



Auxiliar 12

23 de Agosto de 2017

P1. A Sven, al igual que a muchos estudiantes del DCC, le gusta mucho un juego de cartas llamado HearthstoneTM. Tanto así que organizará un gran torneo de Hearthstone en la salita del DCC. Este torneo funcionará de la siguiente manera:

- Cada persona deberá jugar una partida contra cada uno de los demás participantes del torneo.
- Cada enfrentamiento termina en una victoria para alguno de los dos jugadores (No hay empates).
- Luego de que todos hayan jugado entre si, el ganador será quien haya conseguido mas victorias.

Dado que a Sven le encantan los grafos, no se le ocurrió mejor idea que guardar los resultados del torneo en un grafo dirigido G . Éste tendrá un nodo por cada participante, mientras que por cada partida que se haya jugado G tendrá un arco saliendo desde el nodo ganador y apuntando hacia el nodo perdedor.

Asumiendo que participarán n personas en el torneo, responda las siguientes dudas/tareas que le da Sven:

- a) ¿De cuántas maneras puede resultar el torneo?, es decir, ¿De cuántas maneras podemos escribir G ?
- b) ¿Cuanto es la suma del grado de salida y de entrada de todos los nodos de G ?
- c) Demuestre que G siempre tendrá algún camino hamiltoniano

Asumamos ahora que Hearthstone es un juego tan bien diseñado, que el resultado de las partidas depende solamente de la habilidad de los jugadores y no de su suerte al robar las cartas. De esta manera, si un jugador con mayor habilidad juega contra uno de menor habilidad, el primer jugador ganará siempre. Asumamos también que la habilidad de los jugadores es cuantificable y todos los participantes del torneo tendrán un nivel de habilidad distinto.

Demuestre que bajo estas condiciones siempre se cumplirán las siguientes propiedades:

- d) G es acíclico.
- e) G representa una relación de orden total. (Solo para esta pregunta asuma que el grafo tiene loops, es decir, cada nodo tiene un arco que apunta a si mismo)
- f) Ningún par de personas tendrá la misma cantidad de victorias.
- g) G tendrá un único camino Hamiltoniano.

P2. El diámetro de un grafo es la máxima distancia entre dos vértices distintos.

- a) Muestre que si el diámetro de un grafo simple G es a lo menos cuatro, entonces el diámetro de su complemento $\overline{G}$ es a lo mas dos.
- b) Muestre que si el diámetro de un grafo simple G es a lo menos tres, entonces el diámetro de su complemento $\overline{G}$ es a lo mas tres

P3. Sea G un grafo simple y conexo. Decimos que G es k -crítico, para $k \geq 1$, si (a) G es coloreable con k pero no con $k - 1$ colores, y (b) al sacar cualquier arco de G se obtiene un grafo que se puede colorear con $k - 1$ colores.

Demuestre que si G es k -crítico, entonces cada uno de sus vértices tiene grado al menos $k - 1$.