MA4401-1. Procesos de Markov 2017.
Profesor: Daniel Remenik.
Auxiliares: Nicolás Zalduendo y Raimundo Saona.

Auxiliar 1

Lunes 20 de Marzo

T1. Esperanza Condicional, Evaluación puntual, Proyección en L^2

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X, Y \in L^1$ dos variables aleatorias reales. Muestre que:

$$\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ medible} \quad tq \quad \mathbb{E}(X|Y) = f_X(Y)$$

Además, f_X es única $\mathbb{P}oY^{-1}$-C.S.

Suponga ahora que $X \in L^2(\mathcal{F})$. Muestre que:

$$||X - \mathbb{E}(X|Y)||_2 = \inf_{Z \in \sigma(Y)} ||X - Z||_2$$

es decir, $\mathbb{E}(\cdot|Y)$ corresponde al operador proyección sobre $L^2(\sigma(Y))$ un s.e.v. cerrado de $L^2(\mathcal{F})$.

T2. Independencia, Evaluación

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.
$X : \Omega \to (M_1, \mathcal{M}_1)$ una variable aleatoria y $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} : \Omega \to (M_2, \mathcal{M}_2)$ una sucesión de variables aleatorias. Consideremos $\Phi : M_1 \times M_2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Pruebe que si X es independiente a $\sigma((Y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ entonces:

$$\mathbb{E}(\Phi(X, Y_0, Y_1, ...)|X = x) = \mathbb{E}(\Phi(x, Y_0, Y_1, ...)) \quad \mathbb{P}oX^{-1} - C.S.$$

T3. Independencia, σ-álgebras

Sea $X \in L^1(\mathcal{F})$ y $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ dos sub-$\sigma-$álgebras tales que $\mathcal{H}$ es independiente a $\mathcal{G} \vee \sigma(X) = \sigma(\mathcal{G} \cup \sigma(X))$. Demuestre que:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

T4. Ejemplo, Convergencia de σ-álgebras

Consideremos $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ como espacio de medida con μ la medida de Lebesgue. Definimos $D_n^m := [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})$ y consideramos $\mathcal{D}_n := \{D_n^m : m \in \mathbb{Z}\}$. Muestre que:

$$\forall f \in L^1(\mathcal{B}) \quad \mathbb{E}(f|\sigma(\mathcal{D}_n)) \longrightarrow f \quad \text{ en } L^1, \mu - C.S.$$