

MA4401-1. Procesos de Markov 2017.

Profesor: Daniel Remenik.

Auxiliares: Nicolás Zalduendo y Raimundo Saona.



## Auxiliar 9

Lunes 5 de Junio

### C1. Estados finitos, Solución simple, Hipótesis varias

-----

Considere una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en  $E$ , de cardinal finito. Muestre que:

$$[\forall x \in E \quad -q(x, x) < \infty, \sum_{y \in E} q(x, y) = 0] \Rightarrow [P' = PQ = QP \quad \wedge \quad P_t = e^{tQ}]$$

### C2. Cadenas Explosivas

-----

En el año 2050 se han creado naves espaciales que pueden viajar a velocidad constante... aún cuando giran en 180 grados!! Un experimento que ha desafiado a las matemáticas por décadas es el siguiente: En el punto de inicio parten dos naves en la misma dirección, una al doble de velocidad que la otra, cuando la más rápida ha llegado a un año luz de distancia del origen vuelve a tocar a la otra nave; una vez que se encontraron, se repite la acción, donde ahora la nave más rápida recorre menos distancia.

Un poco de cálculo diría que el tiempo que se demora la nave más rápida en tocar la otra nave una cantidad infinita de veces es finito!! Motivados por esta situación, defina una cadena de Markov de nacimiento puro que corresponda a las veces que las naves se han tocado hasta el instante  $t$ , ayudándose de un proceso de Poisson.

- Sean  $(T_n)_{n \geq 1}$  los tiempos de renovación y muestre que hay explosión casi seguramente, ie:  $\mathbb{P}(T_\infty < \infty) = 1$ .
- Exhiba la matriz  $Q$  del proceso y arregle la cadena para que ésta no ‘desaparezca’.
- Generalice la situación para el caso en el que las tasas de renovación no son homogéneas y se tiene que

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

- Encuentre la diagonal del semigrupo markoviano a tiempo  $t$  y chequee que corresponde a la diagonal de la matriz  $e^{tQ}$ , ¿puede mostrar que las matrices son las mismas?

### C3. Nacimiento y Muerte Lineal

-----

Considere el siguiente modelo de crecimiento de una población de bacterias: Cada bacteria se parte en dos en un tiempo exponencial con media  $\beta > 0$ .

Expresa el modelo como un proceso de nacimiento puro y chequee que las tasa son lineales, ie:  $\lambda_n = n\beta$ .

Supongamos que se tiene una sola bacteria en tiempo cero. Luego, el salto de  $n$  bacterias a  $(n+1)$  bacterias se realiza en tiempo  $T_n = t_1 + \dots + t_n$ , donde  $t_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$ . Muestre que  $\mathbb{E}(T_n)$  crece al mismo ritmo que  $\log(n)$ , ¿es esto suficiente para afirmar que la población de bacterias es finita en todo tiempo casi seguramente?

**A1. Arreglo de máquinas, Tiempo de descanso**

-----

Un taller tiene 5 máquinas y 1 maquinista. Cada máquina funciona bien hasta que falla a un tiempo aleatorio que sigue una distribución exponencial de media 5 horas. Por el otro lado, al maquinista le toma un tiempo exponencial de media 2 horas reparar una máquina, independiente de cual sea. Las máquinas están en habitaciones distintas y su funcionamiento no depende del resto de las otras máquinas.

Modele la situación como una cadena de Markov a tiempo continuo exhibiendo la matriz  $Q$ , ¿qué tipo de preguntas le gustaría responder? ¿es capaz de decir el tiempo medio que el maquinista descansa a largo plazo?

**A2. Crecimiento de fisuras en rocas**

-----

El tamaño de una fisura en una roca es modelado en distancia discreta por un proceso de nacimiento puro con parámetros

$$\lambda_k = (1 + k)^\rho, \quad k \geq 1$$

ie: la tasa de crecimiento de la fractura es una potencia de  $(1 + k)$  cuando el largo de la fractura es  $k$ .

Muestre que, si  $\rho > 1$ , el tiempo que toma una fractura en crecer a infinito es finito y concluya que el tiempo que toma una roca en ser partida es finito casi seguramente.