MA4401-1. Procesos de MArkov 2017.
Profesor: Daniel Remenik.
Auxiliares: Nicolás Zaldueno y Raimundo Saona.

Resumen Esperanza Condicional

A continuación se muestra la definición formal del operador esperanza condicional, junto con una serie de propiedades que se darán por conocidas en el curso.

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Consideremos $X \in L^1(\mathcal{F})$ a valores a un espacio vectorial normado $\mathbb{F}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra. Sabemos que:

$$\begin{aligned} \nu : &\mathcal{G} \to \mathbb{F} \\ A \mapsto \nu(A) &:= \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \end{aligned}$$

es una medida tal que $\nu \ll \mu$ y, ya que X no es necesariamente $\mathcal{G}$-medible, por el teorema de Radón-Nikodým, podemos definir $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{P}$-C.S. por las siguientes propiedades:

- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ es $\mathcal{G}$-medible.
- $\forall A \in \mathcal{G} \quad \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$

Nota: La definición se puede extender considerando el caso en que la medida $\mathbb{P}$ es sólo σ-finita sobre $\mathcal{G}$.

A continuación se presentan varias propiedades del operdador $\mathbb{E}(\cdot|\cdot)$, esperanza condicional.

Prop 1. Linealidad y Positividad

$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \to L^1(\mathcal{G})$ es un operador lineal y positivo, ie:

$$X \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$$

Nota: Esto implica que $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G})$ es monótono.

Prop 2. Desigualdad de Jensen

Si consideramos $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ una función convexa, se tiene que:

$$g(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[g(X)|\mathcal{G}]$$

Prop 3. 1-Lipschitz

$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \to L^1(\mathcal{G})$ es 1-Lipschitz y más aún:

$$\forall p \in [1, \infty] \forall X \in L^1 \cap L^p \quad ||\mathbb{E}(X|\mathcal{G})||_{L^p} \leq ||X||_{L^p}$$

Prop 4. **σ-álgebra Continuidad, $\mathbb{P}$-C.S. y L^1**

Considerando $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sub-σ-álgebras, tenemos que:

$$(\mathcal{G}_n) \nearrow \mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]) \longrightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad \text{en } L^1(\mathcal{G}), \mathbb{P}-C.S.$$

$$(\mathcal{G}_n) \searrow \mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]) \longrightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad \text{en } L^1(\mathcal{G}_m)\forall m, \mathbb{P}-C.S.$$

Prop 5. **Generador numerable disjunto**

Tomando $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ disjuntos, con $|I| \leq |\mathbb{N}|$, se tiene que:

$$\mathbb{E}(X|\sigma[(A_i)_{i\in I}]) = \sum_{i\in I} \frac{\int_{A_i} X d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}$$

Prop 6. **Multiplicación, Medibilidad, Hölder y Postividad**

Si consideramos $X \in L^1 \cap L^p$, con $p \in [1, \infty]$, para q el Hölder conjugado de p tenemos que:

$$\forall Z \in L^q(\mathcal{G}) \quad Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(ZX|\mathcal{G})$$

$$\forall Z \geq 0 \quad Z\mathcal{G} - \text{medible} \wedge XZ \in L^1(\mathcal{F}) \wedge X \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(ZX|\mathcal{G})$$

Prop 7. **Esperanzas Condicionales anidadas**

Tomando $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ una sub-sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, se tiene que:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G})$$

Prop 8. **Fatou,** $\liminf$

Tomando $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0, \subseteq L^1(\mathcal{F})$, tenemos que:

$$\mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$$