

MA3801-1: Análisis**Profesor:** Juan Davila y Manuel del Pino**Auxiliares:** Guillaume Grelier y Pierre Vandaële**Guía C2****P1. Compacidad**Sea (X, τ) un espacio topológico

- a) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a un elemento x .
Mostrar que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.
- b) Suponemos (X, τ) Hausdorff separado y $K_n \subset X$ compactos encajonados y no vacíos (para $n \geq 1$, $K_{n+1} \subset K_n$). Mostrar que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ y para todo $\omega \in \tau$ abierto que contiene a K , existe $n \geq 1$ tal que $K_n \subset \omega$.
- c) Consideramos (Y, τ') compacto, $X \times Y$ con la topología producto y $\pi : X \times Y \rightarrow X$ la proyección sobre X .
Mostrar que π es cerrada (la imagen directa todo cerrado es cerrada).

(Las preguntas son independientes.)

P2. Compactificación con un punto

Definición : Sean (X, τ) , (Y, τ') espacios topológicos. Decimos que (Y, τ') es una compactificación de (X, τ) ssi existe $\phi : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ tal que si consideramos $\phi(X)$ con la topología inducida por τ' , entonces $\phi : X \rightarrow \phi(X)$ es un homeomorfismo y $\phi(X)$ es denso en Y .

- a) Mostrar que todo espacio compacto, Hausdorff separado (T_2), es T_4 : es decir que toda par de cerrados disjuntos se puede separar por abiertos disjuntos.
- b) Mostrar que todo compacto en un espacio topológico T_2 es cerrado.

Consideramos (X, τ) espacio topológico, no compacto y ∞ un elemento que no pertenece a X .Sea $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ y $\tau_\infty = \tau \cup \{X_\infty \setminus K : K \subset X \text{ compacto cerrado}\}$.

- c) Mostrar que (X_∞, τ_∞) es un espacio topológico.
- d) Mostrar que (X_∞, τ_∞) es una compactificación de (X, τ)
- e) Mostrar que (X_∞, τ_∞) es T_2 ssi (X, τ) es T_2 y localmente compacto (es decir : para todo $x \in X$ existe $V_x \subset X$ vecindad de x tal que $\overline{V_x}$ es compacto).
Deducir que si (X, τ) es T_2 localmente compacto entonces (X_∞, τ_∞) es T_4 .
- f) Si (X, τ) es un espacio compacto, mostrar que para todo $x \in X$, si $X' = X \setminus \{x\}$ entonces (X', τ_∞) es homeomorfo a (X, τ) .
- g) Deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n)_\infty = S^n$ (homeomorfos) donde S^n es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$.
Determinar $(0, 1)_\infty$. Deducir que la compactificación de un conjunto puede ser no única.

P3. Espacios ℓ_p

- a) Mostrar que si $1 \leq p < q$ entonces ℓ_p es un subconjunto de ℓ_q pero no es cerrado en $(\ell_q, \|\cdot\|_q)$ (Hint : mostrar primero que ℓ_p es un subconjunto estricto de ℓ_q).
- b) Para $p \geq 1$ consideramos $F_p = \{x \in \ell_2 : \sum |x_n| \leq p\}$.
Mostrar que F_p es cerrado en ℓ_2 y tiene interior vacío.

- c) Deducir que ℓ_1 es de primera categoría en ℓ_2 (unión numerable de nulamente densos en ℓ_2).
- d) Consideramos $p \geq 1$ y $A \subset \ell_p$.
Mostrar que A es relativamente compacto en ℓ_p ssi A es acotado en norma p y

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \geq 1 : \sup_{x \in A} \left(\sum_{n > n_0} |x_n|^p \right) < \epsilon$$

P4. Convergencia uniforme

Sea (X, τ) un espacio compacto, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ para $n \geq 1$ funciones continuas tal que $(f_n)_n$ converge puntualmente a f :

$$\forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x)$$

- a) Mostrar que si para cada $x \in X$, $(f_n(x))_n$ es una sucesión creciente entonces

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

Dar ejemplos para mostrar que falla si no se supone X compacto, o si no se supone f continua.

- b) Si $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y para cada $n \geq 1$, f_n es una función creciente entonces :

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

Observar que no se necesita suponer que las funciones f_n son continuas.

P5. Topología Producto

Consideramos $X = [0, 1]^{[0, 1]}$ con la topología producto ($[0, 1]$ considerado con su topología inducida por $\mathbb{R}$).

- a) $f \in X$ se dirá simple si $\text{Card}(\{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\}) < \infty$.
Mostrar que el conjunto de las simples es denso en X .
- b) Caracterizar la convergencia de sucesiones en X .
- c) Sea $f \in X$ tal que $\text{Card}(\{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\}) > \text{Card}(\mathbb{N})$.
Mostrar que f no puede ser límite (considerando la topología de X) de una sucesión de simples.
- d) Deducir que X no es metrizable.
- e) Mostrar que cada simple es límite de una sucesión de funciones continuas.
Mostrar que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ es límite de una sucesión de simples pero no de continuas (pensar en Baire).

P6. S.C.I.

Consideramos un espacio métrico (E, d) y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición : Una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *semi continua inferior (sci)* ssi para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x \in E, f(x) \leq \lambda\}$ es cerrado.

- a) Mostrar que f es sci ssi para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x \in E, f(x) > \lambda\}$ es abierto.
- b) Mostrar que f es sci ssi su epigrafo es cerrado en $E \times \mathbb{R}$ con la topología producto ($\text{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}, f(x) \leq \lambda\}$)
- c) Mostrar que f es sci ssi para todo $x \in X$, y todo $\epsilon > 0$ existe $V_x \subset X$ una vecindad de x tal que $f(V_x) \subset (f(x) - \epsilon, \infty)$.
- d) Deducir que f es sci ssi para todo $x \in X$ y $(x_n)_n$ tal que $x_n \rightarrow x : \liminf f(x_n) \geq f(x)$.
- e) Mostrar que si $(f_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones sci y $\sup(f_i) < \infty$ entonces $\sup(f_i)$ es sci.
- f) Si (E, d) es compacto y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ sci entonces f es acotada inferiormente y alcanza su ínfimo.