

Resumen Auxiliar 12

Teo. Residuos: $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, p_k)$.

Prop: p, q polinomios primos entre sí $\Leftrightarrow q$ no tiene 0's reales y además $\text{gr}(q) \geq \text{gr}(p) + 2$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{q(z)=0 \\ \text{Im}(z)>0}} \text{Res}\left(\frac{p}{q}, z\right)$$

Teo: f meromorfa. Si:

- i) f no tiene polos en $\mathbb{R}$.
- ii) f tiene una cantidad finita (n) de polos.
- iii) $\exists K, M \geq 0, m > 1$ $\Leftrightarrow |f(z)| \leq \frac{K}{|z|^m}, \forall |z| \geq M$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, p_k)$$

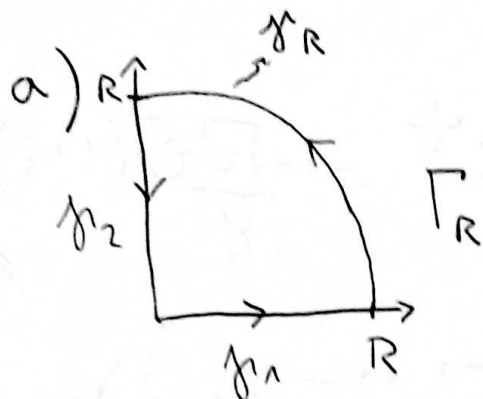
Def. general de residuos: a_{-1} , de la serie de Laurent.

Si p es polo de orden m : $\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-p)^m f(z))$.

Pauta Auxiliar 12

①

P1)



Notemos que la función $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, donde sus polos simples corresponden a las raíces cuartas de -1 , i.e.: $p_k = e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot e^{\frac{k\pi i}{2}}$, $k=0,1,2,3$.

En la región encerrada por Γ_R , sólo se encuentra p_0 (los otros están en los otros cuadrantes).

$$\Rightarrow \text{Por los Residuos, } \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, p_0)$$

Por lo que sólo falta calcular el residuo:

Como es polo simple:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, p_0) &= \lim_{z \rightarrow p_0} \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} ((z-p_0)^1 f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow p_0} \frac{(z-p_0) e^{iz^2}}{1+z^4} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow p_0} \frac{e^{iz^2} + 2zi e^{iz^2} (z-p_0)}{4z^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-1} + 2e^{\frac{i\pi}{4}} i e^{-1} (e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}})}{4e^{\frac{i\pi}{4}}}$$

$\downarrow$
 $(e^{\frac{i\pi}{4}})^2 = i$

$$= \frac{e^{-1}}{4(e^{\frac{i\pi}{4}})^{4-1}} = \frac{e^{-1}}{-4 \cdot e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{-e^{-1}}{4} e^{\frac{i\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{8} e^{-1} (1+i)$$

$$\text{Así, } \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{-2\pi i \sqrt{2}}{8} e^{-1} (1+i) = \frac{\sqrt{2} e^{-1} \pi}{4} (1-i).$$

b) $z = x + iy$, con $x, y \geq 0$ (pues están en el primer cuadrante) $\Rightarrow xy \geq 0$. (*)

luego:

$$|e^{iz^2}| = |e^{i(x^2 - y^2 + 2ixy)}| = |e^{-2xy + i(x^2 - y^2)}| = e^{-2xy} \leq e^0 = 1.$$

c) Notemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{1+z^4} \stackrel{CH}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1+4z^3} = 0$. (*)

Además, en el primer cuadrante, por (b), $|e^{iz^2}| \leq 1$.

m.b.a. acotada (*)

$$\Rightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ x, y \geq 0}} z f(z) = 0.$$

(3)

Luego, $\forall \varepsilon > 0, \exists R_0 > 0$ tq

$$R > R_0, z \in \gamma_R \Rightarrow |z| > R_0, \operatorname{Im} z \geq 0 \Rightarrow |zf(z)| < \varepsilon. \quad \bigg/ \int_{\gamma_R}$$

$$R > R_0 \Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_R} |f(z)| |dz|$$

$$= \int_{\gamma_R} \frac{|zf(z)|}{|z|} |dz| = \int_{\gamma_R} \frac{|zf(z)|}{R} |dz| < \frac{\varepsilon \pi R}{R} = \varepsilon \pi := \tilde{\varepsilon}$$

Es decir:

Dado $\tilde{\varepsilon}$ arbitrario, $(\tilde{\varepsilon} > 0)$, $\exists R_0 > 0$ tq $R > R_0 \Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| < \tilde{\varepsilon}$.

i.e., $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$.

d) Consideremos Γ_R de (a), y $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$.

