Auxiliar 3 - Variable Aleatoria, Esperanza y Varianza

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Diego Fuentealba Z [dieego.fz@gmail.com]
Cristóbal Parraguez C [cristobal.parraguez@gmail.com]

P1. Un dado equilibrado con n caras numeradas de 1 a n se lanza n + 1 veces y se anota el resultado obtenido. Sea X la v.a. que denota el lanzamiento donde ocurre la primera repetición.

(a) Determine R_X

(b) Muestre que

$$\mathrm{P(X = k)} = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}$$

Para todo $k \in R_X$

Hint: Puede generar los casos favorables por etapas: fijar el número del dado obtenido en lanzamiento k (primera repetición), elegir la posición de la aparición anterior de ese número, elegir los otros valores antes de k y elegir los valores después de k. Justifique por qué se puede aplicar el principio de la multiplicación.

Solución:

(a) Claramente la primera repetición es en el "mejor" de los casos en el segundo tiro y en el "peor" de los casos en el lanzamiento n + 1.

$R_X =$ 2 .... n + 1

(b) Definamos $\Omega =$ (x1, ...xn+1)$xi \in$ 1...n . Este será el espacio muestral, representando los números que han salido , ordenados en una secuencia. Dado que el dado es equilibrado y los lanzamientos independientes, el espacio Ω es equiprobable. Así P(X = k) es número de sucesos favorables dividos por número sucesos totales. Por principio de multiplación , $|\Omega =$ n^{n+1} Seguimos el hint y contamos los resultados favorables viendolo como un resultado de sucesivos experimentos, por esto podemos aplicar el Principio de Multiplicación. Escoger el número repetido se puede hacer de n formas. Este se debe poner en la posición k. Para poner el otro que se repite hay k - 1 posiciones posibles. Ahora, antes de k quedan k - 2 lugares. Como no puedo repetir más, se tiene que en la primera posicion libre puedo poner n - 1 simbolos, n - 2 en el siguiente y así hasta n - (k - 2) = n - k + 2. Así , elegir estos numeros se puede hacer de (n - 1)(n - 2)...(n - k + 2) formas. Por ultimo, los restantes numeros quedan libres y tengo n + 1 - k casillas libres. Esto se puede hacer de n$^{n+1-k} formas$

$$\mathrm{P(X{=}k)} = \frac{n(k-1)(n-1)...(n-k+2)n^{n+1-k}}{n^{n+1}}$$
$$\mathrm{P(X{=}k)} = \frac{(k-1)n!}{(n-k+1)!n^k}$$

P2. Suponga que 15 personas han sido seleccionadas al azar de un cierto grupo de personas, y se les pregunta si están a favor de cierta ley. Se sabe que un 43.75% de ese grupo esta a favor de la ley. Calcule la probabilidad de:

(a) Al menos 5 estén a favor

(b) La mayor parte esté a favor

Solución:

Notar que el grupo concirerado es MUCHO mayor que 15 personas (estabamos hablando de un estado entero de EEUU) por lo tanto sacar a una persona no altera el porcentaje de personas a favor dentro del grupo. Sea X una v.a que representa la cantidad de gente a favor. Entonces X es una Binomial de parametros N=15 y P=0.4375.

(a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [\ P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=1)\ ] =$

$$1 - [\ \binom{15}{4} \cdot 0.4375^4 \cdot (1-0.4375)^{(15-4)} +$$
$$\binom{15}{3} \cdot 0.4375^3 \cdot (1-0.4375)^{(15-3)} +$$
$$\binom{15}{2} \cdot 0.4375^2 \cdot (1-0.4375)^{(15-2)} +$$
$$\binom{15}{1} \cdot 0.4375^1 \cdot (1-0.4375)^{(15-1)} +$$
$$\binom{15}{0} \cdot 0.4375^0 \cdot (1-0.4375)^{(15-0)}]$$

$= 0.859$

(b) $P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) + P(X=14) + P(X=15) = 0.3106$

P3. Suponga que un borrachito da un paso a la derecha con una probabilidad p, y a la izquierda con una probabilidad 1 - p. Para modelar su movimiento supondremos que se posiciona sobre un número entero, comenzando en la posición x = 0. Sea X v.a. de la posición del borrachito luego de n pasos con n un número par:

(a) Determine R_X

(b) Escriba X como una v.a y calcule su esperanza

Solución:

(a) X es la posición al cabo de n pasos , con n par. Como se suman 1 o 1 dependiendo de si avanza a la derecha o la izquierda , la suma par de numeros impares es par. Por esto, solo puede tocar n umeros pares, siendo el menor n y el mayor n. Así

$$R_X = \text{-n} + 2k \in 0,\dots\ n$$

(b) Primero determinaremos la variable D, que representa pasos a la derecha (en la pauta original es Z, pero en la clase la nombré D, de todos modos el nombre es lo de menos xD) R_D = [0,1,2,...,n].

D es una variable Binomial, de variables n y p. Recordando que los pasaso hacia la derecha, más los pasos a la izquierda suman n.

$$X = D - (n - D) = 2D - n$$
$$E(X) = E(2D) - E(n) = 2 \cdot E(D) - n = 2 \cdot np - n = n(2p - 1)$$

P4. Determine la esperanza y varianza

(a) Un jugador novato de basquet tiene una probabilidad de acertar un triple de 0.2. Cantidad de tiros fallados antes de encestar

(b) En un partido tira 25. Cantidad de fallos durante el partido

Solución:

La base del ejercicio es en notar que son Variableas aleatorias discretas usuales.

(a) La primera se trata de una Geométrica con parametro 0.2, por lo tanto su esperanza es de $\frac{1}{0.2} = 5$. Pero es el valor esperado para el tiro en que encesta, por lo tanto falla uno menos, es decir, 4
Su varianza será de $\frac{1-0.2}{0.2^2} = 20$

(b) En este caso es una v.a Binomial con parametros N = 25 y P = 0.8 (es fallar).
Esperanza = $25 \cdot 0.8 = 20$
Varianza = $25 \cdot 0.8 \cdot (1 - 0.8) = 4$