Pauta Auxiliar 13

P1 Consideremos la circunferencia unitaria:

$z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi] \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta = iz\, d\theta$

$\Rightarrow z^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$.

Además, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z + 1/z}{2}$.

Así, calcularemos

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta n)}{a - \cos(n\theta)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{i\theta}\, d\theta}{2a - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$$

$$= 2 \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{2a - (z + 1/z)} \frac{dz}{iz} = 2i \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 - 2az + 1} dz.$$

Usaremos residuos sobre $f(z) = \dfrac{z^n}{z^2 - 2az + 1}$

Polos: $z^2 - 2az + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

$\Rightarrow p_1 = a + \sqrt{a^2-1}$, $p_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}$ son polos simples.

Como $a > 1 \Rightarrow |p_1| > 1 \Rightarrow p_1$ no está encerrado por la curva considerada, por lo que no la tomaremos en cuenta.

$\underset{\text{residuos}}{\Rightarrow} \displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 - 2az + 1} dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, p_2)$

Donde $\mathrm{Res}(f, p_2) = \lim_{z\to p_2} \cancel{(z-p_2)} \dfrac{z^n}{\underbrace{(z-p_1)\cancel{(z-p_2)}}_{(z^2-2az+1)}}$

$$= \frac{p_2^n}{p_2 - p_1} = \frac{(a-\sqrt{a^2-1})^n}{-2\sqrt{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2-2az+1}\, dz = -2\pi i \left(\frac{(a-\sqrt{a^2-1})^n}{2\sqrt{a^2-1}} \right)$$

$$= -\frac{\pi i (a-\sqrt{a^2-1})^n}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow I = 2i(\,\%\,) = \frac{2\pi (a-\sqrt{a^2-1})^n}{\sqrt{a^2-1}} \qquad (*)$$

Como $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a-\cos(\theta)}\, d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{sen}(n\theta)}{a-\cos(\theta)}\, d\theta$, igualando partes real e imaginaria a $(*)$:

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a-\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{2\pi (a-\sqrt{a^2-1})^n}{\sqrt{a^2-1}}$

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{sen}(n\theta)}{a-\cos(\theta)}\, d\theta = 0.$ //

P2

a) Las singularidades están dadas por $z_k = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

· Si $z_0 = 0 \Rightarrow \lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\operatorname{sen}(z)} \overset{L'H}{=} \lim_{z \to 0} \frac{1}{\cos(z)}$

$= 1$

$\Rightarrow z_0 = 0$ es singularidad evitable.

· Si $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

acotada · no acotada (distinta de cero)

$\Rightarrow \lim_{z \to k\pi} f(z) = \lim_{z \to k\pi} \frac{z}{\operatorname{sen}(z)} = \infty \Rightarrow z_k$ no es evitable.

$\lim_{z \to k\pi} f(z)(z - k\pi) = \lim_{z \to k\pi} \frac{z(z-k\pi)}{\operatorname{sen}(z)}$

$= \lim_{z \to k\pi} \frac{z^2 - zk\pi}{\operatorname{sen}(z)} \overset{L'H}{=} \lim_{z \to k\pi} \frac{2z - k\pi}{\cos(z)}$

$= \begin{cases} -k\pi & k \text{ impar} \\ k\pi & k \text{ par} \end{cases} = k\pi(-1)^k.$

Como $m=1$ es el mínimo natural tq $\lim_{z \to k\pi} f(z)(z-k\pi)^m$ existe $\Rightarrow k\pi$ es polo simple (o de orden 1), $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Notemos que $\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \frac{dz}{\operatorname{sen}(z)} = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z}\,dz$$

Como Γ es el cuadrado de ~~radio~~ lado 2 centrado en 0, solo encierra a la singularidad $z=0$.