Por (a), $\oint_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{\sqrt{2} e^{-1} \pi (1-i)}{4}$.

Además, $\oint_{\Gamma_R} f = \int_{\gamma_R} f + \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

$$\Rightarrow \underline{\gamma_1}: \gamma_1(t) = t, t \in [0, R] \Rightarrow \gamma_1'(t) = 1$$

$$\underline{\gamma_2}: \gamma_2(t) = i(R-t), t \in [0, R] \Rightarrow \gamma_2'(t) = -i.$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{2} e^{-1} \pi (1-i)}{4} - \int_{\gamma_R} f(z) dz &= -i \int_0^R \frac{e^{-i(R-t)^2}}{1+(R-t)^4} dt \\ &+ \int_0^R \frac{e^{it^2}}{1+t^4} dt \end{aligned} \right\} (*)$$

$$u = R-t$$

$$\uparrow$$

$$= +i \int_R^0 \frac{e^{-iu^2}}{1+u^4} du + \int_0^R \frac{e^{it^2}}{1+t^4} dt$$

$$= -i \int_0^R \frac{e^{-iu^2}}{1+u^4} du + \int_0^R \frac{e^{it^2}}{1+t^4} dt$$

$$= -i \int_0^R \frac{\cos(t^2) - i \sin(t^2)}{1+t^4} dt + \int_0^R \frac{\cos(t^2) + i \sin(t^2)}{1+t^4} dt$$

$$= \int_0^R \frac{\cos(t^2) - \sin(t^2)}{1+t^4} dt + i \int_0^R \frac{\sin(t^2) - \cos(t^2)}{1+t^4} dt$$

Iguando parte real en (*):

$$\frac{\sqrt{2} e^{-1} \pi}{4} - \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_R} f(z) dz \right) = \int_0^R \frac{\cos(t^2) - \sin(t^2)}{1+t^4} dt \quad \Bigg/ \quad \lim_{R \rightarrow \infty}$$

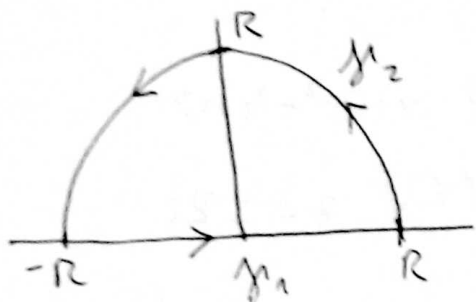
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos(t^2) - \sin(t^2)}{1+t^4} dt = \frac{\sqrt{2} e^{-1} \pi}{4} //$$

P2]

(5)

a) Sea $f(z) = \frac{z}{(z^2+2z+2)(z^2+4)}$

γ la curva $\gamma_R = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dada por la semicircunferencia superior de radio R con su diámetro:



Primero veamos que $\int_{\gamma_R} f \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, en efecto:

$$\gamma_2(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi] \Rightarrow \gamma_2'(t) = iRe^{it}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_2} f \right| = \left| \int_0^\pi \frac{Re^{it} \cdot iRe^{it} dt}{(R^2 e^{2it} + 2Re^{it} + 2)(R^2 e^{2it} + 4)} \right|$$

$$\leq \int_0^\pi |f| dt = \int_0^\pi \frac{R^2}{\underbrace{|R^2 e^{2it} + 2Re^{it} + 2|}_{\geq R^2 - 2R - 2} \underbrace{|R^2 e^{2it} + 4|}_{\geq R^2 - 4}} dt$$

$$\leq \frac{\pi R^2}{(R^2 - 2R - 2)(R^2 - 4)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Obs: Esta parte no es estrictamente necesaria de hacer si se usa la prop. del residuo (que usaremos a continuación), pero lo hice por si no recuerdan la prop (y después se toma $R \rightarrow \infty$).

