

PAUTA P1 C3

a) $X_1, \dots, X_m$ duración ampollitas $\mu = 5$ $\sigma^2 = 25$

Sea Y : duración total ampollitas $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\mu = 500 \quad \boxed{0.7 \text{ pts}}$$

LA PROBABILIDAD PEDIDA ES $P(Y \geq 525)$ UTILIZANDO LA DESIGUALDAD DE MARKOV

$$P(Y \geq 525) \leq \frac{E(Y)}{525} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21} \quad \boxed{0.8 \text{ pts}}$$

b) Varianza de cada X_i es $\sigma^2 = 25$ como X_i son independientes sus covarianzas son 0. Luego se tiene que

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) = n\sigma^2 = 100 \times 25 = 2500 \quad \boxed{0.7 \text{ pts}}$$

LA PROBABILIDAD PEDIDA $P(400 < Y < 600)$ o equivalentemente

$$P(|Y - 500| < 100) = P(|Y - E(Y)| < 100)$$

UTILIZANDO LA DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV:

$$P(|Y - E(Y)| < 100) = 1 - P(|Y - E(Y)| \geq 100) \geq 1 - \frac{\text{Var}(Y)}{100^2}$$

$$= 1 - \frac{50^2}{100^2} = 75\%$$

$$\boxed{0.8 \text{ pts}}$$

© Usando TCL

$$P(Y \geq 525) = P(m\bar{X} \geq 525)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\frac{525}{m} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\approx P(N(0,1) \geq 0.5) \quad \boxed{1 \text{ pto}}$$

MIRANDO UNA TABLA NORMAL la probabilidad es 30.85% 0.5 pto

d) Sean $Y_1, \dots, Y_m$ ampolletas adicionales $m=50$ media $\nu=3$ y varianza $r^2=22$. El tiempo total que están prendidas todas las ampolletas $Z = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n E(X_i) + \sum_{i=1}^m E(Y_i) = n\mu + m\nu \quad \boxed{0.2 \text{ pto}}$$

$$Var(Z) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i=1}^m Var(Y_i) = n\sigma^2 + mr^2 \quad \boxed{0.2 \text{ pto}}$$

LA PROBABILIDAD PEDIDA es

$$= P(Z \geq 700)$$

$$= P\left(\frac{Z - (n\mu + m\nu)}{\sqrt{n\sigma^2 + mr^2}} \geq \frac{700 - (n\mu + m\nu)}{\sqrt{n\sigma^2 + mr^2}}\right)$$

por TCL

$$\approx P\left(N(0,1) \geq \frac{700 - (n\mu + m\nu)}{\sqrt{n\sigma^2 + mr^2}}\right) = P(N(0,1) \geq 0.833)$$

BUSCANDO en la tabla la probabilidad vale 20.33% 0.5 pto

0.6 pto

$$\textcircled{d} \quad \sum_{i=1}^n X_i = n \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left[\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] + \mu \right) \stackrel{\text{Teo}}{\approx} n \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} N(0,1) + \mu \right) \\ = N(n\mu, n\sigma^2)$$

Análogamente $\sum Y_i \approx N(m\nu, mr^2)$

Como X_i, Y_i son independientes, estas normales son independiente entre si, por lo que se tiene al sumar ambas una distribución $N(n\mu + m\nu, n\sigma^2 + mr^2)$

$$\therefore Z = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i \approx N(n\mu + m\nu, n\sigma^2 + mr^2)$$

$$P(Z \geq 700) \approx P(N(n\mu + m\nu, n\sigma^2 + mr^2) \geq 700)$$

$$= P\left(N(0,1) \geq \frac{700 - (n\mu + m\nu)}{\sqrt{n\sigma^2 + mr^2}}\right)$$

$$= P(N(0,1) \geq 0.873) = 20.33\%$$