente de amortiguamiento de ζ=0.5. ¿Cuál es la frecuencia natural en este punto?, ¿Cuál es el error del sistema para una entrada escalón unitario?. (30 puntos)

Solución:

Parte a

a) Es simple mostrar que la función de lazo abierto de este problema es:

$$GH(z) = \frac{k_c}{(z-1)} \frac{(1-e^{-10T_s})}{(z-e^{-10T_s})}$$

Donde la ganancia del sistema es $K_{sist} = k_c(1-e^{-10T_s})$. En la figura 1 es posible deducir que:

$$d^2 + \left|\frac{(1+A)}{2}\right|^2 = 1 \quad \rightarrow \quad d^2 = 1 - \left|\frac{(1+A)}{2}\right|^2$$

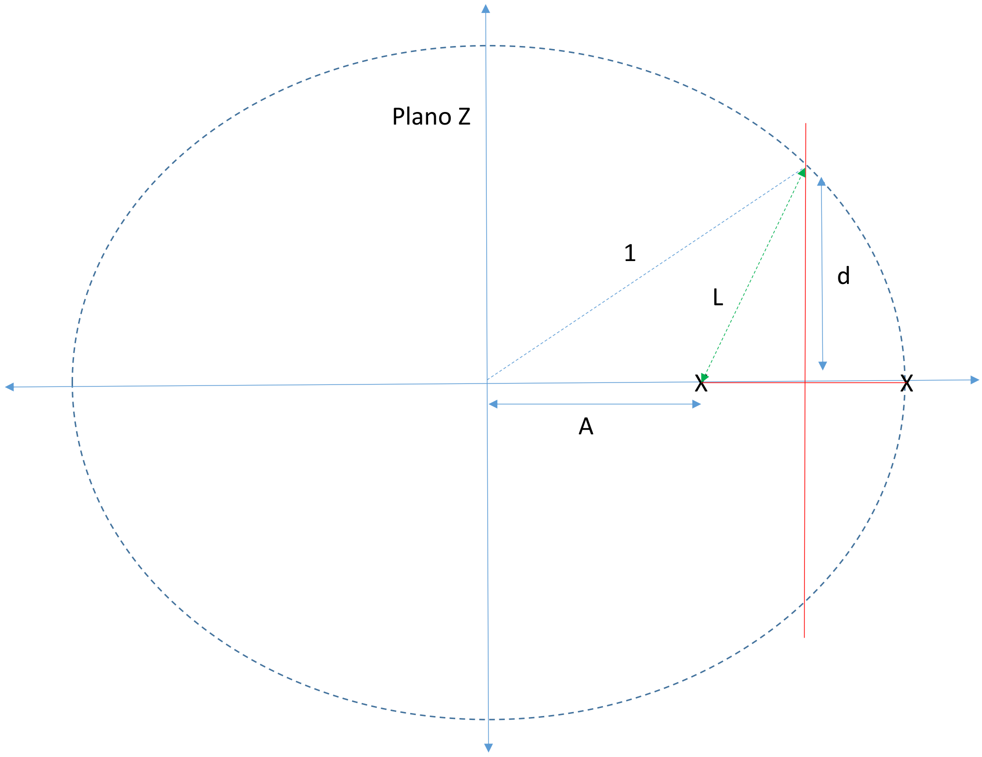


Fig. 1.

Donde $A = e^{-10T_s}$. De la figura también se obtiene:

$$\left[\frac{1-A}{2}\right]^2 + d^2 = L^2 \quad \rightarrow L^2 = \left[\frac{1-A}{2}\right]^2 + 1 - \left[\frac{(1+A)}{2}\right]^2$$

Resolviendo lo anterior se llega a : $L^2 = (1-A) = (1-e^{-10T_s})$. De la condición de módulo se tiene que en un sistema estable se cumple:

$$K_{sist} < L^2 \quad \rightarrow k_c(1-e^{-10T_s}) < (1-e^{-10T_s})$$

Por lo tanto para mantenerse en el interior del círculo unitario la ganancia $k_c < 1$. (siendo estricto con la matemática, k_c podría ser menor o igual a uno).

Parte b.

b) Si la ganancia es k_c= 0.3, entonces se tiene que la nueva distancia L al punto donde se encuentran los polos de lazo cerrado se puede calcular como:

$$L^2 = k_c(1-e^{-10T_s}) \rightarrow L^2 = 0.3 * (1-0.9048) = 0.0286$$

Donde A=0.9048 para T=0.01s.