y se puede ocupar residuos "tradicionales").
 Luego, notemos que f es de la forma P/q ,
 con $\text{gr}(P) = 1 \leq 1+2=3 < 4 = \text{gr}(q)$ (y recordando $\int_{\gamma_R} f \rightarrow 0$ as $R \rightarrow \infty$)
 $\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^M \text{Res}(f, p_k)$

Polos:

polos reales ~~simples~~
 de la parte imaginaria
 positiva.

$$(z^2 + 2z + 2)(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 2 = 0 \vee z^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \vee z = \pm 2i$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \pm i \vee z = \pm 2i$$

$\Rightarrow$ los polos son $p_1 = -1 + i$, $p_2 = -1 - i$, $p_3 = 2i$, $p_4 = -2i$.
 Todos simples (ninguno real).

$\Rightarrow$ solo nos interesan los que tienen parte imaginaria
 positiva: p_1, p_3

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, p_1) &= \lim_{z \rightarrow p_1} (z - p_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{z(z - p_1)}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)(z - p_4)} \\ &= \frac{p_1}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)} = \frac{-1 + i}{2i(p_1^2 - p_3^2)} = \frac{-1 + i}{2i(-2i + 4)} \\ &= \frac{-1 + i}{4i(2 - i)} \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f, p_2) = \frac{p_2}{(p_2^2 + 2p_2 + 2)(p_2 + 2i)} = \frac{2i}{4i(-4 + 4i + 2)} = \frac{1}{4(2i - 1)}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} dx &= 2\pi i \left(\frac{-1+i}{4(2i+1)} + \frac{1}{4(2i-1)} \right) \quad (7) \\
 &= 2\pi i \left(\frac{(i-1)(2i-1) + (2i+1)}{4(2i+1)(2i-1)} \right) \\
 &= \pi i \left(\frac{-2-i-2i+1+2i+1}{2(2i+1)(2i-1)} \right) = \frac{\pi}{2(-4-1)} = -\frac{\pi}{10}
 \end{aligned}$$

b) Recordemos que $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Sea entonces $f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{2(z^2+1)}$, cuyos polos son i, i ($\notin \mathbb{R}$).

Consideremos la misma curva de (a).

Luego, notemos que, si $z = x+iy$,

$$|f(z)| = \frac{1}{2} \left| \frac{1 - e^{2iz}}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{(1 + |e^{2iz}|)}{|z^2+1|}$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{(1 + e^{-2y})}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|z|^2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \quad \forall r \geq 1 \quad (= M \text{ del } r \text{ en } m).$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(f, p_k)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Además, } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{2ix}}{2(x^2+1)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{2(x^2+1)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2+1} dx \\
 &\quad \text{O (impar, dom. simétrico).}
 \end{aligned}$$

Por lo que solo quedan calar los residuos:

Polos de f : $\pm i$, pero la semicircunferencia superior solo encierra a i .

$$\Rightarrow \text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)(1-e^{2iz})}{2(z+i)(z-i)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1-e^{2iz}}{2(z+i)} = \frac{1-e^{-2}}{4i}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2+1} dx = 2\pi i \left(\frac{1-e^{-2}}{4i} \right) = \frac{\pi}{2} (1-e^{-2}). //$$

c) Recordemos que $\sin(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} \Rightarrow z=0 \text{ es singularidad esencial.}$$

Luego, por teo. Residuos,

(mi polo inestable).

$$\oint_{|z|=r} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 2\pi i \underbrace{a_{-1}}_{\text{def. Residuo (de la serie de Laurent)}}$$

a_{-1} es el coeficiente asociado a z^{-1}

$$\Rightarrow \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} = a_{-1} z^{-1} \Rightarrow 2n+1=1 \Rightarrow n=0.$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big|_{n=0} = \frac{1}{1!} = 1.$$

9.

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 1.$$