



Gran Auxiliar Gran

30 de Noviembre de 2017

P1. Panchito cruza el parque O'Higgins todos los días para llegar a la U. Lo ha cruzado tantas veces que ya se sabe de memoria sus caminos y le parece aburrido. Debido a esto, Panchito ha decidido decorar el parque.

El parque está formado por n puntos de interés y $n - 1$ caminos que unen estos puntos. Los caminos están hechos de tal manera que cualquier punto es alcanzable desde otro gracias a estos caminos. Panchito ha decidido poner un globo de color en cada punto de interés. Además, con el fin de que el parque se vea muy colorido, Panchito se impuso la restricción de que para cualquier trío de puntos A, B y C , si A tiene un camino directo hacia B , y B tiene un camino directo hacia C , entonces los tres puntos deben tener globos de colores diferentes.

Teniendo todo esto en cuenta, piense un algoritmo eficiente que le diga a Panchito de qué manera colorear el parque usando la mínima cantidad de colores, para que así Panchito no pierda tiempo y termine de revisar la tarea 2.

P2. Sea un grafo simple y conexo $G(V, E)$, considerando $u, v \in V$, definiremos las siguientes funciones:

- $MaxFlow(u, v)$: Cantidad máxima de caminos que pueden ir desde u hasta v sin repetir aristas.
- $MinCut(u, v)$: Conjunto mínimo de aristas tales que, al ser sacadas del grafo, desconectan a u de v .

Demuestre que:

$$MaxFlow(u, v) = |MinCut(u, v)|$$

P3. Sven acaba de descubrir un juego llamado “Espejos Láser” y quiere que lo ayudes a jugar. El juego consiste en que te mostrarán un polígono regular de n caras (con n aleatorio) hecho de espejos, y en una de las caras hay un láser. Tú puedes disparar el láser a cualquiera de las otras caras y éste rebotará dentro del polígono hasta llegar a la cara inicial. El disparo siempre va directamente al centro de cada cara y mantiene el ángulo de reflexión. Por ejemplo, si desde la cara inicial de un polígono con 12 lados le disparas a la cara número 3, el disparo rebotará a la cara 5, luego a la 7, luego a la 9, luego a la 11 y finalmente vuelve a la cara número 1. Un disparo está caracterizado por la cantidad de caras d que avanza en cada rebote, que en este caso son 2.

En este juego, un disparo ganador es aquel en que el láser logra recorrer todas las caras del polígono antes de volver a la primera cara. Aquí es donde te necesita Sven. Dado un n , Sven quiere que le soples a cuántas caras de distancia tiene que hacer los disparos para que éstos sean ganadores y ofrece regalarte un frugelé por cada respuesta correcta que le des.

Dado que a ti te gustan los frugelés, busca una caracterización para los disparos d, n que sean ganadores y demuestra que es correcta.

P4. Muestre que se puede factorizar fácilmente n cuando sabemos que es el producto de dos números primos, p y q y sabemos el valor de $(p - 1)(q - 1)$.

P5. Resuelva la siguiente ecuación de congruencia:

$$x = 2(\text{mod } 3)$$

$$x = 3(\text{mod } 5)$$

$$x = 2(\text{mod } 7)$$