La nueva distancia d, se obtiene como:

$$d^2 + \left[\frac{1-A}{2}\right]^2 = 0.0286 \;\rightarrow\; d^2 = 0.0286 - 0.0023 \rightarrow d = 0.1620$$

El punto z, donde se encuentran los polos de lazo cerrado corresponde a:

$$z_{12} = 0.9524 \pm j0.162$$

Utilizando la definición de z se tiene:

$$z = e^{sT_s} = e^{-\sigma T_s}[cos(\omega T_s) + jsin(\omega T_s)] = 0.9524 + j0.162$$

Separando en parte real e imaginaria se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, que entregan como solución:

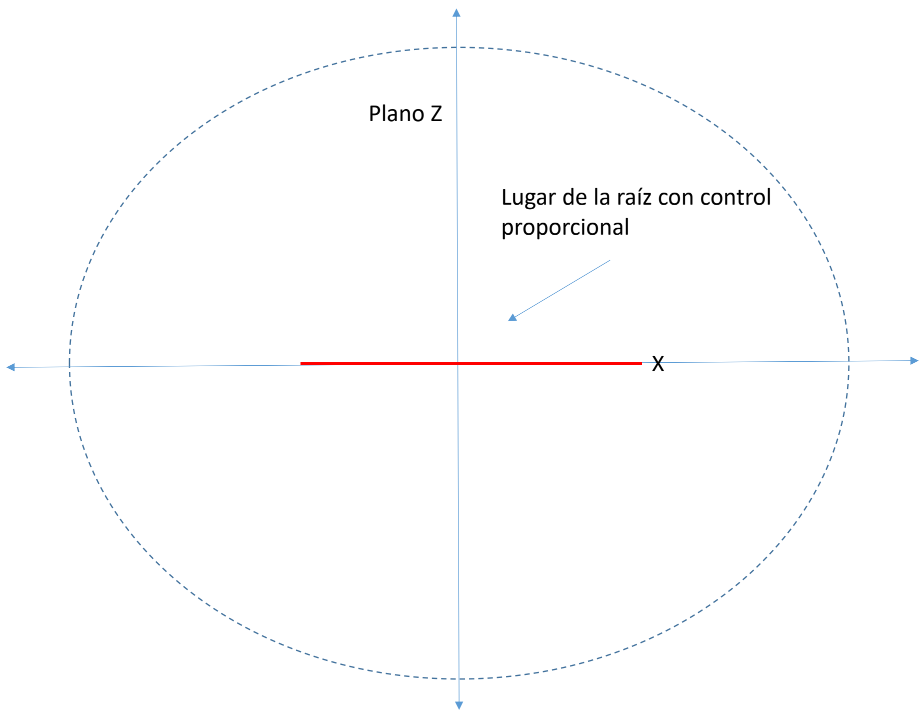
$$\tan(\omega T_s) = \frac{0.162}{0.9524} \;\rightarrow\; \omega = 16.848\, rads^{-1}.$$

Y σ=3.45. Por lo tanto la frecuencia natural es de 17.2 rads^{-1} y el coeficiente de amortiguamiento es de aproximadamente 0.2.

Parte c.

Esta es la parte que conceptualmente puede crear problemas.

Si es el controlador es proporcional entonces el lugar de las raíces en z no tiene polos con parte imaginaria distinta a cero.



Utilizando nuevamente la definición de z se tiene que:

$$\sigma_z \pm j\omega_z = e^{-\sigma T_s}[cos(\omega T_s) + jsin(\omega T_s)]$$

Donde σ_z y ω_z son variables del plano z, y σ, ω son variables del plano s. A su vez, en el dibujo se cumple que ω_z=0 y σ_z<0. La solución de este sistema de ecuaciones es que $cos(\omega T_s) < 0$ y $sin(\omega T_s) = 0$. Finalmente se llega a:

$$\omega T_s = \pi \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{T_s} = 314.15\, rads^{-1}$$

Si ζ=0.5, entonces es simple calcular el valor de σ como: $\sigma = \omega/\tan[cos^{-1}(\zeta)] = 181.38 rads^{-1}$. Por lo tanto la frecuencia natural es ω_n=362.76rad/seg.

Utilizando la definición de z se llega a σ_z=-0.1630. La ganancia se calcula utilizando la condición de módulo como:

$$k_c(1 - e^{-10T_s}) = (e^{-10T_s} + 0.1630) \rightarrow k_c = 11.22$$