Notemos además que $z=0$ es singularidad evitable, pues $f(z) \xrightarrow[z\to 0]{} 1$ (a)

$\Rightarrow$ Por fórmula de Cauchy:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i \lim_{z\to 0} f(z) = 2\pi i$$ //

$\boxed{P3}$ Consideremos $f(z) = \frac{z + \cos(\pi z)}{z^2+1}$

Como $r<1$, el contorno de integración no encierra a $\pm i$ (polos de f). Así, f es analítica (= holomorfa) dentro de dicho contorno. Así, aplicando fórmula de Cauchy.

$$\oint_{|z|=r} \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z^2+1)}\,dz = \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z}\,dz \overset{\downarrow}{=} 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \underbrace{\left(\frac{0+\cos(0)}{0^2+1}\right)}_{1}$$

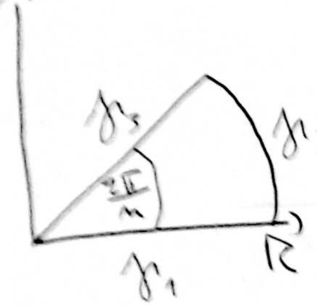
$$= 2\pi i.$$ //

P4 Consideremos $f(z) = \dfrac{1}{1+z^m}$.

Polos de f: las raíces m-ésimas de -1.

$$z_k^m = -1 \Rightarrow z_k = e^{\frac{i\pi + 2k\pi}{m}}, \quad k \in \{0, \ldots, m-1\}.$$

Sea $R > 1$ y el contorno de la indicación:



$$\gamma_R = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3.$$

Notemos que esta curva sólo encierra al polo dado por $K = 0$ (después uno se sale del contorno).

$$\overset{\text{Residuos}}{\Longrightarrow} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{\frac{\pi i}{m}})$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{\frac{\pi i}{m}}).$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_3} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{\frac{\pi i}{m}}) - \int_{\gamma_2} f. \quad (1)$$

Por otro lado: $(\Gamma_1(t)=t\ ,\ t\in[0,R]\ ,\ \Gamma_2(t)=(R-t)e^{i\frac{2\pi}{m}})$.

$$\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_3} f=\int_0^R \frac{1}{1+x^m}dx+\int_R^0 \frac{1\cdot e^{\frac{2\pi i}{m}}}{1+x^m}dx$$

$$=\left(1-e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)\int_0^R \frac{1}{1+x^m}dx.$$

Veamos que $\int_{\gamma_2} f \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$:

$$\left|\int_{\gamma_2} f\right|=\left|\int_0^{2\pi/m}\frac{i\cancel{\alpha}Re^{i\theta}}{1+R^m e^{im\theta}}d\theta\right|\leqslant\int_0^{\frac{2\pi}{m}}\frac{\cancel{\alpha}R\,d\theta}{|1+R^m e^{im\theta}|}=(*)$$

Pero $|1+R^m e^{im\theta}|=\sqrt{(1+R^m\cos(m\theta))^2+R^{2m}\operatorname{sen}^2(m\theta)}$
$\geqslant R^m$

$$\Rightarrow (*)\leqslant\int_0^{2\pi/m}\frac{\cancel{\alpha}R}{R^m}d\theta=\frac{2\pi}{R^{m-1}}\xrightarrow[R\to\infty]{(m\geq 2)}0$$

$\Rightarrow$ Tomando $R\to\infty$ en (1):

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)\int_0^\infty\frac{1}{1+x^m}dx=2\pi i\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{\pi i}{m}}\right)$$

Calculemos: (7)

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{\pi i}{m}}\right) = \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{m}}} \frac{(z - e^{\pi i/m})}{1+z^m}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{m}}} \frac{1}{m z^{m-1}} = \frac{1}{m e^{\frac{(m-1)}{m}\pi i}} = \frac{1}{m e^{\pi i}} e^{\frac{\pi i}{m}} = -\frac{1}{m} e^{\frac{\pi i}{m}}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{1+x^m}\, dx = -\frac{2\pi i}{m} e^{\frac{\pi i}{m}} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{m} \cdot \frac{2i}{e^{\frac{\pi i}{m}} - e^{\frac{-\pi i}{m}}} = \frac{\pi}{m\,\mathrm{sen}(\pi/m)}.$$

//

PS Hint: Send MEMES.